1 Introdution à la logique du premier ordre

1.1 Limites de LP

(1)
Tous les logiciens sont sportifs
Rudolf est un logicien
Rudolf est sportif

(2)
$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

1.2 La prédication

1. Considérons l'énoncé "Rudolf est logicien". On analyse cet énoncé comme affirmant d'une certaine entité, Socrate, qu'elle possède la propriété d'être mortel.

La prédication est reflétée dans notre nouveau langage logique en distinguant deux types de symboles :

- les symboles de constantes : $a, b, c, ...$ Ils dénotent l'entité à laquelle la propriété est attribuée. Ils symbolisent typiquement les noms propres de la langue naturelle
- les symboles de prédicat : $P, Q, R....$ Ils dénotent la propriété attribuée à l'entité. Ils symbolisent des expressions comme : des adjectifs, des indéfinis + noms communs

Symbolisation :

$$\text{"Rudolf est logicien"} \rightsquigarrow Lr$$

Dictionnaire :
r : "Rudolf"
Lx_1 : "x_1 est logicien"

2 La LPO ne se limite pas aux prédicats "monadiques" mais considère tous les prédicats n-aires.
Symbolisations :

$$\text{"Rudolf aime Ludwig"} \rightsquigarrow Arl$$

Dictionnaire :
r : "Rudolf", l : "Ludwig"
Ax_1x_2 : "x_1 aime x_2"

"Rudolf préfère Ludwig à William" $\rightsquigarrow Prlw$

Dictionnaire :
r : "Rudolf", l : "Ludwig", w : "William"
Px_1x_2 : "x_1 préfère x_2 à x_3"

1.3 La quantification

1. Quantification monadique

Comment analyser un énoncé comme "Tous les hommes sont mortels" ? L'analyse que la logique moderne retient est la suivante : "Tous les hommes sont mortels" signifie "Toute entité qui a la propriété d'être un homme a la propriété d'être mortelle".

1. On va d'abord symboliser l'expression "une entité qui a la propriété H". Pour cela, on va utiliser des *variables* : $x, y, z, x_1, x_2, ...$
2. On va ensuite symboliser le fait qu'une entité qui a la propriété H a la propriété M : $(Hx \rightarrow Mx)$
3. L'analyse n'est pas achevée : il faut marquer la quantification. Pour cela, on utilise le symbole $\forall$ suivie de la variable appropriée

Exemple 1

"Tous les philosophes sont sportifs"	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Px \rightarrow Sx)$
"Quelque philosophe est sportif"	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Px \wedge Sx)$
"Aucun philosophe n'est sportif"	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Px \rightarrow \neg Sx)$
"Quelque philosophe n'est pas sportif"	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Px \wedge \neg Sx)$
"Nul n'est philosophe	$\rightsquigarrow$	$\neg \exists x Px$
"Il existe des philosophes, et il existe des sportifs"	$\rightsquigarrow$	$(\exists x Px \wedge \exists x Sx)$

2. Analyse aristotélicienne des types de propositions :

- Aristote :

"L'opposition que j'appelle de contradiction est donc celle d'une affirmation exprimant un sujet universel <pris universellement> à une négation exprimant le même sujet non pris universellement.

Par exemple :

Tout homme est blanc - Quelque homme n'est pas blanc

Nul homme n'est blanc - Quelque homme est blanc

L'opposition de *contrariété* est celle de l'affirmation d'un sujet universel à la négation d'un sujet universel : par exemple,

[*Tout homme est blanc - Nul homme n'est blanc*]

Tout homme est juste - Nul homme n'est juste

On voit que ces dernières propositions ne peuvent pas être vraies en même temps, tandis que leurs opposées peuvent parfois être vraies en même temps du même sujet : par exemple, *quelque homme n'est pas blanc* et *quelque homme est blanc.*"

Aristote, *De l'interprétation*, 7, 17b, Vrin, trad. Tricot

- Arnauld et Nicole :

"...il y a une autre différence dans les propositions, laquelle naît de leur sujet, qui est d'être universelles ou particulières, ou singulières. Car les termes, comme nous avons déjà dit dans la première partie, sont ou singuliers, ou commun et universels. Et les termes universels peuvent être pris ou selon toute leur étendue, en les joignant aux signes universels exprimés ou sous-entendus comme *omnis*, *tout*, pour l'affirmation ; *nullus*, *nul*, pour la négation, *tout homme*, *nul homme.*

Ou selon une partie indéterminée de leur étendue, qui est lorsqu'on y joint le mot *aliquis*, quelque, comme *quelque homme*, *quelques hommes*, ou d'autres règles selon l'usage des langues.

