Notes sur la théorie de la correspondance

(2ème version)

0 Introduction

La théorie de la correspondance est l'étude systématique du rapport entre la définissabilité en logique modale et en logiques du premier et du second ordre. On en trouve cependant rarement une définition parfaitement univoque, et elle a tendance plus ou moins à se confondre avec ce que serait une théorie des modèles pour la logique modale. On peut tenter de rendre compte de cet état de fait ainsi :

- D'une part, à l'origine, la théorie de la correspondance naît lorsque, dans la foulée de l'invention de la sémantique des mondes possibles, on découvre des correspondances inattendues entre d'une part des axiomes préexistants de systèmes modaux et, d'autre part, des propriétés relativement simples de la relation d'accessibilité. C'est la base des premiers résultats de complétude en logique modale. La théorie de la correspondance s'abstrait de la recherche de tels résultats pour étudier de façon systématique ces liens (quelles sont les propriétés de la relation exprimées par un axiome, quelles sont les propriétés définissables par un axiome ?).

- D'autre part, de façon plus générale, la liaison établie entre logique modale et logique classique du premier et second ordre au moyen de la traduction standard fournit une base pour étudier soit les propriétés d'expressivité de la logique modale (en important des préoccupations et des techniques propres à la théorie des modèles classique), soit, à l'inverse, les propriétés de la logique modale exportées dans la logique classique (il s'agira par exemple d'isoler des fragments décidables du premier ordre).

Soulignons enfin que selon le point de vue adapté, on privilégiera un niveau de correspondance plutôt qu'un autre : les cadres si l'on s'intéresse aux systèmes modaux et à leurs axiomes, les modèles si l'on s'intéresse à l'expressivité de la logique modale comme outil de description de structures relationnelles.

Bibliographie :

[VB 1983] Van Benthem, Modal Logic and Classical Logic, Bibliopolis

[VB 1984] Van Benthem, "Correspondance Theory", in Handbook of Philosophical Logic, II, pp.167-247

[van Benthem & Doets 1983] "Higher-Order Logic", in Handbook of Philosophical Logic, I, pp. 275-329

[Blackburn & ali 2001], Modal Logic, Cambridge UP

[Burgess 1984] "Basic Tense Logic" in Handbook of Philosophical Logic, II, pp. 89-133

[Chang & Keisler 1977], Model Theory, NHPC

[Cori & Lascar 1993], Logique mathématique, II, Masson

[Gabbay & ali 1994], Temporal Logic, I, Clarendon Press

[Gerbrandy 1998] Bisimulation on Planet Kripke, ILLC Dissertation Series

[Gochet & ali 2000] Logique, III, Hermès

[Kracht 1999] Tools and Techniques in Modal Logics, Elsevier

1 Rappels préliminaires

1.1 Langages

Définition 1. l'alphabet d'un langage modal propositionnel L(*At*) est la donnée

- d'un ensemble de formules atomiques : $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$. On travaillera avec des ensembles dénombrables de formules atomiques.
- d'un ensemble de connecteurs propositionnels : $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \neg\}$
- d'un ensemble d'opérateurs modaux $\{\Diamond, \Box\}$

Définition 2. l'ensemble des formules d'un langage modal propositionnel L(*At*), noté FORM(L*At*)), est l'ensemble tel que

- les éléments de *At* sont des formules de L(*At*)
- si φ est une formule, alors $\neg\varphi$ aussi
- si φ et ψ sont des formules, alors $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$ et $\varphi\leftrightarrow\psi$ sont des formules
- si φ est une formule alors $\Box\ \varphi$ et $\Diamond\varphi$ sont des formules
- seules les expressions engendrées par un nombre fini d'applications de (i)-(iv) sont des formules

Définition 3. $L_0(At)$ est le langage de correspondance du premier ordre qui contient un symbole de prédicat binaire R

Définition 4. $L_1(At)$ est le langage de correspondance du premier ordre qui contient un symbole de relation binaire R et des symboles de prédicats indexés sur l'ensemble des variables propositionnelles

Définition 5. $L_2(At)$ est le langage de correspondance du second ordre qui contient un symbole de relation binaire du premier ordre R et des symboles de prédicats du second ordre indexés sur l'ensemble des variables propositionnelles

1.2 Cadres et modèles

Définition 6. Soit L(*At*) un langage modal propositionnel ; une cadre de Kripke pour L(*At*) est un couple C = < S, R > où

- S est l'ensemble non vide des états ou mondes possibles
- R est une relation binaire sur S dite relation d'accessibilité

Définition 7. Soit L(*At*) un langage modal propositionnel ; un modèle de Kripke pour L(*At*) est un couple *M* = < C , V> où

- C est un cadre
- R est une relation binaire sur S dite relation d'accessibilité
- V est une application : $At \rightarrow \wp(S)$

NB : on notera V(φ) pour toute $\varphi \in$ FORM(L(A*t*)) la valuation induite par V

Il est impératif pour la théorie de la correspondance de bien avoir en tête les différents niveaux sémantiques auxquels une formule modale peut être évaluée. Les voici :

Définition 8. on définit récursivement $(M,s) \models \varphi$ (φ **est vraie à l'état s de la structure *M*** ou (*M*, s) satisfait φ) :

- $(M,s) \models p$ pour $p \in At$ ssi $s \in V(p)$
- non $(M,s) \models \bot$
- $(M,s) \models \neg\varphi$ ssi non $(M,s) \models \varphi$
- $(M,s) \models \varphi \wedge \psi$ ssi $(M,s) \models \varphi$ et $(M,s) \models \psi$
- $(M,s) \models \varphi \vee \psi$ ssi $(M,s) \models \varphi$ ou $(M,s) \models \psi$
- $(M,s) \models \varphi \rightarrow \psi$ ssi, si $(M,s) \models \varphi$ alors $(M,s) \models \psi$
- $(M,s) \models \varphi \leftrightarrow \psi$ ssi $(M,s) \models \varphi$ et $(M,s) \models \psi$ ou non $(M,s) \models \varphi$ et non $(M,s) \models \psi$
- $(M,s) \models \Box\varphi$ ssi $(M,t) \models \varphi$ pour tout t tel que $(s,t) \in R$

Définition 9. on dit qu'une formule φ est ***(globalement) vraie*** **dans une structure** *M* si, pour tout état $s \in S$, $(M,s) \models \varphi$

Définition 10. on dit qu'une formule φ est **valide en l'état s d'un cadre C** = <S, R> si φ est vraie en l'état s de tout modèle *M* basé sur C

Définition 11. on dit qu'une formule φ est **valide dans un cadre C** si elle est vraie dans toute structure *M* basée sur C

1.3 Cadre-définissabilité

Définition 12. on dit qu'une formule $\varphi \in$ FORM(L(*At*))ou FORM (L_i(*At*)) définit une classe de cadres **C** si pour tout cadre C, C $\in$ **C** ssi C $\models \varphi$

Définition 13. soit **C** une classe de cadres ; **C** est dit L-définissable (resp. L_i-définissable) s'il existe une formule de L (resp. L_i) qui définit **C**

Définition 14. soient $\varphi \in$ FORM(L(*At*)) et $\psi \in$ FORM(L_i(*At*)) ; on dit que ψ est le cadre-L_i-correspondant de φ si φ et ψ définissent une même classe de cadres

Définition 15. une formule φ de L(*At*) est

- CGL_i-équivalente (globalement cadre-équivalente) à une formule ψ si $\psi \in L_i$(*At*) et en tout cadre F, F$\models \varphi$ ssi F$\models \psi$
- CLL_i-équivalente (localement cadre-équivalente)à une formule ψ si $\psi \in L_i$(*At*) et en tout cadre F et en tout point s, (F, s) $\models \varphi$ ssi F$\models \psi[s]$

Définition 16. une formule φ de L(*At*) est

- CGL_i-définissable (globalement cadre-définissable) s'il existe une formule ψ qui lui est CGL_i-équivalente
- CLL_i-définissable (localement cadre définissable) s'il existe une formule ψ qui lui est CLL_i-équivalente

Lorsqu'on s'intéresse aux cadres, c'est la CGL_i-définissabilité qui est la plus pertinente, car on a généralement en vue les propriétés sémantiques d'axiomes dont on veut qu'ils voient vérifiés en tout point du modèle.

Proposition 1 si une formule φ de L est CLL_0-définie par une formule $\psi(x)$, alors elle est CGL_0-définie par la formule $\forall x\psi(x)$

1.4 Modèle-définissabilité

Définition 17. on dit qu'une formule $\varphi \in$ FORM(L(*At*))ou FORM (L_i(*At*)) définit une classe de modèles ***M*** si pour tout modèle *M*, *M* $\in$ ***M*** ssi *M* $\models \varphi$

Définition 18. soit ***M*** une classe de modèles ; ***M*** est dit L-définissable (resp. L_i-définissable) s'il existe une formule de L (resp. L_i) qui définit ***M***

Définition 19. soient $\varphi \in FORM(L(At))$ et $\psi \in FORM(L_i(At))$; on dit que ψ est le modèle-L_i-correspondant de φ si φ et ψ définissent une même classe de modèles

Définition 20. une formule φ de $L(At)$ est

- MGL_i-équivalente (globalement modèle-équivalente) à une formule ψ si $\psi \in L_i(At)$ et en tout modèle M, $M \models \varphi$ ssi $M \models \psi$
- MLL_i-équivalente (localement modèle-équivalente)à une formule ψ si $\psi \in L_i(At)$ et en tout modèle M et en tout point s, $(M, s) \models \varphi$ ssi $M \models \psi[s]$

Définition 21. une formule φ de $L(At)$ est

- MGL_i-définissable (globalement modèle-définissable) s'il existe une formule ψ qui lui est MGL_i-équivalente
- MLL_i-définissable (localement modèle-définissable) s'il existe une formule ψ qui lui est MLL_i-équivalente

Au contraire de ce qui se passait pour les cadres, c'est la MLL_i-définissabilité qui est la plus pertinente, car lorsqu'on s'intéresse aux modèles, c'est pour étudier l'expressivité *locale* de la logique modale, sa capacité à décrire d'un point de vue interne ce qui se passe en un monde.

1.5 La traduction des formules modales

Définition 22. soit $\varphi \in PROP(L(At))$; on définit inductivement **la traduction standard** ST_x de φ pour la variable d'individus x :

- $ST_x(p_n) = P_n x$
- $ST_x(\varphi \circ \psi) = ST_x(\varphi) \circ ST_x(\psi)$
- $ST_x(\neg\varphi) = \neg ST_x(\varphi)$
- $ST_x(\Box\varphi) = \forall y\,(xRy \rightarrow ST_y(\varphi))$ où y est une nouvelle variable

Remarque 1 : la traduction consiste essentiellement en la reformulation dans le langage du premier ordre de la clause du métalangage modal qui définit la satisfaction en un état d'un modèle. C'est effectivement la première piste à suivre quand on veut examiner le rapport entre logique modale et logique classique dans la mesure où cette clause présente les opérateurs modaux comme une quantification restreinte par la relation d'accessibilité.

Remarque 2 : on peut considérer que cette traduction a pour langage-cible L_1 si l'on considère les P_i comme des constantes de prédicats, L_2 si l'on considère les P_i comme des variables de prédicats. C'est la distinction modèle / cadre qui va guider le choix de langage-cible, comme le montre la Proposition suivante.

