Introduction à la logique et à la sémantique formelle

D. Bonnay & M. Cozic

DEC, ENS Ulm

20/9/06

CogMaster 2006-2007

logique et sciences cognitives

- logique et raisonnement : psychologie du raisonnement, intelligence artificielle
- logique et modélisation : représentation des croyances, des changements de croyance, de la coordination sur la base des croyances
- logique et langage : syntaxe formelle, sémantique formelle

1. Qu'est-ce que la logique ?

la notion d'argument

- La logique s'intéresse aux arguments
- Un **argument** est la donnée d'une conclusion et d'un ensemble de prémisses censées la justifier :

  Si Marie boit, Pierre trinque
  Marie boit
  ___
  Pierre trinque

- Prémisses et conclusions sont des énoncés ; un **énoncé** est une expression susceptible d'être vraie ou fausse.
- La logique cherche à caractériser parmi les arguments ceux qui sont **valides**

quelques arguments

- Validides ou non ?

Si Marie boit, Pierre trinque
Marie boit

Pierre trinque

Tous les philosophes sont beaux
Descartes est beau

Descartes est philosophe

Si Marie boit, Pierre trinque
Pierre trinque

Marie boit

Tous les logiciens sont malins
Proust est un logicien

Proust est malin

la notion d'argument valide

- Aristote sur la validité :

  "...un syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données." Premiers Analytiques, 24b18, trad. Tricot, Vrin

- Un argument **valide** est un argument dont la vérité des prémisses entraîne celle de la conclusion.
- Un argument **sain** (*sound*) est un argument valide dont les prémisses sont vraies.

substitutions, 1

Si Marie boit, Pierre trinque
Marie boit

Pierre trinque

Si Marie boit, Marc aboit
Marie boit

Marc aboit

Si Marie boit, Marc aboit
Marie boit

Pierre trinque

Si Marie mord, Marc aboit
Marie mord

Marc aboit

Ou bien Marie boit, ou bien
Pierre trinque
Marie boit

Pierre trinque

Si ϕ, ψ
ϕ

ψ

substitutions, 2

Tous les logiciens sont malins
Proust est un logicien
___
Proust est malin

Tous les logiciens sont tatoués
Proust est un logicien
___
Proust est tatoué

Tous les logiciens sont tatoués
Ludwig est un logicien
___
Ludwig est un tatoué

Certains logiciens sont malins
Proust est un logicien
___
Proust est malin

Tous les P sont Q
a est P
___
a est Q

les constantes logiques

- 2 classes de **constantes logiques** :
  (i) les connecteurs propositionnels : "si..., alors...", "...et...", "...ou...", "il est faux que..."
  (ii) les quantificateurs : "tous...", "il existe...", "certains..."
- 2 logiques élémentaires :
  (i) la **logique propositionnelle** (LP) qui traite exclusivement des connecteurs propositionnels
  (ii) la **logique du premier ordre** (LPO) qui traite des connecteurs propositionnels et des quantificateurs
- Dans chaque cas, on verra
  (i) syntaxe : construction d'un langage formel
  (ii) sémantique : assignation d'une signification aux expressions du langage formel

2. logique propositionnelle

introduction

- La LP traite des arguments dont la validité repose exclusivement sur les connecteurs propositionnels
- Dans ces arguments, seule importe la structure des énoncés complexes, pas la structure des énoncés atomiques
- La syntaxe de la LP considère donc les énoncés atomiques comme primitifs et s'intéresse aux combinaisons que l'on peut en faire avec les connecteurs
- La syntaxe de la LP construit la notion de **formule** qui est la contrepartie formelle de la notion d'énoncé (expression susceptible d'être vraie ou fausse)

syntaxe de LP

- L'**alphabet** du langage contient des *formules atomiques* $p, q, r \ldots$ des symboles de *connecteurs* $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ et des *parenthèses* $), ($
- Les **formules** sont définies ainsi:

  (i) les formules atomiques sont des formules

  (ii) si ϕ et ψ sont des formules, alors $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ et $\neg\phi$ sont des formules

  (iii) seules les expressions engendrées par un nombre fini d'application de (i)-(ii) sont des formules

arbre de formation

- Une formule se décompose de manière unique jusqu'aux formules atomiques qui la constituent. On peut le représenter *via* l'**arbre de formation** d'une formule.
- Exemple : $(p \rightarrow (q \wedge r))$

$$(p \longrightarrow (q \wedge r))$$

$$p \qquad (q \wedge r)$$

$$q \qquad r$$

- La sémantique est la partie de la logique qui s'occupe de l'*interprétation* du langage formel
- Dans le cas propositionnel, on assigne aux formules du langage une **valeur de vérité** : le vrai (1) ou le faux (0)
- La logique classique obéit au **principe de bivalence** : toute formule a une et une seule valeur de vérité
- La valeur de vérité des formules atomiques est arbitraire ; en revanche, une fois ces valeurs fixées, la valeur de vérité des formules complexes dépend de la façon dont elles sont composées.

la négation

- Supposons que $V(p) = 1$ ("il pleut" est vrai). Quelle est la valeur de vérité de $\neg p$ ("il est faux qu'il pleuve") ?

$$V(\neg p) = 0$$

- Inversement, si $V(p) = 0$, alors

$$V(\neg p) = 1$$

- De manière générale, la négation est un opérateur qui inverse la valeur de vérité de la formule à laquelle elle s'applique

$V(\phi)$	$V(\neg\phi)$
1	0
0	1

la conjonction et la disjonction

- Une conjonction $(\phi \wedge \psi)$ est vraie uniquement quand les deux membres sont vrais
- Une disjonction $(\phi \vee \psi)$ est vraie dès que l'un des membres est vrai (disjonction "inclusive")

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \wedge \psi))$	$V((\phi \vee \psi))$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

le conditionnel

- Le conditionnel reflète (plus ou moins) le "si..., alors..." de la langue naturelle.
- Un conditionnel $(\phi \rightarrow \psi)$ n'est faux que lorsque l'antécédent est vrai et le conséquent faux.

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \rightarrow \psi))$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

valuation

- Une **valuation atomique** est une fonction qui assigne à chaque formule atomique une valeur de vérité.
- Une **valuation** est une fonction qui assigne à chaque formule une valeur de vérité conformément à l'interprétation des connecteurs.
- Il existe une et une seule valuation qui étend une valuation atomique donnée. Concrètement, si ϕ est une formule complexe qui contient les formules atomiques p, q, r, alors une fois que la valeur de vérité de p, q, r est fixée, celle de ϕ est déterminée.

exemple

- Considérons la formule $\phi := \neg(p \rightarrow \neg q)$ et supposons que $V(p) = V(q) = 1$. Quelle est la valeur de vérité de ϕ ?

p	q	$\neg q$	$(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
1	1	0	0	1

- On peut représenter les valeurs de vérités de ϕ pour toute combinaison possible de valeurs de vérité de ses propositions atomiques en une **table de vérité** :

p	q	$\neg q$	$(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

tautologies & antilogies

- Une formule est **satisfiable** s'il existe une valuation qui la rend vraie.
  Exemple : $(p \vee q)$
- Une formule est **tautologique** ou **valide** si toute valuation la rend vraie.
  Exemple : $(p \vee \neg p)$
- Une formule est **antilogique** ou **contradictoire** si aucune valuation ne la rend vraie.
  Exemple : $(p \wedge \neg p)$

exemples

- Une tautologie : $(p \vee \neg p)$

p	$\neg p$	$(p \vee \neg p)$
1	0	1
0	1	1

- Une antilogie : $(p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$
1	0	0
0	1	0

conséquence logique

- Retour à l'intuition de départ : un argument est valide si la vérité des prémisses entraîne celle de la conclusion.
- On dit qu'une valuation satisfait un ensemble de formules Γ si elle satisfait toutes les formules de Γ.
- Γ a pour **conséquence logique** ϕ si toute valuation qui satisfait Γ satisfait ϕ

exemple

- $\Gamma = \{p, (p \to q)\}$ et $\phi = q$.