D'où il arrive une différence notable dans les propositions. Car lorsque le sujet d'une proposition est un terme commun qui est pris dans toute son étendue, la proposition s'appelle universelle, soit qu'elle soit affirmative, comme *tout impie est fou* ; ou négative comme *nul vicieux n'est heureux.*

Et lorsque le terme commun n'est pris que selon une partie indéterminée de son étendue, à cause qu'il est resserré par le mot indéterminé *quelque*, la proposition s'appelle particulière, soit qu'elle affirme, comme *quelque cruel est lâche*, soit qu'elle nie, comme *quelque pauvre n'est pas malheureux.*"

(Arnauld et Nicole, *La logique ou l'art de penser*, II, iii)

A	Tout S est P	Universelle affirmative
E	Nul S n'est P	Universelle négative
I	Quelque S est P	Particulière affirmative
O	Quelque S n'est pas P	Particulière négative

3. Quantification polyadique :

Exemple 2

"Paul aime quelqu'un"	$\rightsquigarrow$	$\exists x Apx$
"Paul est aimé de quelqu'un"	$\rightsquigarrow$	$\exists x Axp$
"Tout le monde aime quelqu'un"	$\rightsquigarrow$	$\forall x \exists y Axy$
"Tous ceux qui aiment Paul aiment Marie"	$\rightsquigarrow$	$\forall x(Axp \rightarrow Axm)$
"Paul n'aime personne"	$\rightsquigarrow$	$\forall x \neg Apx$
"Paul aime quelqu'un qui aime Marie"	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Apx \wedge Axm)$
"Paul aime tous ceux qui aiment tout le monde"	$\rightsquigarrow$	$\forall x(\forall y Axy \rightarrow Apx)$

2 LPO monadique

2.1 Morphologie

Définition 1
L'alphabet $\mathcal{A}$ d'un langage du premier ordre monadique est la donnée

1. *d'un ensemble de symboles de constantes* $Cons = \{a, b, c, d...\}$
2. *d'un ensemble de symboles de prédicats unaires* $Pred = \{P, Q, R...\}$
3. *d'une variable* $\{x\}$
4. *des quantificateurs* $\{\forall, \exists\}$
5. *d'un ensemble de connecteurs :* $\{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
6. *d'une parenthèse ouvrante et d'une parenthèse fermante* $\{), (\}$

Définition 2
Une expression est un ***terme*** *si c'est une variable ou un symbole de constante.*
On note $Term = \{x\} \cup Cons$ *l'ensemble des termes.*

Exemple 3
$\mathcal{L} = (H, F, P, p, j, m, a)$

Définition 3
L'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ *des* ***formules*** *du langage du premier ordre monadique* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ *:*

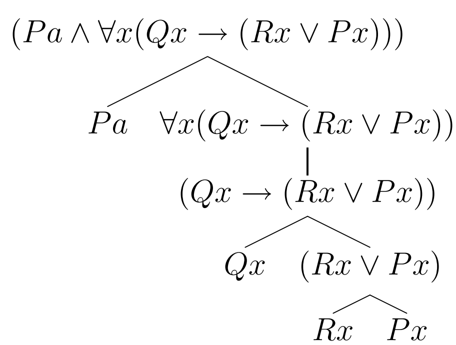
(i) *si Q est un symbole de prédicat et t un terme, Qt est une formule. On dit que c'est une* ***formule atomique****.*
(ii) *si ϕ est une formule, alors $\neg\phi$ est une formule*
(iii) *si ϕ et ψ sont des formules et $\circ$ un connecteur propositionnel binaire, alors $(\phi \circ \psi)$ est une formule*
(iv) *si ϕ est une formule, alors $\exists x\phi$ et $\forall x\phi$ sont des formules*
(v) *seules les expressions engendrées par un nombre fini d'applications des règles précédentes sont des formules*