Proposition 2 soient F = <S,R> un cadre, M = <S, R, V> un modèle, $\varphi \in$ PROP(L(At)) et $p_1, \ldots, p_n$ les variables propositionnelles apparaissant dans φ ; alors

1. $(M, s) \models \varphi$ ssi $M \models ST_x(\varphi)$ [s]
2. $(F, s) \models \varphi$ ssi $M \models \forall P_1 \ldots \forall P_n\, ST_x(\varphi)$ [s]
3. $M \models \varphi$ ssi $M \models \forall x\, ST_x(\varphi)$
4. $F \models \varphi$ ssi $M \models \forall P_1 \ldots \forall P_n\, \forall x\, ST_x(\varphi)$

Remarque : La satisfaction des formules au niveau des modèles (1. et 3.) ne fait pas forcément intervenir la logique du second ordre. Ainsi elle hérite de la compacité et du théorème de Lowenheim-Skolem. En outre, si une classe de modèles **M** est L-définissable, alors elle est L_1-définissable ; de même que si une classe de cadres **C** est L-définissable, elle est L_2-définissable.

Il importe de bien distinguer ces deux types de définissabilité : par exemple, toute formule de L_0 cadre-L-définissable n'est pas modèle-L-définissable. Ainsi, la formule φ = Rxx n'est pas MLL-définissable mais elle est CLL-définissable [Blackburn & ali 2001], p. 87. φ est CLL-définie par l'axiome T. Soit M = <S, R> où S = {s} et R = <s, s> et N = <N, < > ; en anticipant sur la suite, une condition nécessaire pour que φ soit MLL-définissable, c'est qu'elle soit invariante par bisimulation ; or φ ne l'est pas car on peut mettre M et N en bisimulation, mais φ est vrai en M et pas en N.

Soyons un peu plus général. En un sens, toutes les questions de la théorie de la correspondance dépendent de ces quatre équivalences. Il faut bien comprendre ce qui est donné par la traduction elle-même, et ce qui ne l'est pas, ainsi que les différences fondamentales entre l'approche en termes de cadre et l'approche en termes de modèles :

Soit P une propriété de la relation d'accessibilité ; a priori, il y a deux manières d'envisager la modale-définissabilité de P :

- soit comme MGL-définissabilité : est-ce que la classe des modèles C dont la relation d'accessibilité possède P est définissable ?

- soit comme CGL-définissabilité : est-ce que la classe des cadres K dont la relation d'accessibilité possède P est définissable ?

Contrairement à ce que laisserait penser une mauvaise intuition, il est faux que

C est MGL définissable ssi K est CGL définissable

Certes, on a l'implication de gauche à droite :

supposons que C soit définie par φ, montrons que φ définit K

- supposons que $F \in K$, soit V une valuation sur F, $<F,V> \in C$ donc $<F,V> \models \varphi$, d'où $F \models \varphi$.

- supposons que $F \in K^C$, soit V une valuation sur F, $<F,V>$ n'est pas dans C, donc φ n'est pas vraie dans $<F,V>$ donc φ n'est pas valide sur F.

Mais l'implication de droite à gauche n'est pas valide : non seulement la même formule qui définit une certaine classe K de cadres n'a aucune raison de définir la classe C de modèles associés (par exemple, il est évident que $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ sera vrai dans des modèles où la relation d'accessibilité ne sera pas transitive), mais en outre, dans la plupart des cas, il n'existera pas de telles formules (la classe des modèles où la relation d'accessibilité est transitive n'est pas définissable), ceci parce que l'exigence de clôture par bisimulation (une relation entre des modèles que nous allons définir) des classes de modèles (mais ceci n'est pas vrai des classes de cadre) définissables est une condition très forte (pour n'importe quel modèle ou la relation d'accessibilité possède une certaine propriété, il est facile de trouver un modèle bisimulable qui ne possède plus la propriété).

La conclusion de ceci est que le bon niveau pour étudier la définissabilité d'une propriété de la relation d'accessibilité est le niveau des cadres.

1) La ML_1-équivalence est triviale : Tout classe de modèle pointés (des modèles dans lesquels on distingue un monde "actuel") qui est définissable par une formule modale est définissable par une formule du premier ordre (sa traduction), et il en va de même pour les classes de modèles tout court (il suffit de prendre la clôture universelle des traductions). Mais ceci ne nous dit rien ni du fragment modal du premier ordre, ni des classes de modèles modalement définissables.

2) La CL_2-équivalence est triviale. Toute classe de cadres qui est définissable par une formule de logique modale est définissable par une formule du fragment universel du second ordre (il suffit de quantifier universellement les variables de prédicats). Mais certaines formules modales ont des équivalents très simples au premier ordre : c'est précisément ce fait qui est à l'origine de la théorie de la correspondance[1]. Du coup, on peut se demander

- dans un sens, quand est-ce qu'une formule modale à un CGL_1-équivalent ? Le critère pouvant se décliner à plusieurs niveaux, caractérisation sémantique ou description syntaxique.

---

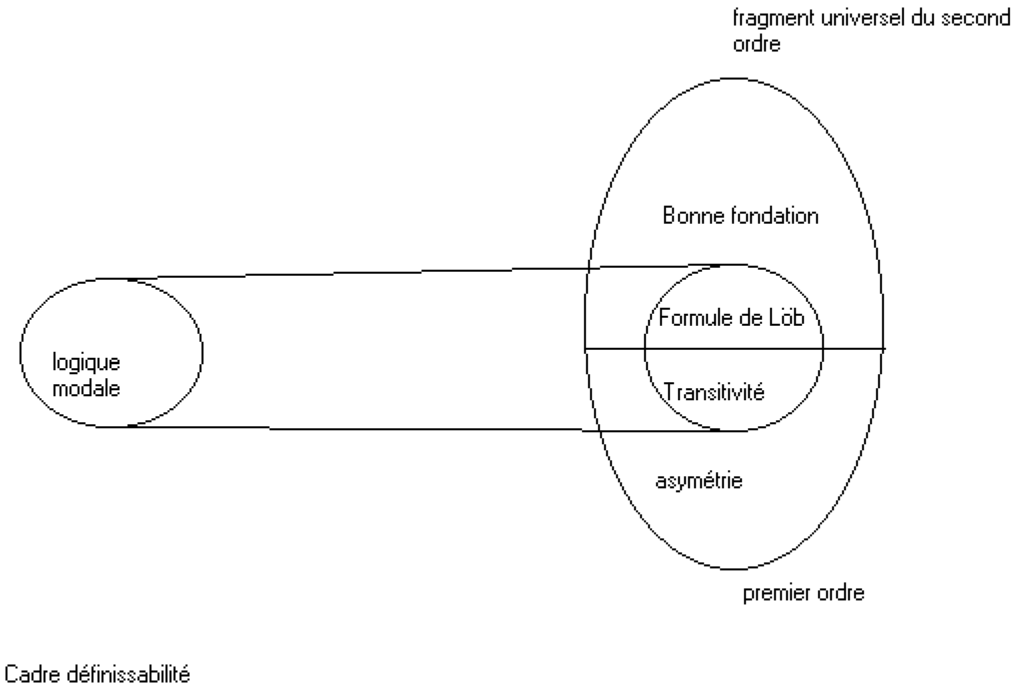
[1] Par la traduction, on obtient donc des formules de L_1 et L_2 (selon que l'on voit les P_i comme variables ou constantes) ; par contre, ce que l'on veut plutôt dans la théorie de la correspondance, ce sont des formules L_0.

Exemple : $ST(\Box p_k \rightarrow \Box\Box p_k) = \forall y\, (xRy \rightarrow P_k y) \rightarrow \forall y\, (xRy \rightarrow \forall z\, (yRz \rightarrow P_k z))$

On préfère lui faire correspondre la formule de L_0 : $\forall x \forall y \forall z\, ((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz))$

- dans un autre sens, quand est-ce qu'une formule du premier ordre ou du second ordre a un équivalent modal ?

La non-trivialité de ces questions découle de la répartition des classes de cadre modalement définissables parmi les classes de cadre définissables au seconde ordre illustrée par le schéma suivant : toute formule modale a un équivalent au second ordre, mais il y a des formules modales qui n'ont pas d'équivalent au premier ordre, et inversement, il y a des formules du premier ordre qui n'ont pas d'équivalent modal.



1.6 Théorie des modèles pour la logique modale

Cette section est basée sur [VB 1983], chap.II et [Blackburn & ali 2001], chap. 2 et 3

1.6.1 L'union disjointe

Définition 23. soit C_i, $i \in I$ une famille de cadres disjoints de la forme $C_i = <S_i, R_i, >$; **l'union disjointe** de la famille $\boldsymbol{C_i}$ est le modèle $\cup \boldsymbol{C_i} = <S, R>$ tel que

- $S = \cup S_i$
- $R = \cup R_i$

Définition 24. soit M_i, $i \in I$ une famille de modèles disjoints de la forme $M_i = <S_i, R_i, V_i>$; **l'union disjointe** de la famille $\boldsymbol{M_i}$ est le modèle $\cup \boldsymbol{M_i} = <S, R, V>$ tel que

- $S = \cup S_i$
- $R = \cup R_i$

pour tout $p \in At$, $V(p) = \cup V_i(p)$

Remarque : dans le cas général, les S_i peuvent ne pas être disjoints ; on peut cependant facilement adapter la définition, Cf [VB 1983], pp.29-30

Proposition 3 la satisfaction est invariante par union disjointe : pour tout $i \in I$, tout $s \in S_i$ et toute formule modale φ, $(M_i, s) \models \varphi$ ssi $(\cup \boldsymbol{M_i}, s) \models \varphi$

Preuve : par induction sur la complexité de la formule φ

Commentaire : en effet, la façon dont on évalue une formule modale en un état d'un modèle ne dépend que de son environnement, et celui-ci ne change pas par union disjointe.

Proposition 4 la validité en un cadre est préservée par union disjointe : pour toute formule modale φ et pour toute famille de cadre $\mathbf{C_i}$, si pour tout $i \in I$, $C_i \models \varphi$, alors $\cup \mathbf{C_i} \models \varphi$

1.6.2 Les sous-modèles engendrés

Définition 25. $C' = <S', R', >$ est un **sous-cadre engendré** de $M = < S, R, V>$ si (i) $S' \subseteq S$ (ii) $R' = R \cap S' \times S'$ (iii) C' est clos relativement à R : si $s_1 \in S'$ et $s_1 R s_2$ alors $s_2 \in S'$

Définition 26. $M' = <S', R', V'>$ est un sous-modèle de $M = < S, R, V>$ si (i) $S' \subseteq S$ (ii) $R' = R \cap S' \times S'$ (iii) pour tout p, $V'(p) = V(p) \cap S'$

Définition 27. $M' = <S', R', V'>$ est un **sous-modèle engendré** de $M = < S, R, V>$ si (i) $S' \subseteq S$ (ii) $R' = R \cap S' \times S'$ (iii) pour tout p, $V'(p) = V(p) \cap S'$ (iv) si $s_1 \in S'$ et $s_1 R s_2$ alors $s_2 \in S'$

Proposition 5 Théorème de génération (Segerberg, Feferman) : la satisfaction modale est invariante par sous-modèle engendré : pour tous modèles M et M', si M' est un sous-modèle engendré de M, alors pour tout $s \in S'$, pour toute formule modale φ, $(M', s) \models \varphi$ ssi $(M, s) \models \varphi$

Proposition 6 la validité en un cadre est préservée par sous-cadre engendré : pour tout formule modale φ, si C' est un sous-cadre engendré de C, alors si C|= φ alors C'|= φ

Conséquence pour la théorie de la correspondance : si une formule ψ n'est pas invariante par sous-modèle engendré, elle ne peut être L-définissable.