$$\frac{\text{Si Marie boit, Pierre trinque} \quad \text{Marie boit}}{\text{Pierre trinque}}$$

p	q	$(p \to q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

3. logique du premier ordre

limites de la LP

- Comment traiter l'argument suivant en LP ?

  Tous les logiciens sont malins
  Proust est un logicien
  ___
  Proust est malin

- Il faut associer à chaque énoncé une formule atomique - disons, respectivement, p, q, r. Mais r n'est pas conséquence logique de $\{p, q\}$.
- Il faut une analyse plus fine de la structure des énoncés.

prédication & quantification

- La prédication :
  "Rudolf est logicien" $\rightsquigarrow L(r)$
  "Rudolf est plus grand que Ludwig" $\rightsquigarrow G(r, l)$
  $\Rightarrow$ deux classes de symboles :
  - les symboles de constantes : $a, b, c, ...$
  - les symboles de prédicat $P^{(1)}, Q^{(1)}, R^{(1)}, ..., P^{(n)}, Q^{(n)}, R^{(n)}, ...$
- La quantification
  "Il existe un logicien" $\rightsquigarrow \exists x L(x)$
  "Tout le monde est plus grand que Ludwig" $\rightsquigarrow \forall x G(x, l)$
  "Tout le monde aime quelqu'un" $\rightsquigarrow \forall x \exists y A(x, y)$
  $\Rightarrow$ deux classes de symboles :
  - symboles de variables $x, y, z, ...$
  - quantificateurs : $\forall, \exists$

paraphrases, 1

- Les propositions aristotéliciennes :

A	Tout S est P	Universelle affirmative
E	Nul S n'est P	Universelle négative
I	Quelque S est P	Particulière affirmative
O	Quelque S n'est pas P	Particulière négative

- Paraphrases :

"Tous les philosophes viendront"	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Px \longrightarrow Sx)$
"Quelque philosophe viendra"	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Px \wedge Sx)$
"Aucun philosophe ne viendra"	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Px \longrightarrow \neg Sx)$
"Quelque philosophe ne viendra pas"	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Px \wedge \neg Sx)$

paraphrases, 2

"Paul aime quelqu'un"	$\rightsquigarrow$	$\exists x Apx$
"Paul est aimé de quelqu'un"	$\rightsquigarrow$	$\exists x Axp$
"Tout le monde aime quelqu'un"	$\rightsquigarrow$	$\forall x \exists y Axy$
"Tous ceux qui aiment Paul aiment Marie"	$\rightsquigarrow$	$\forall x (Axp \rightarrow Axm)$
"Paul n'aime personne"	$\rightsquigarrow$	$\forall x \neg Apx$
"Paul aime quelqu'un qui aime Marie"	$\rightsquigarrow$	$\exists x (Apx \wedge Axm)$
"Paul aime tous ceux qui aiment tout le monde"	$\rightsquigarrow$	$\forall x (\forall y Axy \rightarrow Apx$

syntaxe de LPO

- L'**alphabet** de LPO contient
  (i) des symboles de constantes $a, b, c \ldots$
  (ii) des symboles de prédicats $P^{(1)}, Q^{(1)}, R^{(1)}, \ldots, P^{(n)}, Q^{(n)}, R^{(n)}, \ldots$
  (iii) de variables $x, y, z, \ldots$
  (iv) les connecteurs propositionnels $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
  (v) les quantificateurs $\forall, \exists$
  (vi) des parenthèses
- Un langage du premier ordre est une spécification de (i)-(ii). (iii)-(vi) sont communs à tous les langages du premier ordre.