Définition 4
Soit $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ une formule ; le sous-ensemble $sf(\phi)$ des ***sous-formules*** *de ϕ est*
(i) *si $\phi := Qt$ pour $Q \in Pred$, $t \in Term$ $sf(\phi) = \{Qt\}$*
(ii) *si $\phi := \neg\psi$ ou $\exists x\psi$ ou $\forall x\psi$, $sf(\phi) = \{\phi\} \cup sf(\psi)$*
(iii) *si $\phi := (\psi \circ \chi)$, $sf(\phi) = \{\phi\} \cup sf(\psi) \cup sf(\chi)$*

Exemple 4
$sf((Pa \wedge \forall x(Qx \rightarrow (Rx \vee Px)))) = \{(Pa \wedge \forall x(Qx \rightarrow (Rx \vee Px))), Pa, \forall x(Qx \rightarrow (Rx \vee Px)), (Qx \rightarrow (Rx \vee Px)), Qx, (Rx \vee Px), Rx, Px\}$

Définition 5
Soit ϕ une formule non-atomique ; l'ensemble $sfi(\phi)$ des sous-formules immédiates de ϕ est
(i) *$sfi(\phi) = \{\psi\}$ si $\phi := \neg\psi$, $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$*
(ii) *$sfi(\phi) = \{\psi, \chi\}$ si $\phi := (\psi \circ \chi)$*

Exemple 5



Définition 6 (Occurence libre d'une variable)
Soit x une variable et ϕ une formule ;
- *si ϕ est atomique, x a une occurence libre dans ϕ ssi $\phi := Px$ pour un symbole de prédicat P*
- *si $\phi := \neg\psi$, x a une occurence libre dans ϕ ssi x a une occurence libre dans ψ*

– *si* $\phi := (\psi \circ \chi)$ *pour un connecteur binaire* $\circ$, x *a une occurence libre dans* ϕ *ssi* x *a une occurence libre dans* ψ *ou* χ
– *si* $\phi := \forall x\psi$ *(resp.* $\exists x\psi$*),* x *n'a pas une occurence libre dans* ϕ
L'occurence d'une variable est ***liée*** *si elle n'est pas libre.*

Définition 7
Si $\forall x\psi$ *(resp.* $\exists x\psi$*) est une sous-formule de* ϕ*, alors la formule* ψ *est la* ***portée*** *de cette occurence de* $\forall x$ *(resp.* $\exists x$*) dans* ϕ*.*

Définition 8
Un ***énoncé*** *est une formule qui ne contient aucune occurence libre de variable.*

Exemple 6
- Pc, $\forall xQx$, $\exists x(Px \wedge \exists xQx)$ *sont des énoncés*
- Qx, $(Px \wedge \exists xQx)$ *ne sont pas des énoncés*

2.2 Sémantique

Interpréter un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ consiste
(i) à fixer un domaine d'individu
(ii) pour tout symbole non-logique, à interpréter de manière appropriée ce symbole : par un individu s'il s'agit d'un symbole de constantes et par un ensemble d'individus s'il s'agit d'un symboles de prédicats.

Définition 9
Soit $\mathcal{L}$ *un langage du premier ordre monadique constitué d'un ensemble de symboles de constantes* $Cons$ *et d'un ensemble de symboles de prédicats* $Pred$*. Une* $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{M} = (M, I^{\mathcal{M}})$ *est une paire constituée*
(i) d'un domaine (non vide) d'individus M
(ii) d'une fonction d'interprétation $I^{\mathcal{M}}$
- *si* c *est un symbole de constante, alors* $I^{\mathcal{M}}(c) = c^{\mathcal{M}} \in M$
- *si* P *est un symbole de prédicat, alors* $I^{\mathcal{M}}(P) = P^{\mathcal{M}} \subseteq M$

Exemple 7
Soit le langage $\mathcal{L} = (H, F, P, p, j, m, a)$*.*
$\mathcal{M} = (\{Paul, Jacques, Marie, Anne\}, I^{\mathcal{M}})$ *où*
– $I^{\mathcal{M}}(H) = \{Paul, Jacques\}$
– $I^{\mathcal{M}}(F) = \{Marie, Anne\}$
– $I^{\mathcal{M}}(P) = \{Jacques, Anne\}$
– $I^{\mathcal{M}}(p) =$ Paul, $I^{\mathcal{N}}(j) =$ Jacques, $I^{\mathcal{N}}(m) = Marie$, $I^{\mathcal{N}}(a) = Anne$

Exemple 8
Soit le langage $\mathcal{L} = (P, P*, c_0, c_1)$*.* $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I^{\mathcal{M}})$ *où*

- $I^{\mathcal{N}}(P) = \{0, 2, 4, 6...\}$
- $I^{\mathcal{N}}(P*) = \{1, 3, 5, 7...\}$
- $I^{\mathcal{N}}(c_0) = 0$
- $I^{\mathcal{N}}(c_1) = 1$

est un exemple de $\mathcal{L}$-structure.