1.6.3 Le p-morphisme

Définition 28. soient C = <S, R > et C' <S', R'> des cadres ; une fonction f: $C \rightarrow C'$ est un p-morphisme de C dans C' si

- pour tous s_1, $s_2 \in$ S, si Rs_1s_2, alors $R'f(s_1)f(s_2)$
- pour tous $s_1 \in$ S et $s'_2 \in$ S', si $R'f(s_1)s'_2$, alors il existe $s_2 \in$ S tel que Rs_1s_2 et $s'_2 = f(s_2)$

Définition 29. soient M = <S, R, V> et M' <S', R', V'> des modèles ; une fonction f: $M \rightarrow M'$ est un p-morphisme de M dans M' si

- pour tout $s \in S$ et toute $p_k \in At$, $s \in V(p_k)$ ssi $f(s) \in V'(p_k)$
- pour tous s_1, $s_2 \in$ S, si Rs_1s_2, alors $R'f(s_1)f(s_2)$
- pour tous $s_1 \in$ S et $s'_2 \in$ S', si $R'f(s_1)s'_2$, alors il existe $s_2 \in$ S tel que Rs_1s_2 et $s'_2 = f(s_2)$

Proposition 7 Théorème du p-morphisme (Segerberg 1970): la satisfaction modale est invariante par p-morphisme : soient M et M' deux modèles, f : $M \rightarrow M'$ un p-morphisme ; pour tout $s \in$ S et toute formule modale, (M, s) |= φ ssi (M', f(s))|= φ

Proposition 8 la validité en un cadre est préservée par p-morphisme : pour toute formule modale φ, si il existe un p-morphisme de C dans C', alors, si C|= φ, alors C'|= φ

Conséquence pour la théorie de la correspondance : si une formule ψ n'est pas invariante par p-morphisme, elle ne peut être L-définissable

Conséquence (Sahlqvist) : tout cadre engendré F est l'image p-morphique d'un arbre irréflexif intransitif. Corollaire : si φ n'est pas universellement valide, alors φ est falsifié dans un certain arbre intransitif irréflexif

1.6.4 La bisimulation

Il s'agit d'une relation entre structures, qui prétend donner la bonne notion «d'identité du point de vue modal » de deux structures. C'est en fait simplement un affaiblissement (et donc une généralisation) de la notion de p-morphisme (on renonce à la fonctionnalité) mais l'idée est la même : ce qu'il faut respecter, c'est moins la structure de la relation d'accessibilité que ce qu'on peut en voir d'un point de vue local.

Définition 30. Soient *M*=<M,R,V> et *M'*=<M',R,V> deux structures, une bisimulation entre *M* et *M'* est une relation Z sur M×M' telle que, pour tous w,w' dans M et M' :

- si wZw', alors V(w)=V(w')
- si wZw' et wRu, alors il existe un u' dans M' tel que w'R'u' et uZu'
- si wZw' et w'Ru', alors il existe un u dans M tel que wRu et uZu'

Définition 31. On dit que w et w' dans *M* et *M'* sont bisimilaires s'il existe une bisimulation Z entre les deux modèles telle que wZw'.

Définition 32. Deux modèles *M* et *M'* sont bisimilaires s'il existe une bisimulation Z entre eux telle que dom(Z)=M et ran(Z)=M' (il ne suffit pas qu'il existe une bisimulation, il faut qu'elle mette en jeu tous les éléments des deux structures).

Proposition 9 Soient *M* et *M'* deux structures, w et w' deux points dans ces structures, si w et w' sont bisimulables, alors w et w' sont modalement équivalent (vérifient les mêmes formules modales).

Remarques :

1) Attention, la réciproque n'est pas vraie (on trouve des contre-exemples lorsqu'un monde a une infinité de successeurs) : elle sera vraie seulement sur certains modèles, les modèles modalement saturés (cf par exemple [Blackburn & ali 2001], p.68)

2) Il nous reste à montrer que cette notion est la bonne pour comparer des structures modales.

1.6.5 L'ultrafiltre extension

Définition 33. **l'ultrafiltre extension ue(F)** du cadre F = <S,R> est le cadre $<S_F, R_F>$ où

- S_F est l'ensemble des ultrafiltres sur S
- $<u_1, u_2> \in R_F$ ssi md(X)$\in u_1$, pour tout X dans u_2, où les md(X) sont les éléments qui voient un des X (formellement md(X)={s∈S / il existe x dans X tel que sRx}. L'idée est claire si l'on voit les éléments de l'ultrafiltre comme des propositions et si l'on remarque que V(◊φ)=md(V(φ)).

  pour tout X ⊆ S, si {s ∈ S / pour tout s'∈S, si sRs' alors s' ∈ X} $\in u_1$ alors X $\in u_2$

Définition 34. **l'ultrafiltre extension ue(*M*)** du modèle M = < S, R, V> est le modèle $<S_F, R_F, V_F>$ où $V_F(p) = \{u / V(p) \in u\}$

Définition 35. Un ultrafiltre u sur S est dit trivial s'il existe un élément s ∈ S t.q. U est l'ultrafiltre engendré par {s} ; on le note alors u_s.

Proposition 10 la satisfaction modale est invariante par ultrafiltre extension : pour tout modèle *M*, pour toute formule modale φ, *M*, s |= φ ssi ue(*M*), u_s |= φ

Preuve : pour montrer cette invariance, on établit le lemme suivant :

pour toute formule φ et tout ultrafiltre u sur S, V(φ) ∈ u ssi ue(*M*), u |= φ

(si tel est le cas, alors *M*, s |= φ ssi s ∈ V(φ) ssi V(φ) ∈ u_s (car un ultrafiltre est clos par surensembles) ssi ue(*M*), u_s |= φ)

Le lemme se prouve par induction sur φ : pour les booléens, on utilise simplement les propriétés des ultrafiltres. Le passage délicat est de V(◊φ) à l'existence d'un u' tel que uRu' et V(φ)∈u'. On construit une base de filtre qui satisfait les propriétés attendues (ce qu'il faut montrer, c'est donc que les ensembles qui doivent être dans u' constituent une base de filtre : cette construction est la même que celle utilisée pour montrer que les ultrafiltres extensions sont modalement saturés (construire un ultrafiltre, c'est saturer le modèle de départ).

Proposition 11 la validité en un cadre est anti-préservée par ultrafiltre extension : pour tout cadre F et toute formule φ, si ue(F) |= φ alors F|= φ

La réciproque ne vaut pas : en général le passage à l'ultrafiltre détruit les propriétés de la relation (en rajoutant des relations), p.e. irréflexivité (prendre l'ultrafiltre sur les entiers avec l'ordre) ou formule de Löb.

2 Théorie de la modèle-correspondance

La théorie de la modèle-correspondance est tantôt présentée comme branche à part entière de la théorie de la correspondance [VB 1991] , tantôt comme l'analyse des implications de la traduction standard pour

- la comparaison des pouvoirs expressifs de la logique modale et de la logique du premier ordre et
- l'échange de propriétés méta-théoriques entre ces deux logiques, comme la décidabilité d'une part et la compacité d'autre part ([VB 1984], & VB, Cours Stanford 2000)

Dans cette perspective, la question fondamentale qui se pose est celle de savoir quel est le fragment de la logique du premier ordre qui correspond à la logique modale. Ceci revient à déterminer quelle est, à équivalence près, l'image par ST de la logique modale. Du même coup, on donnera une caractérisation des classes de modèle modalement définissables qui permet d'apprécier le parallélisme entre théorie des modèles modale et théorie des modèles classique.

2.1 Le théorème de caractérisation de van Benthem

On cherche à quelle condition une formule F(x) du premier ordre à une variable libre est équisatisfiable avec une formule de logique modale. L'idée centrale, c'est la notion de bisimulation qui fixe la limite du modalement discernable (en un sens, ces théorèmes montrent la pertinence de la notion de bisimulation).

Proposition 12 (van Benthem) F(x) est équivalente à la traduction d'une formule modale ssi F(x) est invariante par bisimulation

($\Rightarrow$) découle immédiatement du fait que les formules modales sont invariantes par bisimulation.

($\Leftarrow$) soit MOC_F, l'ensemble des « conséquences modales » de F (c'est-à-dire MOC(F)={G(x) / il existe φ une formule modale telle que G(x)=ST(φ) et $\models \forall x\ G(x)\varpi F(x)$}). On note TM_w le type modal d'un point w (l'ensemble des formules de IM(ST) qui sont réalisées par w).

on va montrer que MOC(F)$\models$ F(x) (ceci nous donne le résultat, par compacité et parce que l'image de ST est close par conjonction).

1) à partir d'un modèle *M* et d'un point w tel que de *M* $\models$ MOC_F (x) [w], on trouve un modele *N* et un point w' de *N* tel que *N* $\models$ TM_w (x) [w'] et *N* $\models$F(x) [w'] (si TM_w et F(x) étaient inconsistants, F(x) impliqueraient la négation d'un sous-ensemble fini de TM_w).

2) Pour conclure, nous voulons déduire *M* $\models$ F(x) [w], et pour ce faire, le seul moyen est d'utiliser la cloture par bisimulation de F(x). Par construction, nous savons que w et w' sont modalement équivalents : si la déduction de l'équivalence modale à la bisimilarité était bonne, nous pourrions conclure directement, mais ce n'est pas le cas, ce qui nous impose de faire un détour par des structures pour lesquelles cela soit le cas et sur lesquelles nous puissions lifter F(x) librement.

Un premier lemme va nous indiquer quelles structures chercher.

Lemme 1: si M et M* sont ❻-saturés, alors, si w et w* sont modalement équivalents, ils sont bisimilaires.

Ce lemme est l'exact correspondant du lemme de théorie des modèles qui nous dit que deux structures dénombrables ❻-saturés élémentairement équivalentes sont isomorphes.

Définition 36. M est ❻-saturé si toute pour tout A $\bar{}$M, tout type G(x) de L_A finiment réalisé dans M_A est réalisé dans M_A.

on utilise pour définir la relation d'équivalence modale elle-même : pour tous u dans M et u* dans M*, uZu* si et seulement si u et u* sont modalement équivalents.

il suffit alors de vérifier les conditions 2) et 3) de la définition de la bisimulation.

Allons-y pour 2) (même démonstration pour 3)) :

supposons que uZu* et uRv, on veut un v* tel que u*R*v* et v,v* modalement équivalents :

on se place dans L_{u^*} et on considère le type TM(x) = {u*Rx}4 {ST_x (φ) / φ soit une formuke modale et M |= ST_x (φ) [v]} (c'est le type modal de v). TM(x) est finiment réalisé dans M_{u^*}* (par les successeurs de u*, sinon u et u* ne seraient pas modalement équivalents), donc comme M* est ❻-saturée, TM(x) est réalisée par un élément de M_{u^*}* qui sera le v* recherchée (il sera bien modalement équivalent à v et successeur de u*).

On remarque que l'on se sert en fait d'une hypothèse plus faible que la ❻-saturation, on n'utilise que la 2-saturation de M* et pour des types dont les formules sont dans Im(ST) : cette restriction de la ❻-saturation donne un concept de saturation modale qui est suffisant pour assurer le passage de l'équivalence modale à la bisimilarité. Les ultrafiltres extensions sont modalement saturées, mais elles ne sont pas forcément ❻-saturées. Pour notre preuve, nous ne pouvions passer par des ultrafiltres extensions, car nous avons besoin de conserver, outre les formules modales, notre formule F(x).