syntaxe de LPO, suite

- Un **terme** est une variable ou un symbole de constante.
- Les **formules** sont définies ainsi :
  - (i) Si $P^{(n)}$ est un symbole de prédicat n-aire et $t_1, ..., t_n$ sont des termes, alors $P(t_1, ..., t_n)$ est une formule
  - (ii) Si ϕ et ψ sont des formules, alors $\neg\phi$, $(\phi \vee \psi)$, etc. sont des formules
  - (iii) Si ϕ est une formule, alors $\forall x \phi$ et $\exists x \phi$ sont des formules
  - (iv) Seules les expressions engendrées par un nombre fini d'applications de (i)-(iii) sont des formules.

variables libres vs. liées

- Différence importante entre les deux types de formules :

$\forall x B(x)$ $\qquad$ $B(x)$

$\forall x \forall y A(x,y)$ $\qquad$ $\forall x A(x,y)$

- Les variables des formules de gauche sont toutes "sous la portée" d'un quantificateur ou **liées**. Certaines occurences de variables sont au contraire **libres** dans les formules de de droite.
- On appelle **énoncé** (parfois **formule close**) une formule où toutes les variables sont liées. Les énoncés en ce sens correspondent aux énoncés au sens informel i.e. ils sont susceptibles d'être vrai ou faux.

- En LP, on ne traite que de valeurs de vérité : la valeur de vérité d'une formule est déterminée par celles des formules qui la composent. La sémantique de la LPO doit être enrichie car les parties d'une formule ne sont pas nécessairement des formules elles-mêmes
  $\Rightarrow$ il faut interpréter les symboles de constantes et les symboles de prédicats
- 1ère idée fondamentale : on se donne un domaine de discours M
  - les symboles de constantes dénotent des éléments du domaine de de discours ;
  - les symboles de prédicats n-aires dénotent des relations n-aires sur M.
- Intuitivement : une formule Pa est vraie si l'élément du domaine dénoté par a appartient à l'ensemble d'éléments du domaines dénoté par P

$\mathcal{L}$-structures

- Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$**-structure** $\mathcal{M} = (M, I^{\mathcal{M}})$ est une paire constituée
  (i) d'un domaine (non vide) d'individus M
  (ii) d'une fonction d'interprétation $I^{\mathcal{M}}$
    - si c est un symbole de constante, alors $I^{\mathcal{M}}(c) = c^{\mathcal{M}} \in M$
    - si $P^{(n)}$ est un symbole de prédicat, alors $I^{\mathcal{M}}(P) = P^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$

exemple 1

- Soit le langage $\mathcal{L} = (H, F, P, p, j, m, a)$.
  $\mathcal{M} = (\{Paul, Jacques, Marie, Anne\}, I^{\mathcal{M}})$ où
  - $I^{\mathcal{M}}(H) = \{Paul, Jacques\}$
  - $I^{\mathcal{M}}(F) = \{Marie, Anne\}$
  - $I^{\mathcal{M}}(P) = \{Jacques, Anne\}$
  - $I^{\mathcal{M}}(p) =$ Paul, $I^{\mathcal{N}}(j) =$ Jacques, $I^{\mathcal{N}}(m) = Marie$, $I^{\mathcal{N}}(a) = Anne$
- Intuitivement,
  $\mathcal{M} \models H(j)$, $\mathcal{M} \not\models H(m)$
  $\mathcal{M} \models \forall x(H(x) \vee F(x))$, $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x)$

exemple 2

- Soit le langage $\mathcal{L} = (O, E, c_0, c_1)$. $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I^{\mathcal{M}})$ où
  - $I^{\mathcal{N}}(E) = \{0, 2, 4, 6...\}$
  - $I^{\mathcal{N}}(O) = \{1, 3, 5, 7...\}$
  - $I^{\mathcal{N}}(c_0) = 0$
  - $I^{\mathcal{N}}(c_1) = 1$
- Intuitivement,
  $\mathcal{N} \vDash E(c_0)$, $\mathcal{N} \nvDash E(c_1)$
  $\mathcal{N} \vDash \forall x(O(x) \vee E(x))$, $\mathcal{N} \nvDash \forall x E(x)$

