

Exercice 1 (Tables de vérité)

Construisez les tables de vérité des formules suivantes :

1. $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
2. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \vee r)$
3. $((p \rightarrow \neg p) \wedge p)$

Exercice 2 (Le conditionnel)

Trouvez deux exemples d'usage du "si..., ..." dans la langue naturelle qui mettent en difficulté la table de vérité de \rightarrow .

Exercice 3

Déterminez, en justifiant votre réponse, si les arguments suivants sont valides :

1.
$$\frac{((p \rightarrow q) \rightarrow r)}{(q \rightarrow r)}$$
2.
$$\frac{((p \wedge r) \rightarrow q)}{(p \rightarrow q)}$$
3.
$$\frac{((p \wedge q) \rightarrow r) \quad \neg(q \rightarrow r)}{\neg p}$$

Exercice 4 (Formules tautologiques, antilogiques & neutres)

Dites pour chaque affirmation si elle est vraie ou fautive. Vous justifierez votre réponse.

1. ϕ est une formule neutre ssi $\neg\phi$ est une formule neutre
2. si $(\phi \wedge \psi)$ est une antilogie, ϕ est une antilogie ou ψ est une antilogie

Exercice 5 (Paraphrase en LPO)

Symbolisez les énoncés suivants en logique du premier ordre. Vous vous efforcerez de préserver autant de structure logique que possible, et vous préciserez le dictionnaire de symbolisation.

Exemple :

<p>"Marie aime quelqu'un" $\rightsquigarrow \exists x_1 A m x_1$</p> <p>Dictionnaire :</p> <p>$A x_1 x_2$: x_1 aime x_2</p> <p>M : Marie</p>
--

1. Jean ne mange rien.
2. Jean mange une pomme.

3. Les enfants qui parlent trop marchent tard.
4. Personne n'apprécie quelqu'un qui a maltraité un enfant.
5. Il y a des peines et des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir.
6. Les seules peines qui soient un plaisir sont des peines d'amour.

Exercice 6 (Interprétation et satisfaction)

Soit le langage $\mathcal{L} = (I, P, N, c_0, c_1)$. On considère la \mathcal{L} -structure $\mathcal{M} = (\mathbb{M} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, I^{\mathcal{M}})$ où

- $I^{\mathcal{M}}(I) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $I^{\mathcal{N}}(P) = \{2, 3, 5, 7\}$
- $I^{\mathcal{N}}(N) = \{0, 1, 2, 3\}$
- $I^{\mathcal{N}}(c_0) = 0$
- $I^{\mathcal{N}}(c_1) = 1$

On note g_i l'assignation qui associe le nombre i ($0 \leq i \leq 10$) à la variable x .

1. Par quelles assignations sont respectivement satisfaites les formules (a) $\neg Ix$, (b) $(Px \wedge Nx)$ et (c) $(\neg Ix \vee Px)$?
2. Les énoncés suivants sont-ils vrais dans \mathcal{M} :
 - $\forall x(Px \rightarrow Ix)$
 - $\exists x(Nx \wedge Px)$
 - Pc_0
 - Nc_1
 - $\exists x(Px \wedge \neg Ix)$
 - $\exists x(Px \wedge (\neg Ix \wedge \neg Nx))$
3. Donnez une formule qui est exactement satisfaite par les assignations g_0, g_1, g_2, g_3 et g_9 .

Exercice 7 (Validité en LPO)

Démontrez que les énoncés suivants sont valides :

1. $\forall x(Px \vee \neg Px)$
2. $((\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \wedge \psi))$
3. $(\forall x\phi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi)$
4. $(\exists x\phi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\phi)$

Exercice 8 (LPO avec identité)

On ajoute au langage du premier ordre l'identité, $=$, dont l'interprétation est fixe : pour toute \mathcal{L} -structure \mathcal{M} , toute paire de termes t_1, t_2 et toute assignation g , $\mathcal{M}, g \models t_1 = t_2$ ssi $t_1^{\mathcal{M},g}$ est identique à $t_2^{\mathcal{M},g}$.

1. Paraphasez dans ce langage les énoncés suivants ;

- (a) Jean aime Marie mais Marie aime quelqu'un d'autre.
 - (b) Hormis Jean, personne n'aime Marie.
 - (c) Au moins deux personnes aiment Marie.
 - (d) Il n'y a pas plus d'une personne qui aime Marie.
 - (e) Il y a exactement trois personnes qui aiment Marie.
2. Exhibez une formule ϕ_n qui est vraie dans une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} ssi \mathcal{M} est de cardinalité supérieure ou égale à n .
 3. Exhibez un ensemble de formules Γ qui sont simultanément satisfaites vraies dans une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} ssi \mathcal{M} est de cardinalité infinie.

Exercice 9 (Monotonie)

1. Donnez l'interprétation du quantificateur "Au moins deux". Ce quantificateur est-il monotone décroissant à droite? Monotone croissant à droite? (donnez des exemples d'énoncés qui illustrent le phénomène)
2. Mêmes questions avec "Au plus trois".
3. Mêmes questions avec "Exactement cinq"

Exercice 10

On considère les paires suivantes d'énoncés :

- (1) Tous les hommes pensent.
 - (1') Tous les hommes sont des hommes qui pensent.
 - (2) Certaines souris sont joueuses.
 - (2') Certaines souris sont des souris joueuses.
- Que pouvez-vous dire des relations entre (1) et (1'), entre (2) et (2').
 - On dit qu'un déterminant est conservatif s'il est interprété par un quantificateur Q qui satisfait $Q A B$ ssi $Q A A \cap B$. "Certains" est-il conservatif? "Tous" est-il conservatif?