Un second lemme, de pure théorie des modèles classiques, nous est nécessaire pour assurer le passage à des structures ❻-saturées.

Lemme 2 [d'après Chang-Keisler 6.1.1] : Soit L un langage dénombrable, *M* une L-structure et D un ultrafiltre ❻-incomplet sur un ensemble I, $M^I_{/D}$ est ❻-saturée.

Remarque :

- La restriction à L dénombrable fait écho à la restriction à des langages modaux dénombrables.

- Etant donnée une structure M, on peut obtenir l'existence d'une structure M* ❻-saturée dans laquelle plonger élémentairement M de manière plus simple en utilisant une chaine d'extensions élémentaires (chaque structure étant saturée sur la précédente, leur réunion sera la structure saturée). Mais nous aurons besoin du Lemme 2 sous cette forme pour le théorème suivant.

Ces deux lemmes nous donnent directement le résultat. On considère, par le lemme 2, deux ultrapuissances M* et N* ❻-saturées de M et N, ainsi que les plongements élémentaires canoniques f et g de M dans M* et de N dans N* :

Par le plongement élémentaire g, N* réalise F(x) avec g(w').

Par les plongements élémentaires, f(w) et g(w) sont modalement équivalents, donc, par le lemme 1, comme M* et N* sont ❻-saturées, bisimilaires.

Par hypothèse F(x) est invariante par bisimulation, donc M* réalise F(x) avec f(w).

Par le plongement élémentaire, M réalise F(x) avec w. CQFD.

2.2 Définissabilité modale des classes de modèle

On peut également utiliser dans le même esprit la notion de bisimulation pour obtenir, en réponse à la seconde question posée, une caractérisation algébrique des classes de modèles modalement définissables (plus précisément nous allons considérer des modèles pointés, c'est-à-dire des structures augmentées d'un paramètre indiquant où l'on souhaite évaluer les formules modales).

Proposition 13 Soit K une classe de modèles, K est modalement définissable par un ensemble de formules modales ssi K est clos par bisimulation et ultraproduits et K^C est clos par ultrapuissances.

Commentaire : Il s'agit de l'exact analogue du théorème de caractérisation des classes élémentaire au premier ordre (en remplaçant isomorphisme par bisimulation) :

Soit K une classe de modèles, K est élémentaire ssi K est clos par isomorphisme et ultraproduits et K^C est clos par ultrapuissances.

Ceci illustre le parallèle entre la notion d'isomorphisme et la notion de bisimulation. L'implication de gauche à droite est immédiate. Moyennant le théorème de caractérisation des classes élémentaires, on obtient directement l'implication de droite à gauche[2].

Mais on peut prouver la proposition 13 directement, de manière tout-à-fait parallèle à la preuve pour le premier ordre[3]. La démonstration se fait en deux temps :

---

[2] On utilise premièrement, le fait que la cloture par bisimulation implique la cloture par isomorphisme (ce qui nous place dans les conditions du théorème de caractérisation) et deuxièmement la proposition 12 (étendue aux ensembles de formules).

[3] Au premier ordre, la démonstration est compliquée par des questions de cardinalité. Pour un langage de cardinal $\aleph$ et deux structures M,N de cardinal au plus $\aleph+1$, on obtient des ultrapuissances M*, N* $\aleph+1$ saturées de cardinal $2^{\aleph}$. Si M,N sont élémentairement équivalentes, M* et N* aussi, et, modulo HGC ($2^{\aleph}=\aleph+1$), on obtient (via le théorème d'unicité pour les modèles $\aleph$-saturés de cardinal

1) on commence par montrer que K est clos pour l'équivalence modale. Ceci correspond à l'utilisation du théorème de Keisler-Shelah pour montrer la cloture par équivalence élémentaire.

Supposons le contraire. On a M,w dans K et M',w' dans K^C modalement équivalents. Comme dans la démonstration de la proposition 12, on se ramène à des ultrapuissances ❻-saturées N,f(w) et N',g(w') dans lesquels M et M' se plongent élémentairement par f et g. N,f(w) et N',g(w') sont modalement équivalentes et ❻-saturées donc bisimilaires. Or N,f(w) est dans K et N',g(w') dans K^C. Contradiction.

2) la deuxième partie est exactement analogue à la démonstration pour le premier ordre, en remplacant Th(K) par ThM(K) (la théorie modale des paramètres des modèles paramétrés de K).

On suppose que M,w |= ThM(K). On veut montrer que M,w est dans K.

On pose I=TM_w. On obtient une famille d'ensemble $(\langle U,u\rangle_i)_{i\in I}$ en choisissant pour chaque G(x) un U,u dans K qui réalise G(x) (il y en a sinon la négation de G(x) serait dans ThM(K)). I, ordonné par l'implication, est filtrant à droite (parce que TM_w est clos par conjonction), donc l'ensemble des segments terminaux de I constitue une base de filtre. On vérifie alors que $\langle A,a\rangle$ l'ultraproduit de la famille des $\langle U,u\rangle_i$ réalise TM_w avec a. CQFD.

On construit via des ultrapuissances U_i basés sur I=TM_w, on le considère comme ensemble ordonné par l'implication, en tant que tel, il est filtrant, l'ensemble des sous-ensembles finis

2.3 A quoi sert la modèle-correspondance ?

2.3.1 Logique temporelle

Le calcul propositionnel fournit les résultats les plus simples d'interdéfinissabilité et de complétude expressive des connecteurs ; peut-on formuler des questions analogues, et trouve-t-on les mêmes réponses, dans les logiques modales ? La logique temporelle est le domaine où l'investigation de ces interrogations a été la plus systématique.

Cette section est basée sur [Burgess 1984], [Gabbay & ali 1994] et [Blackburn & ali 2001], 7.2

Interdéfinissabilité des modalités

Du point de vue de l'interdéfinissabilité des modalités, la théorie de la modèle-correspondance n'est que le prolongement systématique de questions tout à fait naturelles, qui surgissent en logique modale et dans ses applications : si les conditions qui rendent un énoncé du type "il a été vrai que…" sont

---

$\aleph_0$) que M* et N* sont isomorphes. Dans le cas modal, la cardinalité des structures ne pose pas de problème, car pour la bisimilarité, on a toujours besoin seulement la 2-saturation. Si on travaille avec des langages modaux non dénombrables, on n'aura toujours besoin seulement de la 2-saturation, mais il faudra imposer des conditions plus complexes sur le filtre pour l'obtenir.

déterminées, celles d'un énoncé du type "il est vrai… que jusqu'à ce que…" peuvent-elles l'être à partir des premières ?

Définition 37. l'alphabet d'un langage temporel propositionnel LPF(*At*) est la donnée

- d'un ensemble de formules atomiques : $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$
- d'un ensemble de connecteurs propositionnels : $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \neg\}$
- d'un ensemble d'opérateurs modaux {P, F}

Définition 38. l'ensemble des formules d'un langage temporel propositionnel LPF(*At*), noté FORM(LPF*At*)), est l'ensemble tel que

- les éléments de *At* sont des formules de L(*At*)
- si φ est une formule, alors $\neg\varphi$ aussi
- si φ et ψ sont des formules, alors $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$ et $\varphi\leftrightarrow\psi$ sont des formules
- si φ est une formule alors P φ et Fφ sont des formules
- seules les expressions engendrées par un nombre fini d'applications de (i)-(iv) sont des formules

On note U(φ, ψ) le connecteur dont la signification attendue est : "φ est vraie jusqu'à ce que ψ". On peut exprimer ceci dans le métalangage par un schéma de formules du premier ordre ; la question est de savoir si l'on peut trouver un schéma de formule modal qui lui soit localement modèle-équivalent. Prenons comme langage le langage modal de base, LPF, qui contient les opérateurs P (il a été vrai que) et F (il sera vrai que) ; un résultat bien connu tient dans la

Proposition 14 L'opérateur binaire de modalité U n'est pas définissable dans LPF

Preuve : il suffit de trouver deux modèles qui soient en bisimulation temporelle mais qui ne seraient pas équivalents pour un langage contenant U, avec l'interprétation attendue ; on en trouve un dans [Blackburn & ali 2001]

Complétude expressive des modalités

On va se servir du langage de correspondance de manière systématique pour donner un analogue à la complétude expressive du calcul propositionnel : puisque la traduction standard nous donne des formules du premier ordre à une variable libre, la complétude expressive va se définir de la façon suivante :

Définition 39. soient

- L* un langage modal
- φ (x, $P_1, \ldots, P_n$) une formule de $L^*_1(At)$ où x est une variable libre et $P_1, \ldots, P_n$ sont des symboles de prédicats
- ***M*** une classe de modèles pour L*;

on dit que L* est expressivement complet sur $\boldsymbol{M}$ s'il existe une formule ψ de L* telle que pour tout $M \in \boldsymbol{M}$, $s \in M$, $(M, s) \models \psi$ ssi $M \models \varphi([s], P_1, \ldots, P_n)$.

Proposition 15 LPF n'est pas expressivement complet sur la classe de tous les modèles.

Définition 40. l'alphabet d'un langage temporel propositionnel LSU(*At*) est la donnée

- d'un ensemble de formules atomiques : $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$
- d'un ensemble de connecteurs propositionnels : $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \neg\}$
- d'un ensemble d'opérateurs modaux {S, U}

Définition 41. un cadre <S, R> est Dedekind-complet ssi R est une relation totale et telle que tout sous-ensemble majorée possède une borne supérieure

Proposition 16 **(Kamp 1968)** LSU est expressivement complet sur la classe des modèles basé sur les cadres Dedekind-complets

Preuve : on trouve les grandes lignes d'une version due à Gabbay dans [Burgess 1983] et [Gabbay & ali 1994] ; elle s'appuie sur la propriété dite de séparation de LSU sur cette classe de modèles.

Définition 42. la formule φ d'un langage temporel L* est purement passée (resp. purement future / purement présente) si pour tous modèles $M_1 = \langle S, R, V_1\rangle$ et $M_2 = \langle S, R, V_2\rangle$ et $x \in S$, dès que V_1 et V_2 s'accordent sur le passé (resp. le futur/ le présent) c'est-à-dire dès que $V_1(p_i) \cap \{y / yRx\} = V_2(p_i) \cap \{y / yRx\}$ (resp. $V_1(p_i) \cap \{y / xRy\} = V_2(p_i) \cap \{y / xRy\}$/ $V_1(p_i) \cap \{x\} = V_2(p_i) \cap \{x\}$) , alors $x \in V_1(\varphi)$ ssi $x \in V_2(\varphi)$

Définition 43. la formule φ d'un langage temporel L* est pure si elle est purement passée ou purement présente ou purement future

Exemples :

- Fp est purement future
- Pp est purement passée
- p est purement présente
- $F(p \wedge Hq)$ n'est pas pure

Définition 44. un langage temporel L* a la **propriété de séparation** sur la classe de modèles $\boldsymbol{M}$ si pour toute formule φ de L* il existe une formule ψ composée par les connecteurs propositionnels à partir de formules pures telle que pour tout $M \in \boldsymbol{M}$ et $s \in M$, $(M,s) \models \varphi \leftrightarrow \psi$

Proposition 17 LSU a la propriété de séparation sur la classe des modèles basé sur les cadres Dedekind-complets

Preuve : [Gabbay & ali 1994], pp. 375-391. Nous ne détaillerons pas le genre de preuve mise en œuvre pour montrer une telle propriété, il est évidemment particulièrement laborieux : il s'agit de trouver un certain ensemble d'équivalences sur la classe de modèles en question, qui permettent de "désenchâsser" systématiquement les opérateurs S et U.