assignations

- Problème : si l'interprétation d'une formule est déterminée par l'interprétation de ses parties, comment construire l'interprétation d'une formule comme $\forall x O(x)$?
- De manière générale, le problème est d'interpréter les formules comportant des variables libres.
- 2nde idée fondamentale : l'**assignation** : une assignation $g(.)$ associe à chaque variable x un élément du domaine d'invididus $g(x) \in M$.
- On définit ensuite la notion de satisfaction d'une formule par une assignation. $P(x)$ est par exemple satisfaite par toutes les assignations qui assignent à x l'un des élements de $P^{\mathcal{I}}$.

satisfaction

- Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et g une assignation. Pour une formule ϕ, on définit la **satisfaction** de ϕ par l'assignation g :

  (i) si $\phi := Rt_1 ... t_k$ pour un symbole de prédicat R d'arité k et des termes $t_1, ..., t_k$, alors $\mathcal{M}, g \models \phi$ ssi $(t_1^{\mathcal{M},g}, ..., t_k^{\mathcal{M},g}) \in R^{\mathcal{M}}$

  (ii) si $\phi := \neg\psi$, alors $\mathcal{M}, g \models \phi$ ssi $\mathcal{M}, g \not\models \psi$

  (iv) $\phi := (\psi \wedge \chi)$, alors $\mathcal{M}, g \models \phi$ ssi $\mathcal{M}, g \models \psi$ et $\mathcal{M}, g \models \chi$

  (v) si $\phi := \forall x_n \psi$, alors $\mathcal{M}, g \models \phi$ ssi pour tout $a \in M$, $\mathcal{M}, g[x_n \rightarrow a] \models \psi$

  (vi) si $\phi := \exists x_n \psi$, alors $\mathcal{M}, g \models \phi$ ssi il existe $a \in M$ tq. $\mathcal{M}, g[x_n \rightarrow a] \models \psi$

vérité et validité

- Si toutes les assignations satisfont ϕ, on dit que ϕ est **vraie** dans $\mathcal{M}$ ou que $\mathcal{M}$ est un **modèle** de ϕ. On le note

$$\boxed{\mathcal{M} \models \phi}$$

- ϕ est **valide** si elle est satisfaite par toute assignation dans toute $\mathcal{L}$-structure. On le note

$$\boxed{\models \phi}$$

exemple

Soit le langage $\mathcal{L} = (H, F, P, p, j, m, a)$.
$\mathcal{M} = (\{Paul, Jacques, Marie, Anne\}, I^{\mathcal{M}})$ où

- $I^{\mathcal{M}}(H) = \{Paul, Jacques\}$
- $I^{\mathcal{M}}(F) = \{Marie, Anne\}$
- $I^{\mathcal{M}}(P) = \{Jacques, Anne\}$
- $I^{\mathcal{M}}(p) =$ Paul, $I^{\mathcal{N}}(j) =$ Jacques, $I^{\mathcal{N}}(m) = Marie$, $I^{\mathcal{N}}(a) = Anne$

