Exercices Obligatoires
Feuille n°1
A rendre pour le
20/III/2007

Un barême *indicatif* est donné au début de chaque exercice.

Exercice 1 (Formules tautologies, neutres & antilogiques - 4 pts)
Soient p et q des formules atomiques, $\circ$ un symbole de connecteur binaire. On définit les formules

- $\phi_\circ := (p \circ (q \circ p))$
- $\psi_\circ := ((q \circ p) \circ \neg(p \circ q))$

Dites si $\phi_\circ$ et $\psi_\circ$ sont des tautologies, des antilogies ou des formules neutres lorsque a) $\circ := \wedge$, b) $\circ := \vee$, c) $\circ := \rightarrow$, d) $\circ := \leftrightarrow$

Exercice 2 (Validité - 5 pts)
Déterminez, en justifiant votre réponse, si les arguments suivants sont valides :

1. $\dfrac{((p \rightarrow q) \rightarrow r)}{(q \rightarrow r)}$

2. $\dfrac{((p \wedge r) \rightarrow q)}{(p \rightarrow q)}$

3. $\dfrac{\begin{array}{l}((p \wedge q) \rightarrow r) \\ \neg(q \rightarrow r)\end{array}}{\neg p}$

4. $\dfrac{\begin{array}{l}((p \vee q) \\ (q \rightarrow r)\end{array}}{\neg r}$

5. $\dfrac{\begin{array}{l}(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))) \\ (p \wedge q)\end{array}}{\neg r}$

Exercice 3 (Interlude : "$\rightarrow$" et "si..., alors.." - 3 pts)
Soit le scénario suivant, connu soit le nom de paradoxe de Grice : Yog et Zog jouent aux échecs, ils jouent de telle manière que les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Yog a les blancs 9 fois sur 10.
(2) il n'y a pas de parties nulles.
Yog et Zog ont joué jusqu'ici 100 parties ; et l'on a observé que
(1) Yog a gagné 80 des 90 parties qu'il a jouées avec les blancs
(2) Yog a perdu les 10 parties qu'il a jouées avec les noirs.

Une de ces 100 parties a été jouée la nuit dernière.

a) Dans ce contexte et à propos de cette dernière partie, quelle valeur de vérité accorderiez-vous spontanément aux énoncés suivants :

(1) Il y a 8 chances sur 9 pour que si Yog a eu les blancs, il ait gagné.

(2) Il y a 1 chance sur 2 pour si Yog a perdu, il ait eu les noirs.

(3) Il y a 9 chances sur 10 pour que soit Yog n'ait pas eu les blancs, soit il ait gagné.

b) Si on admet que ces énoncés sont tous vrais, en quoi cela semble-t-il à première vue contredire certaines lois logiques ?

c) Qu'en penser alors ?

Exercice 4 (Problème I - 2 pts)

Trouvez un ensemble Γ de cinq formules tel que

- *Γ est contradictoire*
- *Tout sous-ensemble de Γ constitué d'exactement 4 formules est non-contradictoire*

Exercice 5 (Problème II - 4 pts)

Supposons que l'ensemble des formules atomiques soit $At_N = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. On définit les formules ϕ_n :

- $\phi_0 := p_0$
- $\phi_{n+1} := (p_{n+1} \rightarrow \phi_n)$

On note Γ_N l'ensemble des formules ϕ_n.

1. *Quelles sont les valuations qui satisfont Γ_N ?*
2. *Déterminez un ensemble de formules atomiques équivalent à Γ_N.*
3. *Quelles sont les valuations qui satisfont $\Delta_N = \{\neg\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$?*
4. *Déterminez un ensemble de littéraux (formules atomiques ou négation de formules atomiques) équivalent à Δ_N.*

Exercice 6 (Problème III - 2 pts)

On introduit un nouveau connecteur binaire, noté "|" et appelé la barre de Scheffer. Son interprétation est donnée par la table de vérité suivante :

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi\|\psi))$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Montrez que les connecteurs usuels sont définissables par la barre de Scheffer, i.e. *montrez que pour toutes formules ϕ, ψ, il existe des formules équivalentes à $\neg\phi, (\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \rightarrow \psi)$ qui ne contiennent comme connecteur que la barre de Scheffer.*