Définition 45. un langage temporel L* est fort sur la classe de modèles ***M*** si F et P sont définissables dans L* sur ***M***.

Proposition 18 soient ***M*** une classe de modèles basés sur des cadres totalement ordonnés, L* un langage temporel ; si L* est fort sur ***M*** et a la propriété de séparation sur ***M***, alors L* est expressivement complet sur ***M***.

Preuve : soit $\varphi(x)$ une formule quelconque de $L_1*(At)$; on montre par induction sur le degré d'emboîtement des quantificateurs de $\varphi(x)$ l'existence d'une formule ξ de L* qui lui est équivalente sur ***M***.

- $\varphi(x)$ est sans quantificateur ; si l'on remplace toutes les occurrences de x = x par T, celles de x R x par $\perp$ les $P_i(x)$ par les p_i, on obtient une formule ξ.
- $\varphi := \exists y\ \psi(x, y, P_1, \ldots, P_n)$, où le degré d'emboîtement des quantificateurs de ψ ne dépasse pas n. On remplace les sous-formules atomiques

  x = x par T

  xRx par $\perp$

  x = z par $Q°(z)$

  xRz par $Q^+(z)$

  zRx par $Q^-(z)$

et alors x n'apparaît plus que dans des sous-formules de la forme $P_i(x)$ dans la formule résultante $\psi^x{}_0(y, P_1, \ldots, P_n, Q°, Q^+, Q^-)$. On peut elle-même la réécrire en la formule équivalente :

$$\psi^* = \bigcup_j \ (\alpha_j(x) \wedge \psi^*_j\ (y, P_1, \ldots, P_n, Q°, Q^+, Q^-))$$ où les $P_i(x)$ n'apparaissent que dans les $\alpha_j(x)$.

On va "modaliser" séparément les α_j et les ψ^*_j. Par hypothèse d'induction, pour chaque formule ψ^*_j il existe une formule modale $A_j \in L^* (At \cup \{q°, q^+, q^-\})$ équivalente. Restent encore les α_j ; on remplace simplement les $P_i(x)$ par les variables propositionnelles p_i , ce qui donne $M(\alpha_j)$. On obtient alors

$$M(\psi^*) = \bigcup_j \ (M(\alpha_j) \wedge A_j)$$

qui est équivalente à ψ^* dans le langage $L^* (At \cup \{q°, q^+, q^-\})$. Il reste donc deux problèmes : trouver une formule équivalente à φ (et non plus seulement à ψ) donc trouver une assignation pour laquelle ψ est vraie et revenir de $L^* (At \cup \{q°, q^+, q^-\})$ à L*(*At*). Un langage fort est un langage dont les modalités de base permettent de former pour toute proposition λ une proposition équivalente à $F\lambda \vee \lambda \vee P\lambda$; ce qui revient à dire, puisque l'on est dans la classe des modèles totalement ordonnés, qu'*il existe* un monde où λ est vraie. Posons alors

$$B = \bigcup_j \ (M(\alpha_j) \wedge (FA_j \vee A_j \vee PA_j))$$

où FA_j (resp. PA_j) sont des formules équivalentes à celles que l'on peut former dans le langage LFP ; elles existent par hypothèse puisque L* est fort sur ***M***. On vérifie alors que, par le jeu d'équivalences élémentaires, pour tout *M* = <S, R, V>,

$(M,s) \models B$ ssi $M \models \exists y\ \psi^{x}_{0}\ (y, V(p_1), \ldots, V(p_n), V(q°), V(q^+), V(q^-))$

et pour tout $M' = \langle S, R, V' \rangle$ où

- $V'(q) = \{x\}$
- $V'(q^+) = \{y \ / \ xRy\}$
- $V'(q^-) = \{y \ / \ yRx\}$

$(M',s) \models B$ ssi $M' \models \exists y\ \psi\ (y, V(p_1), \ldots, V(p_n))$

Pour éliminer les variables q, q^+,q^-, on va faire usage de la dernière hypothèse ie la propriété de séparation de L* : B est équivalente à une combinaison booléenne Boo de formules pures. On vérifie que l'on peut éliminer les variables gênantes de Boo en conservant l'équivalence, de la manière suivante, pour toute sous-formule pure SBoo de Boo :

- si SBoo est pure passée, on remplace q^- par T, les autres par $\perp$
- si SBoo est pure future, on remplace q^+ par T, les autres par $\perp$
- si SBoo est atomique (pure présente), on remplace q° par T, les autres par $\perp$

On obtient alors une formule B* de L* équivalente à φ. ۩

2.3.2 Logique épistémique

En logique épistémique, le point intéressant la modèle-correspondance concerne la logique multi-épistémique et plus précisément les opérateurs collectifs comme la connaissance partagée, la connaissance distribuée ou la connaissance commune ; la formalisation de cette dernière notion en particulier, a toujours soulevé des problèmes d'axiomatisabilité et de définissabilité.

La connaissance commune

L'opérateur collectif élémentaire est celui de connaissance partagée par un groupe de n agents : une proposition est de connaissance partagé dans un groupe G ssi elle est connue par tous les agents de G. On peut définir sémantiquement :

$$(M,s) \models P^1_G\ \varphi \text{ ssi } (M,s) \models K_i\varphi, \text{ pour tout } i \in G \text{ ssi } (M,t) \models \varphi \text{ pour tout t tel que } (s,t) \in \bigcup_{i \in G} B_i.$$

La question de la définissabilité de P^1 ne pose guère de problème si le nombre d'agents est fini : c'est la simple conjonction des différents opérateurs individuels.

La connaissance commune, rendue célèbre par Convention de D.Lewis, est en général d'abord caractérisée en termes itératifs : la connaissance commune d'une proposition est le fait que tous les agents la connaissent, tous les agents savent qu'ils la connaissent, tous les agents savent que tous les agents savent que tous les agents la connaissent…Si l'on suit scrupuleusement cette approche, on peut alors définir la connaissance commune en se servant de la notion de connaissance partagée d'ordre k, définie récursivement à partir de la connaissance partagée :

$(M,s) \models P^k\varphi$ ssi $\forall i \in G$, $(M, s) \models B_i P^{k-1}\varphi$

et alors la notion de connaissance commune se définit comme

$(M,s) \models C\varphi$ ssi $(M,s) \models P^k\varphi$ pour tout $k \in N$

Il est clair que la notion de connaissance partagée d'ordre k est définissable pour un nombre fini d'agents ; par contre, cette approche laisse voir le caractère *infinitaire* de la connaissance commune. Une définition syntaxique de la notion du genre $C_G\, \varphi \leftrightarrow P_G\varphi \wedge P_GP_G\varphi \wedge P_GP_GP_G\, \varphi\ldots$, qui calquerait cette interprétation de l'opérateur, exigerait un langage autorisant des conjonctions dénombrables. La théorie de la modèle-correspondance nous permet de prouver que même si l'on abandonne l'espoir de calquer cette interprétation, la notion de connaissance commune n'est pas définissable dans $L_n(At)$ – par contre, en l'abandonnant et en adoptant une approche en termes de point fixe, on peut obtenir l'axiomatisabilité. Il faut tout d'abord remarque que

Définition 46. Soit $R_1, .., R_n$ un ensemble de relations sur un même domaine S ; on définit la **clôture universelle** R_U des R_i comme la clôture transitive de $\bigcup_{i\in G} R_i$ c'est-à-dire : s R_U s' ssi il existe n > 1et une suite d'états $s_1,\ldots,s_n \in S$ telle que $s_1 = s$ et $s_n = s'$ et $s_i \bigcup_{i\in G} R_i\ s_{i+1}$, $1\leq i\leq n-1$

Proposition 19 $(M,s) \models C\varphi$ ssi $\forall$ t t.q. $(s,t) \in R_U$ $(M,t) \models \varphi$

Proposition 20 L'opérateur unaire C de connaissance commune n'est pas définissable dans L_n

Preuve : on généralise de manière évidente le langage de correspondance pour la logique modale multi-modale ; le point crucial est que la notion de clôture transitive n'est pas définissable dans un langage du premier ordre ; en particulier elle n'est pas définissable dans le langage de correspondance de Ln, $Ln_1(At)$. Or, si C était définissable dans Ln, il serait modèle-définissable dans $Ln_1(At)$; donc C n'est pas définissable dans Ln. ۞

Qu'advient-il de la modèle-correspondance et de la traduction standard pour une logique multi-épistémique qui contient un opérateur de connaissance commune ? Il est clair que si l'on veut conserver les bonnes propriétés qu'a la traduction standard dans le cas des modalités classiques, les résultats précédents interdisent que le langage-cible soit un langage du premier ordre (finitaire). La manière la plus directe de procéder est de prendre comme langage-cible un langage du premier ordre infinitaire ; en fait, on peut adapter des résultats de la Logique Dynamique (PDL) qui comporte un opérateur de clôture transitive et réflexive, comme il est d'usage en logique épistémique depuis les premiers travaux de Halpern, Fagin & ali[4]. On va alors traduire l'opérateur de connaissance commune par une disjonction infinie.

---

[4] par exemple, l'axiomatisation de langages avec opérateur de connaissance commune et les preuves de complétude corrélées sont une adaptation des travaux de Rohit Parikh en PDL.

Définition 47. soit $\varphi \in$ PROP(LnC(At)) ; on définit inductivement **la traduction standard pour la connaissance commune** STC_x de φ pour la variable d'individus x :

- $STC_x(p_n) = P_n x$
- $STC_x(\varphi \circ \psi) = STC_x(\varphi) \circ STC_x(\psi)$
- $STC_x(\neg\varphi) = \neg STC_x(\varphi)$
- $STC_x(B_i \varphi) = \forall y\, (xR_i\, y \to STC_y(\varphi))$ où y est une nouvelle variable
- $STC_x(C\varphi) = \forall y\, ((\bigcup_{k \in N} \exists z_1 \ldots \exists z_k (z_1 = x \wedge z_k = y \wedge \prod_{i=1}^{k-1} (z_i R_1 z_{i+1} \vee \ldots \vee z_i R_n z_{i+1}))) \to STC_y(\varphi))$

et alors on peut récupérer la

Proposition 21 soient, M = <S, R, V> un modèle, $\varphi \in$ PROP(LnC(At)) et $p_1, \ldots, p_n$ les variables propositionnelles apparaissant dans φ ; alors

$$(M, s) \models \varphi \text{ ssi } M \models STC_x(\varphi)\, [s]$$

La connaissance distribuée

L'opérateur de connaissance distribuée se construit de façon très naturelle du point de vue d'une interprétation épistémique de la sémantique de Kripke : si la connaissance de chaque agent, c'est l'ensemble des états de choses possibles qu'il exclut, alors pour un groupe d'agent donné, on peut former la connaissance qu'ils pourraient obtenir en mettant leurs informations en commun, en excluant tous les états de choses qu'un agent au moins exclut. La relation d'accessibilité associée n'est alors rien d'autre que l'intersection des relations d'accessibilité des membres du groupe.