$g_1(x) = Paul$	$g_2(x) = Anne$
$\mathcal{M}, g_1 \models Fm$, $\mathcal{M}, g_1 \not\models Fj$	$\mathcal{M}, g_2 \models Fm$, $\mathcal{M}, g_2 \not\models Fj$
$\mathcal{M}, g_1 \not\models Fx$	$\mathcal{M}, g_2 \models Fx$
$\mathcal{M}, g_1 \not\models (Fx \vee Px)$	$\mathcal{M}, g_2 \not\models (Fx \wedge Px)$
$\mathcal{M}, g_1 \models Hx$	$\mathcal{M}, g_2 \not\models Hx$
$\mathcal{M}, g_1 \models \exists x Fx$	$\mathcal{M}, g_2 \models \exists x Fx$
$\mathcal{M}, g_1 \models \forall x(Fx \vee Hx)$	$\mathcal{M}, g_2 \models \forall x(Fx \vee Hx)$

exemple

Soit le langage $\mathcal{L}_1 = (P^{(1)}, R^{(2)}, c_0, c_1)$. On peut l'interpréter dans la $\mathcal{L}_1$-structure $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I^{\mathcal{N}})$ où

- $I^{\mathcal{N}}(P) = \{0, 2, 4, 6...\}$
- $I^{\mathcal{N}}(R) => $ (l'ordre strict usuel sur les entiers)
- $I^{\mathcal{N}}(c_0) = 0$
- $I^{\mathcal{N}}(c_1) = 1$

$g_1(x_1) = 5, g_1(x_2) = 2$	$g_2(x_1) = 0, g_2(x_2) = 3$
$\mathcal{N}, g_1 \not\models Rc_1x_1$	$\mathcal{N}, g_2 \models Rc_1x_1$
$\mathcal{N}, g_1 \models Rx_1x_2$	$\mathcal{N}, g_2 \not\models Rx_1x_2$
$\mathcal{N}, g_1 \models \forall x_1 \exists x_2 Rx_2x_1$	$\mathcal{N}, g_2 \models \forall x_1 \exists x_2 Rx_2x_1$
$\mathcal{N}, g_1 \not\models \exists x_1(Rx_1c_0 \wedge Rc_1x_1)$	$\mathcal{N}, g_2 \not\models \exists x_1(Rx_1c_0 \wedge Rc_1x_1)$

exemple

Soit le langage $\mathcal{L}_2 = (H^{(1)}, F^{(1)}, A^{(2)}, p, j, m, a)$. On peut l'interpréter dans la $\mathcal{L}_2$-structure $\mathcal{M} = (\{Paul, Jacques, Marie, Anne\}, I^{\mathcal{M}})$ où

- $I^{\mathcal{M}}(H) = \{Paul, Jacques\}$
- $I^{\mathcal{M}}(F) = \{Marie, Anne\}$
- $I^{\mathcal{M}}(A) = \{(Marie, Paul), (Paul, Anne), (Jacques, Jacques), (Anne, Marie)\}$
- $I^{\mathcal{M}}(p) =$ Paul, $I^{\mathcal{M}}(j) =$ Jacques, $I^{\mathcal{M}}(m) = Marie$, $I^{\mathcal{M}}(a) = Anne$

$g_1(x_1) = Paul, g_1(x_2) = Marie$	$g_2(x_1) = Anne, g_2(x_2) = Paul$
$\mathcal{M}, g_1 \nvDash Apx_1$	$\mathcal{M}, g_2 \vDash Apx_1$,
$\mathcal{M}, g_1 \vDash \exists x_1 Ajx_1$	$\mathcal{M}, g_2 \vDash \exists x_1 Ajx_1$
$\mathcal{M}, g_1 \nvDash \forall x_1 Ax_1x_2$	$\mathcal{M}, g_2 \nvDash \forall x_1 Ax_1x_2$

4. logique et langue naturelle

Logique et langage

On vient de voir un *langage formel*

- sa syntaxe
- sa sémantique

Quel rapport avec le français ?

- on peut traduire les énoncés du français dans la logique du premier ordre.
- le projet de la linguistique formelle: voir le français comme une langue artificielle.