Définition 10
Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une ***assignation*** *g associe à la variable x un élément $g(x)$ du domaine.*

Définition 11
Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et g une assignation. Pour une formule ϕ, on définit la ***satisfaction*** *de ϕ par l'assignation g :*

(i) si $\phi := Pc$ pour $P \in Pred$ et $c \in Cons$, alors $\mathcal{M}, g \vDash \phi$ ssi $c^{\mathcal{M}} \in P^{\mathcal{M}}$

(ii) si $\phi := Px$ pour $P \in Pred$, alors $\mathcal{M}, g \vDash \phi$ ssi $g(x) \in P^{\mathcal{M}}$

(iii) si $\phi := \neg\psi$, alors $\mathcal{M}, g \vDash \phi$ ssi $\mathcal{M}, g \nvDash \psi$

(iv) si $\phi := (\psi \wedge \chi)$, alors $\mathcal{M}, g \vDash \phi$ ssi $\mathcal{M}, g \vDash \psi$ et $\mathcal{M}, g \vDash \chi$

(v) si $\phi := \forall x\psi$, alors $\mathcal{M}, g \vDash \phi$ ssi pour toute assignation g', $\mathcal{M}, g' \vDash \psi$

(vi) si $\phi := \exists x\psi$, alors $\mathcal{M}, g \vDash \phi$ ssi il existe une assignation g' tq. $\mathcal{M}, g' \vDash \psi$

Exemple 9
Soit le langage $\mathcal{L} = (H, F, P, p, j, m, a)$.

$\mathcal{M} = (\{Paul, Jacques, Marie, Anne\}, I^{\mathcal{M}})$ où
- $I^{\mathcal{M}}(H) = \{Paul, Jacques\}$
- $I^{\mathcal{M}}(F) = \{Marie, Anne\}$
- $I^{\mathcal{M}}(P) = \{Jacques, Anne\}$
- $I^{\mathcal{M}}(p) =$ Paul, $I^{\mathcal{N}}(j) =$ Jacques, $I^{\mathcal{N}}(m) = Marie$, $I^{\mathcal{N}}(a) = Anne$

$g_1(x) = Paul$	$g_2(x) = Anne$
$\mathcal{M}, g_1 \vDash Fm$, $\mathcal{M}, g_1 \nvDash Fj$	$\mathcal{M}, g_2 \vDash Fm$, $\mathcal{M}, g_2 \nvDash Fj$
$\mathcal{M}, g_1 \nvDash Fx$	$\mathcal{M}, g_2 \vDash Fx$
$\mathcal{M}, g_1 \nvDash (Fx \vee Px)$	$\mathcal{M}, g_2 \nvDash (Fx \wedge Px)$
$\mathcal{M}, g_1 \vDash Hx$	$\mathcal{M}, g_2 \nvDash Hx$
$\mathcal{M}, g_1 \vDash \exists xFx$	$\mathcal{M}, g_2 \vDash \exists xFx$
$\mathcal{M}, g_1 \vDash \forall x(Fx \vee Hx)$	$\mathcal{M}, g_2 \vDash \forall x(Fx \vee Hx)$

Proposition 1
Soit ϕ un énoncé d'un langage $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Ou bien toutes les assignations satisfont ϕ, ou bien aucune ne le fait.
Si toutes les assignations satisfont ϕ, on dit que ϕ est ***vraie*** *dans $\mathcal{M}$ ou que $\mathcal{M}$ est un* ***modèle*** *de ϕ. On le note*

$$\boxed{\mathcal{M} \models \phi}$$

Définition 12
Soit ϕ une formule d'un langage $\mathcal{L}$ et Γ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$

