1 Inteprétation des connecteurs

1.1 Négation

$V(\phi)$	$V(\neg\phi)$
1	0
0	1

$V(\neg\phi) = 1$ ssi $V(\phi) = 0$
$V(\neg\phi) = 1 - V(\phi)$
La négation est interprétée par une fonction $neg : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} : neg(x) = 1 - x$.

1.2 Conjonction

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \wedge \psi))$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$V((\phi \wedge \psi))$ ssi $V(\phi) = V(\psi) = 1$
$V((\phi \wedge \psi)) = \min(V(\phi), V(\psi))$
La conjonction est interprétée par une fonction $conj : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} : conj(x,y) = min(x,y)$.

(1) Ludwig court et Rudolf fait des pompes.

(2) Ludwig est sportif et philosophe.

(3) Ludwig pleure *mais* Rudolf reste de bonne humeur

(4) *Bien que* Ludwig pleure, Rudolf reste de bonne humeur

1.3 Disjonction

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \vee \psi))$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$V((\phi \vee \psi)) = 1$ ssi $V(\phi) = 1$ ou $V(\phi) = 1$
$V((\phi \vee \psi)) = \max(V(\phi), V(\psi))$
La disjonction est interprétée par la fonction $disj : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} : disj(x,y) = \max(x,y)$.

(5) William est amoureux de Rudolf ou de Gottlob

(6) Si vous êtes chômeur ou si vous êtes étudiant, vous bénéficiez d'un tarif réduit.

(7) Ludwig est parti mardi ou mercredi.

(8) Ludwig est ou bien serviable, ou bien aimable.

1.4 Conditionnel

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \rightarrow \psi))$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$V((\phi \rightarrow \psi)) = 0$ ssi $V(\phi) = 1$ et $V(\psi) = 0$
L'implication est interprétée par une fonction $impl : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} : impl(x,y) = 0$ ssi $x = 1$ et $y = 0$

(9) Les socialistes ne gagneront pas les prochaines législatives.

(10) .Si les socialistes gagnent les prochaines législatives, ils instaureront la dictature du prolétariat.

(11) Jean fait cours à 10 heures.

(12) Si j'ai a un accident de voiture à 9 heures, il fait cours à 10 heures.

(13) Si Shakespeare n'a pas écrit *Hamlet*, quelqu'un d'autre l' a fait.

(14) Si Shakespeare n'avait pas écrit *Hamlet*, quelqu'un d'autre l'aurait fait.

2 Valuation, évaluation, tables de vérité

Définition 1
Une ***valuation*** *pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ est une fonction $V : \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A})) \rightarrow \{0,1\}$ qui associe à chaque formule une valeur de vérité telle que*

(i) $V(\neg\phi) = 1$ *ssi* $V(\phi) = 0$
(ii) $V((\phi \wedge \psi)) = 1$ *ssi* $V(\phi) = V(\psi) = 1$
(iii) $V((\phi \vee \psi)) = 1$ *ssi* $V(\phi) = 1$ *ou* $V(\psi) = 1$
(iv) $V((\phi \rightarrow \psi)) = 1$ *ssi* $V(\phi) = 0$ *ou* $V(\psi) = 1$
(v) $V((\phi \leftrightarrow \psi)) = 1$ *ssi* $V(\phi) = V(\psi)$

Exemple 1
La fonction $V(.)$ telle que $V(\phi) = 1$, $V(\neg\psi) = 1$ n'est pas une valuation.

Définition 2
Une ***assignation*** *(ou* ***valuation atomique****) est une fonction qui assigne une valeur de vérité à toute formule atomique $p \in At$.*

Théorème 1
Soit $v : At \to \{0,1\}$ une valuation atomique; il existe une et une seule valuation $V : \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A})) \to \{0,1\}$ qui étend v, i.e. t.q. pour toute formule atomique $p \in At$, $v(p) = V(p)$.

Proposition 1
Soient V et V' deux valuations qui s'accordent sur les sous-formules atomiques d'une formule ϕ (pour toute formule atomique $p \in At \cap sf(\phi), V(p) = V'(p)$) ; alors $V(\phi) = V'(\phi)$

Exemple 2
La formule $\phi := (p \wedge (q \to r))$ contient trois formules atomiques : p, q, r. La proposition nous garantit que la valeur de vérité de ϕ ne dépend que de celles de p, q, r.