La linguistique formelle

Richard Montague :

> *Il n'y a selon moi aucune différence théorique importante entre les langues naturelles et les langages artificiels des logiciens.*

Objectifs de la linguistique formelle :

syntaxe formelle caractériser de manière systématique les énoncés grammaticaux d'une langue donnée.

sémantique formelle sur la base de notre compréhension de la syntaxe, rendre compte de manière compositionnelle de la signification des phrases.

pragmatique formelle sur la base de notre compréhension de la syntaxe et de la sémantique, expliquer comment sont utilisés les énoncés.

Premier problème (1)

Parallèle syntaxe / sémantique

"Tous les philosophes viendront"	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Px \rightarrow Sx)$
"Certains philosophes viendront"	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Px \wedge Sx)$

Des paraphrases différentes mais des constructions analogues :

- $P \rightarrow GN \quad GV$
- $GN \rightarrow Det \quad N$
- $GV \rightarrow VI$

Premier problème (2)

$\rightsquigarrow$ on voudrait une analyse **uniforme** et **compositionnelle**

- Même comportement syntaxique $\longrightarrow$ même catégorie syntaxique.
- Même catégorie syntaxique $\longrightarrow$ même catégorie sémantique.
- Composition des significations des unités syntaxiques indépendantes.

Deuxième problème

L'expressivité des langues naturelles

Trois philosophes viendront.

Ok:
$\exists x, y, z\ (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \wedge (Px \wedge Py \wedge Pz) \wedge (Vx \wedge Vy \wedge Vz)$

La plupart des philosophes viendront.

??
$\rightsquigarrow$ Impossible de paraphraser “la plupart” à l'aide de $\exists$, $\forall$, $=$ ...

Qu'est-ce qu'un quantificateur ? (1)

$\mathcal{M} \models \exists x \ \phi(x) \ \sigma$
ssi
"il y a des objets du domaine qui satisfont $\phi(x)$"
ssi
$\{a \in |M| / \mathcal{M} \models \phi(x) \ \sigma[x \rightarrow a]\} \neq \emptyset$

Première généralisation
Quantificateur comme prédicat de prédicat :
$\mathcal{Q} \ A$, où $A \subseteq M$.

Qu'est-ce qu'un quantificateur ? (2)

Cette analyse marche pour certains déterminants :

Certains philosophes viendront

ssi

L'ensemble des philosophes qui viendront est non vide.

Mais elle ne marche pas pour tous :

La plupart des philosophes viendront.

L'ensemble des philosophes qui viendront ? contient la plupart des individus.

Qu'est-ce qu'un quantificateur ? (3)

Deuxième généralisation

Quantificateur comme prédicat de relations :
$\mathcal{Q}\ A\ B$, où $A, B \subseteq M$.

Exemples :

- Tous les $A\ B$.
  ssi $A \subseteq B$.
  $||Tous||_M = \{\langle A, B\rangle / A, B \subseteq M, A \subseteq B\}$
- Certains $A\ B$.
  ssi $A \cap B \neq \emptyset$.
  $||Certains||_M = \{\langle A, B\rangle / A, B \subseteq M, A \cap B \neq \emptyset\}$
- La plupart des $A\ B$.
  ssi $\text{card}(A \cap B) > \text{card}(A - B)$.
  $||La\ plupart||_M = \{\langle A, B\rangle / A, B \subseteq M,\ \text{card}(A \cap B) > \text{card}(A - B)\}$
  (notation : $\mathcal{Q}_{\text{la plupart}}$)

La solution à nos problèmes (1)

Le problème de l'expressivité :

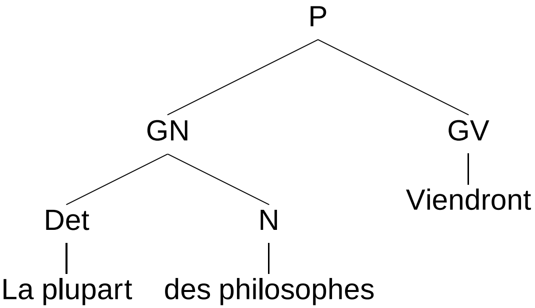
$\rightsquigarrow$ “la plupart” est un quantificateur relationnel à part entière, qui n'est pas réductible à un quantificateur non relationnel.