Définition 48. soit M un modèle multi-épistémique de Kripke, $s \in S$ $(M,s) \models D\varphi$ ssi $(M,t) \models \varphi$ pour tout t tel que $(s,t) \in \bigcap_{i \in G} Bi$

Il résulte immédiatement de la définition que si une proposition est connue par un des agents, alors elle est de connaissance distribuée dans n'importe quel groupe auquel il appartient. Mais la connaissance distribuée n'est pas la simple somme des connaissances des agents ; elle contient en outre la clôture logique de ces connaissances. Si l'agent 1 du groupe G = {1, 2} sait que $\varphi \to \psi$, et l'agent 2 sait que φ, alors il sera de connaissance distribuée dans G que ψ est le cas. Une proposition peut donc être de connaissance distribuée dans un groupe sans qu'aucun de ses membres ne la connaisse ; cela appelle quelques clarifications sur la signification exacte de cet opérateur. En fait, si l'on adhère moins étroitement à l'esprit de la sémantique de Kripke, la notion de connaissance distribuée n'a pas la clarté conceptuelle dont elle semble jouir à première vue :

Définition 49. la connaissance distribuée a souvent été interprétée comme le résultat d'une communication totale et idéale d'un groupe d'agents, et c'est pour cette raison que l'opérateur intéresse la théorie de la communication ; il est cependant clair que cette vue est erronée puisque la connaissance distribuée ne prend pas en compte les changements méta-épistémiques induits par la communication. C'est la raison pour laquelle on développe un opérateur voisin, l'opérateur de connaissance *combinée* [Gerbrandy 1998], sect.3.4, qui valide l'axiome suivant : φ est de connaissance combinée dans un groupe G ssi il est de connaissance combinée que φ est de connaissance commune dans ce groupe. Une meilleure caractérisation de la connaissance distribuée est alors : φ est de connaissance distribuée dans un groupe G si un modélisateur de G qui n'a d'autres informations que celles des membres de G sait que φ

Définition 50. mais interpréter la connaissance distribuée comme strictement équivalente à la clôture sous la conséquence logique de la somme des connaissances des agents d'un groupe est encore inexact. [Hoek & ali 1995] montrent que ce n'est pas le cas : on peut trouver des modèles où une proposition est de connaissance distribuée sans qu'elle soit conséquence de la somme des connaissances des agents. Par contre, la réciproque est fausse : tout ce qui se laisse déduire des connaissances des agents d'un groupe est de connaissance distribuée dans ce groupe. En fait, on montre que l'on peut faire équivaloir les deux notions dans certaines classes de modèle [Gerbrandy 1998], p.59

Malgré ces difficultés d'analyse, l'opérateur de connaissance distribuée *n'est pas définissable* en termes des opérateurs individuels ; on le montre très facilement par généralisation de la notion de bisimulation.

Définition 51. Soient $\mathcal{M}=\langle M, B_1, \ldots, B_n, V\rangle$ et $\mathcal{M}'=\langle M', B_1', \ldots, B_n', V'\rangle$ deux modèles de Kripke pour un groupe G de n agents ; une G-bisimulation entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ est une relation Z sur M×M' telle que, pour tous w,w' dans M et M' :

- si wZw', alors pour tout $p_i \in At$, $V(p_i) \in w$ ssi $V'(p_i) \in w'$
- si wZw' et wB_iu, alors il existe un u' dans M' tel que $w'B_i'u'$ et uZu'
- si wZw' et $w'B_i'u'$, alors il existe un u dans M tel que wB_iu et uZu'

Proposition 22 L'opérateur de connaissance distribuée n'est pas définissable

Preuve : Soient les modèles suivants pour G = {1, 2}

$\mathcal{M} = \langle S = \{s_1, s_2, s_3\}, B_1 = \{\langle s_1, s_2\rangle\}, B_2 = \{\langle s_1, s_3\rangle\}, V(p) = \{s_2, s_3\}\rangle$

$\mathcal{M}' = \langle S' = \{s_1', s^*\}, B_1' = \{\langle s_1, s^*\rangle\}, B_2' = \{\langle s_1, s^*\rangle\}, V(p) = \{s^*\}\rangle$

La relation $Z = \{\langle s_1, s_1'\rangle, \langle s_2, s^*\rangle, \langle s_3, s^*\rangle\}$ est une bisimulation ; on voit qu'en s_1 aucun monde n'appartient à l'intersection des B_i donc $(\mathcal{M}, s_1) \models D\varphi$ pour toute formule φ ; par contre $(\mathcal{M}', s_1') \not\models D\neg p$.

Question Est-ce que la restriction de la connaissance distribuée aux propositions qui sont conséquences des informations des agents est définissable ?

3 Théorie de la cadre-correspondance

3.1 Correspondance et logique du second ordre

La traduction standard nous donne une correspondance naturelle entre la logique modale et la logique du second ordre, plus précisément le fragment universel de la logique du second ordre ; ceci n'a rien d'étonnant : dans la mesure où les différences de valuations sont rendues dans la traduction standard par différentes interprétations des prédicats unaires, et dans la mesure où la validité dans un cadre se définit comme la vérité dans un modèle pour toute valuation possible, alors il est naturel que toute formule modale soit CL_2-définissable par la clôture universelle au second ordre de sa traduction standard.

Définition 52. L'ensemble des formules φ de $L_2(At)$ de la forme $\forall P_1 \ldots \forall P_n\ \psi$ où ψ est une formule du premier ordre, les P_i des variables de prédicat est appelé le fragment $\prod_1^1$ de $L_2(At)$

Face au phénomène de la cadre-correspondance, le réflexe naturel est de dire : "ah oui, ce n'est pas étonnant puisque la clause de satisfaction des opérateurs modaux est une quantification restreinte" ; en réalité, c'est précisément parce que la clause de satisfaction utilise la quantification restreinte au premier ordre qu'il est étonnant que des formules qui définissent des classes de cadre aient des correspondants au premier ordre.

Ainsi, l'axiome T : $\Box p \to p$ *est cadre-définissable par la formule :* $\forall P \forall x\ (\forall y\ (xRy \to Py) \to Px))$ *; pourquoi l'est-il donc également par la formule, plus simple et d'ordre inférieur,* $\forall x\ xRx$ *?*

Avant de répondre à cette question, et donc de se focaliser sur les rapports entre définissabilité en logique modale et du premier ordre, notons que la correspondance avec la logique du second-ordre, qui a fait dire à Thomason que la logique modale n'est rien d'autre qu'un "fragment assez fort de la logique du second ordre", a des applications tout à fait intéressantes.

Par exemple, entre le milieu des années 1970 et le milieu des années 1980, de nombreux résultats de *décidabilité* ont été obtenus en logique modale temporelle (Gabbay, Burgess, Gurevich) : dès que le fragment $\prod_1^1$ (ou tout simplement sa partie monadique) a une propriété de décidabilité pour la validité sur une certaine classe de cadre, elle s'applique à toute logique modale sur la même classe de cadre. On trouve un panorama assez complet dans [Gabbay & ali 1994]

3.2 A quelles conditions une formule modale est-elle cadre-définissable au premier ordre ?

3.2.1 Arguments négatifs

Proposition 23 Toute formule modale n'est pas CL_0-définissable

De quelles méthodes dispose-t-on pour trouver des contre-exemples ? En général, on s'appuie sur des propriétés du premier ordre (compacité, L-Skolem, préservations) et on montre qu'elles ne sont pas respectées par la classe de cadres que définit la formule modale.

Argument par la compacité : la formule de Lob $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ n'est pas CL_0-définissable

Preuve : d'abord on montre que la formule définit la classe des cadres qui sont transitifs et dont la converse de la relation d'accessibilité est bien-fondée (il n'existe pas de séquence ascendante infinie d'éléments du cadre reliés par la relation d'accessibilité). Ensuite on montre que cette propriété n'est pas élémentairement définissable : soit χ la formule qui définirait une telle propriété ; alors tout sous-ensemble fini de $\Sigma = \{\chi\} \cup \{\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz\} \cup \{\sigma_n / \sigma_n(x_0, \ldots, x_n) := \prod_{0 \leq i \leq n-1} Rx_i x_{i+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ est satisfiable mais clairement Σ ne l'est pas

Argument par Lowenheim-Skolem : la formule de McKinsey $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ n'est pas CL_0-définissable.

Preuve : soit le cadre non dénombrable $C = \langle S, R \rangle$ où

- $S = \{w\} \cup \{s_n, s_{(n,i)} / n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\} \cup \{z_f / f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$
- $R = \{\langle w, s_n\rangle, \langle s_n, s_{(n,i)}\rangle, \langle s_{(n,i)}, s_{(n,i)}\rangle / n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\} \cup \{\langle w, z_f\rangle, \langle z_f, s_{(n, f(n))}\rangle / n \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$

On vérifie d'abord que ce cadre valide bien la formule de Mc Kinsey :

- un monde du type $s_{(n,i)}$ n'a accès qu'à lui-même donc il vérifie l'axiome
- un monde du type s_n n'a accès qu'aux mondes $s_{(n,i)}$, lesquels n'ont accès qu'à eux-mêmes, donc l'axiome est validé
- un monde du type z_f n'a accès qu'à des mondes du type $s_{(n, f(n))}$; donc vérifie aussi l'axiome
- supposons qu'une valuation V satisfasse $\Box\Diamond p$ en w ; alors $\Diamond p$ est vraie en tous les mondes s_n et z_f ; pour tout s_n, p est donc vraie en $s_{(n,0)}$ ou en $s_{(n,1)}$. On peut choisir une fonction f telle que pour tout n, p est vraie en $s_{(n, f(n))}$, c'est-à-dire une fonction qui

choisit le "bon" $i \in \{0, 1\}$; alors, il existe bien un monde, z_f, à partir duquel tout monde accessible vérifie p. Donc la valuation V vérifie aussi $\Diamond\Box p$.

Par le théorème de Lowenheim-Skolem descendant, il doit exister un sous-cadre de C' de C, élémentairement équivalent à C, qui contient au moins w, les s_n et les $s_{(n, i)}$ et qui est dénombrable. Donc il existe des états z_f de C qui ne sont plus dans le domaine de C'. Comme C' est un sous-cadre élémentaire de C, il doit valider également l'axiome de Mc Kinsey. Soit en effet V' une valuation sur C' telle que la proposition p soit vraie en $s_{(n,g(n))}$ (et en ces états seulement) où g est une fonction telle que z_f n'est pas dans C. En w, il est faux que $\Diamond\Box p$: $\Box p$ est évidemment faux dans les s_n; $\Box p$ est aussi faux dans les z_f car toutes les fonctions f sont distinctes de la fonction g, la seule qui pourrait rendre $\Box p$ vrai. Par contre, $\Box\Diamond p$ est vrai en w ; $\Diamond p$ est évidemment vrai dans les s_n ; $\Diamond p$ serait faux en un certain z_f si la fonction f prenait systématiquement les valeurs opposées à celles de g. Mais alors il existerait une formule du diagramme élémentaire de C' (celle qui dit précisément que f et g prennent des valeurs systématiquement opposées) qui serait fausse en C, ce qui est exclu. Donc pour toute fonction f telle que z_f appartient à C', il existe un argument pour lequel elle converge avec g ; donc pour tout z_f, il existe un point accessible tel que p est vrai. Donc en tout point accessible depuis w, $\Diamond p$ est vrai.