Définition 3
*L'**évaluation** d'une formule ϕ est la détermination de la valeur de vérité de ϕ pour chacune des (classes de) valuations pertinentes.*

- Si la formule contient 2 sous-formules atomiques, disons p et q alors il y a $2^2 = 4$ (classes de) valuations à envisager. On le représente graphiquement

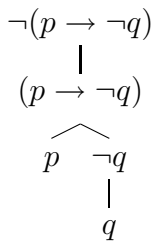
$V(p)$	$V(q)$	
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

- Si la formule contient 3 sous-formules atomiques, disons p, q et r alors il y a $2^3 = 8$ (classes de) valuations à envisager. On le représente graphiquement

$V(p)$	$V(q)$	V(r)	
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

Les **tables de vérités** sont une méthode de présentation graphique des évaluations.

Exemple 3
$\phi := \neg(p \to \neg q)$



p	q	$\neg q$	$(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Remarque : la table de vérité montre que la formule $\neg(p \rightarrow \neg q)$ se comporte comme la formule $(p \wedge q)$.

3 Propriétés et relations sémantiques

Définition 4
*Soit une formule $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ et une valuation V ; quand $V(\phi) = 1$, on dit que ϕ est **vraie** dans ϕ ou que V est un **modèle** de ϕ ou **satisfait** ϕ. Notation : $V \vDash \phi$*

Définition 5
Soit une formule $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$;

*(i) ϕ est **satisfiable** s'il existe une valuation V qui la satisfait.*

*(ii) ϕ est une **tautologie** ou une formule **valide** si toute valuation la satisfait. Notation : $\vDash \phi$.*

*(ii) ϕ est une **antilogie** si aucune valuation ne la satisfait ;*

Exemple 4
formule tautologique : $(p \vee \neg p)$ (principe du tiers-exclu)
formule antilogique : $(p \wedge \neg p)$
formule neutre : $(p \vee q)$

Proposition 2
Si $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ est une tautologie, $\neg\phi$ est une contradiction

Définition 6
Soient ψ, $\phi_1, ..., \phi_n$ des formules quelconques et $p_1, ..., p_n$ des formules atomiques deux à deux distinctes. On définit ainsi la substitution simultanée de $\phi_1, ...\phi_n$ à $p_1, ..., p_n$, que l'on note $\psi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n}$:

(i) si $\psi \in At$, alors $\psi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n} := \phi_k$ si $\psi := p_k$ $(1 \leq k \leq n)$ et $\psi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n} := \psi$ sinon

(ii) si $\psi := \neg\chi$, *alors* $\psi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n} := \neg\chi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n}$

(iii) si $\phi := (\chi \circ \gamma)$, *alors* $\psi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n} := \chi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n} \circ \gamma^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n})$

Théorème 2 (Théorème de substitution)
Soient ψ, $\phi_1, ..., \phi_n$ *des formules quelconques et* $p_1, ..., p_n$ *des formules atomiques deux à deux distinctes ; si* ψ *est une tautologie, alors* $\psi^{p_1,...p_n}_{\phi_1,...,\phi_n}$ *en est une également.*

Définition 7
Deux formules $\phi, \psi \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ *sont* ***logiquement équivalentes*** *si pour toute valuation* V, $V(\phi) = V(\psi)$. *On le note* $\phi \equiv \psi$

Proposition 3 (Equivalences remarquables)
Soit $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ *des formules ;*

Double négation
$\phi \equiv \neg\neg\phi$
Lois de De Morgan :
$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$
$\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
Idempotence de $\vee$ *et* $\wedge$ *:*
$\phi \equiv (\phi \vee \phi) \equiv (\phi \wedge \phi)$
Associativité de $\vee$ *et* $\wedge$ *:*
$(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \vee \chi)$
$(\phi \wedge (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \wedge \chi)$
Commutativité de $\vee$ *et* $\wedge$ *:*
$(\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi)$
$(\phi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \phi)$
Distributivité de $\vee$ *sur* $\wedge$ *et de* $\wedge$ *sur* $\vee$ *:*
$(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \psi)$
$(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \psi)$
Conditionnel :
$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$
$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$
$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \phi)$ *(contraposition)*

Théorème 3 (Théorème de remplacement)
Soient deux formules ϕ, ψ *telles que* $\phi \equiv \psi$ *et une formule* χ *dont* ϕ *est sous-formule. Alors la formule* ϕ' *obtenue par substitution de* ψ *à* ϕ *est logiquement équivalente à* ϕ : $\phi \equiv \phi'$.