La solution à nos problèmes (2)

Le problème d'une analyse compositionnelle fidèle à la syntaxe :

La plupart des philosophes viendront.

Analysé syntaxiquement comme :



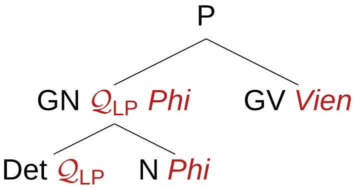
La solution à nos problèmes (3)

Les valeurs sémantiques ...

- $||[_{Det}\textit{La plupart}]|| = \mathcal{Q}_{\text{LP}}$
- $||[_{N}\textit{des philosophes}]|| = \{a/a \text{ est un philosophe}\}$=*Phi*
- $||[_{GN}[_{Det}\textit{La plupart}][_{N}\textit{des philosophes}]]||$
  $= \{B/\mathcal{Q}_{\text{LP}}\ Phi\ B\}$
  $= \mathcal{Q}_{\text{LP}}\ Phi$
- $||[_{GV}\textit{viendront}]|| = \{a/a \text{ viendra}\} = Vien$
- $||[_{S}[_{GN}[_{Det}\textit{La plupart}][_{N}\textit{des philosophes}]][_{GV}\textit{viendront}]]||$
  = $\mathcal{Q}_{\text{LP}}\ Phi\ Vien$

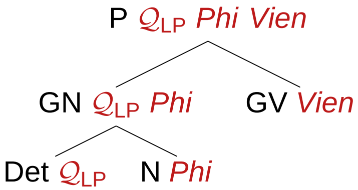
La solution à nos problèmes (4)

Le calcul des valeurs sémantiques est parallèle à la dérivation syntaxique ...



La solution à nos problèmes (4)

Le calcul des valeurs sémantiques est parallèle à la dérivation syntaxique ...



Et après ?

$\rightsquigarrow$ Etudier les propriétés sémantiques des déterminants :

- Expliquer des phénomènes linguistiques particuliers.
- Identifier des universaux linguistiques.
- Isoler des classes de déterminants.
- Etudier le pouvoir expressif des langues naturelles.

La monotonicité (1)

Tous les philosophes viendront à l'heure.
Tous les philosophes viendront.

Certaines personnes sont bêtes et méchantes.
Certaines personnes sont bêtes.

$\mathcal{Q}$ est monotone croissant à droite ssi :
$\mathcal{Q}\ A\ B$ et $B \subseteq C$ implique $\mathcal{Q}\ A\ C$.

La monotonicité (2)

Aucun soldat n'aime pleurer.
Aucune soldat n'aime pleurer sans raison.

Peu de gens aiment la langue de bœuf.
Peu de gens aiment la langue de bœuf et les rognons.

$\mathcal{Q}$ est monotone décroissant à droite ssi :
$\mathcal{Q}\ A\ B$ et $C \subseteq B$ implique $\mathcal{Q}\ A\ C$.

Applications (1)

Expliquer des phénomènes linguistiques particuliers
Exemples : items à polarité négative.

> *Aucun policier n'a le moindre soupçon.*
> *Aucun policier qui a le moindre soupçon ne le libèrerait.*
> *? Tous les policiers ont le moindre soupçon.*
> *? Certains policiers ont le moindre soupçon.*

$\rightsquigarrow$ Les items à polarité négative sont permis dans les contextes monotones décroissants.

Applications (2)

Identifier des universaux linguistiques

Tous
Certains
Beaucoup
Cinq
Deux ou quatre
Un nombre pair de

$\rightsquigarrow$ Contrainte de monotonicité : les déterminants lexicalisés dans les langues naturelles expriment des quantificateurs monotone ou des conjonctions de quantificateurs monotones.

A suivre ...