3.2.2 Caractérisation générale

Peut-on parvenir à une caractérisation générale des formules modales qui sont cadre-définissables ? La réponse est positive et elle est exprimée par la

Proposition 24 Une formule modale φ est CGL_0-définissable ssi elle est préservée par utraproduits

Commentaire : l'idée de base est relativement simple et elle a un intérêt méthodologique : ce théorème utilise une propriété du fragment universel du second ordre :

Proposition 25 soit φ un énoncé $\prod_1^1$; φ est définissable par un énoncé du premier ordre ssi φ est préservé par ultraproduits (Van Benthem & Doets, p. 302)

Preuve :

Définition 53. soit $\mathbf{C_i}$ une famille de cadre et U un ultrafiltre sur I ; l'ultraproduit $\Pi_U\mathbf{C_i}$ est le cadre <S, R> défini par

- S est l'ensemble des classes d'équivalence des produits des C_i par la relation suivante : f = g ssi $\{i \in I / f(i) = g(i)\} \in U$
- $R \subseteq S \times S$ est l'ensemble des couples <[[f]], [[g]]> tels que $\{i \in I / R_i f(i)g(i)\} \in U$

On a alors les résultats classiques de théorie des modèles :

Proposition 26 (**Théorème de Los)** Soit $\mathbf{C_i}$ une famille de cadre, U un ultrafiltre sur I et φ (x_1, …,x_n) une formule du premier ordre ; alors pour tous éléments $[[f_1]]$, …,$[[f_n]]$ de S, $\Pi_U \mathbf{C_i} \models \varphi([[f_1]], \ldots [[f_n]])$ ssi $\{i \in I / C_i \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_2(i))\} \in U$

Proposition 27 toute formule du premier ordre est préservée par ultraproduits : si pour tout $i \in I$, $C_i \models \varphi$, alors $\Pi_U \mathbf{C_i} \models \varphi$

Les Propositions précédentes montrent donc (⇒). Pour passer à (⇐), il nous faut un autre "grand résultat" de théorie des modèles :

Proposition 28 (**Théorème de Keisler**) Une classe de cadre **C** est définissable par une formule du premier ordre ssi elle et son complémentaire sont clos par ultraproduits et isomorphismes

Preuve : [Chang & Keisler, 6.1, corollaire 6.1.16]

Il suffit donc de montrer que pour toute formule φ $\prod_1^1$ préservée par ultraproduits, sa négation est aussi préservée par ultraproduits, et que toutes les deux sont préservées par isomorphisme. La négation de φ est une formule $\sum_1^1$; or d'après [Chang & Keisler], Corollaire 4.1.14, toute formule $\sum_1^1$ est préservée par ultraproduits (c'est une conséquence quasi immédiate du Théorème de Los puisqu'une formule $\sum_1^1$ est satisfaite dans un modèle ssi elle est satisfaite pour au moins une instantiation des symboles de variables de prédicat, donc si elle est satisfaite dans une expansion adéquate de ce modèle. Il suffit de remarquer (*ibid.*, Théorème 4.1.8) que, pour un filtre donné, le produit réduit des expansions d'une famille de structures est une expansion du produit réduit de ces structures). En outre, toute formule d'ordre supérieur est préservée par isomorphisme.

Notons que cette Proposition peut être améliorée en la

Proposition 29 Une formule modale φ est CGL_0-définissable ssi elle est préservée par utrapuissances ssi elle est préservée par équivalence élémentaire [VB 1983, 8.6]

Preuve : dans ses grandes lignes, elle s'appuie sur le corollaire d'un théorème de Goldblatt selon lequel une classe de cadre close par sous-cadre engendré, union disjointe, isomorphisme et ultrapuissances est close par ultraproduits. φ est une formule modale donc si elle est en outre préservée par ultrapuissances, alors la classe de cadres qu'elle définit est close par ultraproduits donc φ est préservée par ultraproduits.

Remarque : c'est une réelle amélioration puisque ceci ne vaut pas pour tout le fragment $\prod_1^1$ où il est possible qu'une formule soit préservée par ultrapuissance sans l'être par équivalence élémentaire.

3.3 A quelles conditions peut-on construire effectivement une formule cadre-L_0-correspondante à une formule modale ?

"With Hendrik Sahlqvist's classical paper the theory [of correspondence] reached a certain climax. There have been attempts to strengthen this theorem, but without success. It still stands as *the* results in correspondence theory" [Kracht 1999], p.231

Les résultats généraux de la section précédente sont assez impressionnants ; leur inconvénient est cependant double : d'une part ils ne nous disent rien de l'allure que peuvent avoir les formules définissables au premier ordre, d'autre part ils ne nous donnent aucun algorithme pour les définir effectivement, c'est-à-dire pour leur trouver un correspondant. C'est pourtant quelque chose qui intéresse au plus haut point un utilisateur "ordinaire" de la sémantique de Kripke, qui part de principes logiques et qui voudrait savoir quelles propriétés de la relation d'accessibilité lui correspondent. Un résultat récent montre que ces questions sont pour le moins difficiles :

Proposition 30 **(Théorème de Chagrova, 1991)** La question de savoir si une formule modale donnée est CL_0-définissable est indécidable

Corollaire : aucun ensemble récursif de formules modales L_0-définissable ne contient toutes les formules L_0-définissables.

Cependant, on dispose de réponses partielles à la question, établies par Goldblatt, Van Benthem et Sahlqvist au milieu des années 1970.

3.3.1 Idée intuitive de l'algorithme de Sahlqvist-Van Benthem

L'algorithme de Sahlqvist-Van Benthem est une méthode qui permet de construire les correspondants du premier ordre d'une certaine classe de formules modales. L'idée de base est la généralisation d'une heuristique qu'on utilise naturellement quand on vérifie des résultats de correspondance classique. Dans la démonstration d'un tel résultat, la partie la plus difficile est le sens $L \Rightarrow L_0$. On peut le démontrer indirectement, ou bien procéder de la façon suivante :

1) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ // transitivité de R : réfléchissons en termes de *valuation minimale* : la valuation minimale qui rend l'antécédent de l'axiome vrai est celle qui rend vraie p dans les mondes accessibles depuis x ; puisque l'axiome est supposé valide dans tous les cadres, cette valuation doit le satisfaire. Cela implique qu'en tous les mondes accessibles en deux étapes depuis x, p est vrai. Par définition de notre

valuation, la condition nécessaire est que les mondes accessibles en deux étapes le soient aussi en une étape, donc que R soit transitive.

2) $\Box p \rightarrow p$ // réflexivité de R : la valuation minimale qui rend l'antécédent vrai est à nouveau celle qui rend vraie p dans tous les mondes accessibles depuis le monde de départ ; à nouveau, pour que le conséquent soit vrai, il faut que R soit réflexive.

Ce qui est remarquable, c'est que l'on peut donner une transcription syntaxique de ces raisonnements à partir de la traduction standard :

puisque c'est la variable de prédicat P qui représente la vérité de la proposition p et que la valuation minimale est celle qui rend p vraie uniquement dans les mondes accessibles depuis x, on note

$Pz = Rxz$.

La traduction du conséquent est

$\forall y\,(Rxy \rightarrow \forall z\,(Ryz \rightarrow Pz))$

et quand on substitue à P son instantiation minimale, on obtient $\forall y\,(Rxy \rightarrow \forall z\,(Ryz \rightarrow Rxz))$ c'est-à-dire la transitivité.

De la même façon, si on pose $Pz = Rxz$ et Px on obtient Rxx c'est-à-dire la réflexivité.

3.3.2 Théorèmes de définissabilité

Cette section est basée sur [Blackburn & ali. 2001], chap. 3.6 ; la version originale est [VB 1983], chap.IX, une présentation (succinte) en français [Gochet & ali 2000], chap. 7. On trouvera dans [Goldblatt 2001], pp. 49 et sq. quelques indications historiques sur les formules de Sahlqvist

Définition 54. Une formule modale close est une formule modale qui ne contient pas de variables propositionnelles

Proposition 31 Pour toute formule modale close φ, il existe une formule ψ qui lui est LL_0-équivalente, et que l'on peut effectivement construire.

Exemple : la formule $\Diamond T$ a pour CLL_0-correspondant $\exists y(Rxy)$ et pour CGL_0-correspondant $\forall x \exists y(Rxy)$

Preuve : il suffit de remarquer que la traduction standard n'induit aucune variable de prédicat donc nous donne directement le correspondant. L'absence de variables propositionnelles nous fait donc passer trivialement du second ordre au premier ordre.

Remarque : l'analogie avec les formules pures de la logique hybride et leurs propriétés est évidentes : comme la traduction standard peut être étendue à la logique hybride de telle sorte qu'un nominal ne soit pas traduit par une variable de prédicat, toute formule qui est construite à partir de nominaux est automatiquement C-définissable au premier ordre.

Proposition 32 Pour toute formule modale φ dont le degré modal est inférieur ou égal à un, il existe une formule ψ qui lui est LL_0-équivalente

Preuve : [VB 1983], pp.99-100

Définition 55. l'occurrence d'une variable propositionnelle p est positive si elle est dans la portée d'un nombre pair de négations, négative sinon ; une formule modale est dite positive (négative) si toutes les occurrences de variables propositionnelles qu'elle contient sont positives (resp. négatives)

Définition 56. l'occurrence d'une variable de prédicat P est positive si elle est dans la portée d'un nombre pair de négations, négative sinon ; une formule de L_2 est dite positive (négative) si toutes les occurrences de variables de prédicat qu'elle contient sont positives (resp. négatives)

Proposition 33 soit $\varphi \in PROP(L(At))$; φ est positive pour p ssi ST(φ) est positive pour le prédicat correspondant P

Preuve : conséquence immédiate des Définitions

Définition 57. une formule modale φ est monotone croissante pour la variable propositionnelle p si pour tout modèle $M = \langle S, R, V \rangle$ et toute valuation V' t.q. $V(p) \subseteq V'(p)$ et $V(q) = V'(q)$ pour tout $q \neq p$, si $(M, s) \models \varphi$ alors $(M' = \langle S, R, V' \rangle, s) \models \varphi$

Définition 58. une formule modale φ est monotone décroissante pour la variable propositionnelle p si pour tout modèle $M = \langle S, R, V \rangle$ et toute valuation V' t.q. $V'(p) \subseteq V(p)$ et $V(q) = V'(q)$ pour tout $q \neq p$, si $(M, s) \models \varphi$ alors $(M' = \langle S, R, V' \rangle, s) \models \varphi$

Proposition 34

- si φ est positive pour p, elle est monotone croissante pour p
- si φ est négative pour p, elle est monotone décroissante pour p

Preuve : par induction sur la formule φ. Par exemple, pour l'étape initiale et l'étape modale.(i) si $\varphi = p$, $p \in At$, alors si $s \in S$ et $s \in V(p)$, $s \in V'(p)$ (ii) si $\varphi = \Box\psi$, alors si $s \in S$ et $s \in V(\Box\psi)$, pour tout s' t.q. sRs', $s' \in V(\psi)$; par hypothèse d'induction, $s' \in V'(\psi)$ donc $s \in V'(\Box\psi)$.

Commentaire : c'est avec ce résultat que l'on retrouve l'intuition du départ : la ST met en relation variables de prédicat et valuations ; le problème, c'est d'éliminer ces variables de prédicats, la solution est de les instantier en préservant la définissabilité. La Proposition nous dit que si une formule φ est positive (resp. négative) pour p, alors en instantiant minimalement (resp. maximalement) P dans ST(φ), on préserve la définissabilité. Une bonne façon de le faire sera

- valuation minimale : $Px \Rightarrow x \neq x$
- valuation maximale :$Px \Rightarrow x = x$

Une fois que l'on a remarqué cela, le premier résultat de définissabilité est assez immédiat.