(i) ϕ est ***valide*** *si elle est satisfaite par toute assignation dans toute $\mathcal{L}$-structure. On le note*

$$\boxed{\models \phi}$$

Remarque : un énoncé ϕ d'un langage $\mathcal{L}$ est donc ***valide*** *s'il est vrai dans toute $\mathcal{L}$-structure.*

(ii) ϕ est ***satisfiable*** *s'il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ et une assignation g telles que $\mathcal{M}, g \models \phi$*

(iii) ϕ est ***conséquence logique*** *de Γ si pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, toute assignation g qui satisfait toutes les formules de Γ satisfait ϕ. On le note*

$$\boxed{\Gamma \models \phi}$$

Définition 13
Soit ϕ une formule ; la ***clôture universelle*** *de ϕ est*

- *ϕ si ϕ est un énoncé*
- *$\forall x \phi$ sinon*

Proposition 2
Une formule ϕ est valide ssi sa clôture universelle l'est.

Définition 14
Une formule de la LPOM est une ***instance de tautologie*** *ssi il existe une tautologie comportant les formules atomiques $p_1, ...p_n$ et si ϕ est obtenue par substitution aux formules p_i de formules ψ_i de la LPOM.*

Proposition 3
Si ϕ est une instance de tautologie, alors ϕ est valide.

Exemple 10

- *$(Px \rightarrow Pc)$, $(\forall x Px \rightarrow Pc)$ ne sont pas des instances de tautologies*
- *$(Px \vee \neg Px)$, $\forall x(Qx \wedge \exists x(Px \vee Rx)) \vee \neg \forall x(Qx \wedge \exists x(Px \vee Rx))$, $((\neg Pc \vee Qx) \leftrightarrow (Pc \rightarrow Qx))$ sont des instances de tautologies*

Proposition 4
Les énoncés suivants sont valides :

- $\forall x(Px \vee \neg Px)$
- $(\forall x(Px \wedge Qx) \rightarrow \forall x Px)$
- $((\forall x(Px \vee Qx) \wedge \exists x \neg Px) \rightarrow \exists x Qx)$
- $(\forall x Px \rightarrow Pc)$
- $((\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \wedge \psi))$
- $((\exists x(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\phi \wedge \exists x\psi))$
- $(\forall x\phi \rightarrow \exists x\phi)$

Définition 15
Soit ϕ une formule, et c un symbole de constante. On note $\phi[x/c]$ la formule obtenue par substitution de c aux occurences libres de x, que l'on définit de la manière suivante :

(i) si $\phi := Px$, alors $\phi[x/c] := Pc$; sinon, $\phi[x/c] := \phi$
(ii) si $\phi := \neg\psi$, alors $\phi[x/c] := \neg\psi[x/c]$
(iii) si $\phi := (\psi \circ \chi)$, alors $\phi[x/c] := (\psi[x/c] \circ \chi[x/c])$
(iv) si $\phi := \forall x\psi$, alors $\phi[x/c] := \phi$

Proposition 5
Soit ϕ une formule quelconque de la LPOM ; les formules suivantes sont valides :

- $(\forall x\phi \rightarrow \phi[x/c])$
- $(\phi[x/c] \rightarrow \exists x\phi)$

Définition 16
Deux formules ϕ et ψ sont ***logiquement équivalentes*** *si, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, elles sont satisfaites par les mêmes assignations, soit*

$$\boxed{\mathcal{M}, g \vDash \phi \text{ ssi } \mathcal{M}, g \vDash \psi}$$

Proposition 6
Soient ϕ et ψ deux formules. $\phi \equiv \psi$ ssi $\vDash (\phi \leftrightarrow \psi)$

Proposition 7 (Equivalences remarquables)
Soient ϕ et ψ des formules de la LPOM.

- $\forall x\neg\phi \equiv \neg\exists x\phi$
- $\forall x\phi \equiv \neg\exists x\neg\phi$
- $\neg\forall x\phi \equiv \exists x\neg\phi$
- $\neg\forall x\neg\phi \equiv \exists x\phi$
- $\forall x(\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x\phi \wedge \forall x\psi)$
- $\exists x(\phi \vee \psi) \equiv (\exists x\phi \vee \exists x\psi)$
- $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\exists x\phi \rightarrow \psi)$ *si x n'a pas d'occurence libre dans ψ*