Définition 59. une formule modale (resp. du second ordre) est uniforme si chaque variable propositionnelle (resp. proposition atomique) qui apparaît en elle est ou toujours négative ou toujours positive.

Proposition 35 **(Définissabilité 1)** si φ est une formule modale uniforme, il existe une formule ψ qui lui est LL_0-équivalente et qui peut être effectivement construite

Preuve : on part de la traduction de φ universellement quantifiée au second ordre ie $\forall P_1 \ldots \forall P_n ST(\varphi)$. On instantie les prédicats unaires positifs avec l'ensemble vide (ceci correspond à la valuation minimale), donc syntaxiquement on remplace P_ix par $x \neq x$; les prédicats négatifs avec S tout entier (ceci correspond à la valuation maximale), donc syntaxiquement on remplace P_ix par $x = x$. On montre ensuite que la formule du premier ordre obtenue est équivalente à la formule du second ordre initiale : du second ordre au premier, c'est trivial ; du premier ordre au second, on s'appuie sur la propriété de monotonie de φ. Toute instantiation des variables de prédicats étendra l'instantiation des prédicats positifs et réduira celle des prédicats négatifs, donc préservera la valeur de vérité de la formule du premier ordre 🕸

Attention : la définition de l'uniformité suppose que les opérateurs $\Diamond$, $\neg$ et $\vee$ sont primitifs ; la portée du résultat est donc beaucoup moins forte que les apparences pourraient le laisser croire, puisque par exemple $p \rightarrow \Diamond p$ doit se réécrire comme $\neg p \vee \Diamond p$, ce qui l'exclut de la classe des formules uniformes ; il en va de même des autres axiomes classiques.

Définition 60. une formule de Sahlqvist très simple est une formule de la forme $\varphi \rightarrow \psi$ où

- φ est construite à partir de $At \cup \{\bot, T\}$ en utilisant seulement $\Diamond$, $\wedge$
- ψ est positive

Exemple : cette fois, on retrouve des axiomes intéressants comme (T) $p \rightarrow \Diamond p$

Proposition 36 **(Définissabilité 2)** si $\chi = \varphi \rightarrow \psi$ est une formule très simple de Sahlqvist, alors il existe une formule qui lui est LL_0-équivalente, et que l'on peut effectivement construire

Preuve : on part de la formule

(*) $\forall P_1 \ldots \forall P_n(ST(\varphi) \rightarrow ST(\psi))$,

et on extrait d'abord les quantificateurs existentiels de l'antécédent grâce aux équivalences suivantes du calcul des prédicats :

$\exists x\,(\xi_1(x) \wedge \xi_2) \leftrightarrow (\exists x\,\xi_1(x) \wedge \xi_2)$

$(\exists x\,\xi_1(x) \rightarrow \xi_2) \leftrightarrow \forall x\,(\xi_1(x) \rightarrow \xi_2)$

; on aboutit à une formule $\forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x_1 \ldots \forall x_m(REL \wedge AT \rightarrow ST(\psi))$

où REL est une conjonction de propositions atomiques formées avec R, AT de propositions formées avec les P_i. Soit $P_ix_1, \ldots, P_ix_k$ toutes les occurrences de P_i dans l'antécédent ; on va instantier P_i x dans l'antécédent par $\sigma(P_i)(x) = (x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_k)$ qui est la façon miminale de rendre l'antécédent vrai. En substituant partout à P_i $\sigma(P_i)$, on obtient une formule du premier ordre de la forme :

$\forall x_1 \ldots \forall x_m (REL \wedge [\sigma(P_1) / P_1, \ldots, \sigma(P_n) / P_n]AT \rightarrow [\sigma(P_1) / P_1, \ldots, \sigma(P_n) / P_n] ST(\psi))$

qui se simplifie immédiatement en

(**) $\forall x_1 \ldots \forall x_m (REL \rightarrow [\sigma(P_1) / P_1, \ldots, \sigma(P_n) / P_n] ST(\psi))$

Il reste à montrer que (*) et (**) sont équivalentes. (*) $\Rightarrow$ (**) qui en est la simple instantiation. Le point décisif est l'usage de l'instantiation minimale qui permet que (**) $\Rightarrow$ (*) ; l'argument tient en deux points :

- on montre que le choix de σ légitime de l'appeler instantiation minimale : si la conjonction AT est vérifiée par un modèle, alors pour tout P_i et pour tout y, si $\sigma(P_i)(y)$ est vrai, il en est de même de P_iy, c'est-à-dire des autres instantiations de P_i. Autrement dit, les autres instantiations de P_i étendent $\sigma(P_i)$
- $ST(\psi)$ est positive donc monotone croissante donc il n'est pas possible de rendre vrai l'instantiation minimale des P_i sans rendre vraie toute instantiation des P_i ; or si (**) et l'antécédent de (*) sont vrais, alors $[\sigma(P_1) / P_1, \ldots, \sigma(P_n) / P_n] ST(\psi))$ aussi donc (*) aussi.

Exemple : $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$

1ère étape : (traduction au second ordre)

$\forall P\ ST(\Diamond p) \rightarrow ST(\Diamond\Diamond p) = \forall P\ (\exists x_1(xRx_1 \wedge Px_1) \rightarrow \exists y_1(xRy_1 \wedge \exists y_2(y_1Ry_2 \wedge Py_2))$

2ème étape : (extraction des quantificateurs de l'antécédent)

$\forall P \forall x_1 ((xRx_1 \wedge Px_1) \rightarrow \exists y_1(xRy_1 \wedge \exists y_2(y_1Ry_2 \wedge Py_2))$

3ème étape : (instantiation des variables de prédicat)

$\forall x_1 ((xRx_1 \wedge x_1 = x_1) \rightarrow \exists y_1(xRy_1 \wedge \exists y_2(y_1Ry_2 \wedge x_1 = y_2))$

5ème étape : (simplification)

$\forall x_1 (xRx_1 \rightarrow \exists y_1 (xRy_1 \wedge y_1Rx_1))$, formule qui exprime la densité.

Définition 61. une formule de Sahlqvist simple est de la forme $\varphi \rightarrow \psi$ où

- φ est construite à partir des boxatomes, de $\perp$ et de T, en utilisant seulement $\Diamond$ et $\wedge$
- ψ est positive

Proposition 37 **(Définissabilité 3)** si $\chi = \varphi \rightarrow \psi$ est une formule simple de Sahlqvist, alors il existe une formule qui lui est LL_0-équivalente, et que l'on peut effectivement construire

Preuve : la seule différence par rapport au cas précédent est la traduction des □ ; les P_i peuvent en effet apparaître dans les traductions de boxatomes, c'est-à-dire dans des expressions de la forme $\forall y\ (x_kRy \rightarrow P_iy)$[5] ; pour chaque P_i, il existe un certain nombre de x_k de ce genre dans l'antécédent, et on définit alors

$\sigma(P_i)\ (x) = (Rx_1x \vee \ldots \vee Rx_kx\ )$

dont on montre à nouveau qu'elle est une instantiation minimale des P_i (on s'en convainc aisément en regardant les exemples du départ, (T) et (4))

Définition 62. une implication de Sahlqvist est de la forme $\varphi \rightarrow \psi$ où

- φ est construite à partir des boxatomes, de $\bot$, de T et des formules négatives en utilisant seulement ◊, $\vee$ et $\wedge$
- ψ est positive

Définition 63. une formule de Sahlqvist est construite à partir d'implications de Sahlqvist

- en utilisant librement □ et $\wedge$
- en utilisant la conjonction seulement entre formules qui ne partagent pas de variables propositionnelles

Proposition 38 **(Définissabilité 4)** si $\chi = \varphi \rightarrow \psi$ est une formule de Sahlqvist, alors il existe une formule qui lui est LL_0-équivalente, et que l'on peut effectivement construire

3.3.3 Portée et limites des théorèmes de définissabilité.

Proposition 39 Il existe des formules modales qui sont CL_0-définissables mais qui ne sont pas des formules de Sahlqvist.

Preuve : simple application du Corollaire du Théorème de Chagrova : l'ensemble des formules de Sahlqvist est récursif

Proposition 40 Il existe des formules modales qui sont CL_0-définissables mais qui ne sont équivalentes à aucune formule de Sahlqvist

Preuve : $(\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p) \wedge (\Diamond\Diamond q \rightarrow \Diamond q)$ conjonction de l'axiome de McKinsey et de l'axiome 4

---

[5] dans la preuve comme par la suite, par souci de simplicité, on ne considère que les boxatomes de degré 1 c'est-à-dire de la forme □p et non ceux construits par itération de □ ; leur prise en compte ne pose pas de problème particulier.

Plus fort : il existe des formules modales pour lesquelles il existe des formules LL_0-équivalentes et qui ne sont équivalentes à aucune formule de Sahlqvist

Exemple : $\Box(\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p) \wedge (\Diamond\Diamond q \rightarrow \Diamond q)$

3.4 A quelles conditions une formule du premier ordre est-elle cadre-définissable par une formule modale ?

3.4.1 Arguments négatifs

Proposition 41 toute formule de L_0 n'est pas CL-définissable

La méthode de base, parallèle à celle que l'on emploie pour réfuter la L_0-définissabilité, use des résultats de préservation comme autant de "tests" [Blackburn & ali 2001], p.141 pour la définissabilité modale. En voici un échantillon.

Argument par la préservation par sous-cadre engendré : la formule $\varphi := \exists x \exists y\, Rxy$ n'est pas modalement cadre-définissable.

Soit le cadre $C = < S = \{s_1, s_2, s_3\}, R = \{<s_1, s_2>\}>$; φ est valide dans C. $C' = <S' = \{s_3\}, R = \varnothing >$ est bien un sous-cadre engendré de C mais ne valide pas φ.

Argument par la préservation par union disjointe : la formule $\varphi := \forall x \forall y Rxy$ n'est pas modalement cadre-définissable.

Soient les cadres $C_1 = <S_1 = \{s_1\}, R_1 = \{<s_1, s_1>\}>$ et $C_2 = <S_2 = \{s_2\}, R_2 = \{<s_2, s_2>\}>$; la formule φ est valide en C_1 et C_2, mais pas en $\cup C_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Argument par la préservation par p-morphisme : les formule $\varphi_1 := \forall x\, \neg Rxx$ et $\varphi_2 := \forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ ne sont pas modalement cadre-définissables.

Soit le cadre C = < N, "être le prédécesseur de"> ; φ_1 et φ_2 sont valides dans C. Maintenant, soit $C_1 = <S_1 = \{s\}, R_1 = <s, s>>$ et f la fonction qui a tout élément de N associe s. f est un p-morphisme ; pourtant φ_1 n'est pas valide dans C_1. De la même façon, soit $C_2 = <S_2 = \{s_1, s_2\}, R_2 = \{<s_1, s_2>, <s_2, s_1>\}>$ et g la fonction qui associe s_1 à tout entier impair et s_2 à tout entier pair. g est un p-morphisme et pourtant φ_2 n'est pas valide dans C_2.

Argument par l'antipréservation par ultrafiltre extension : la formule $\varphi := \forall x \exists y\, (Rxy \wedge Ryy)$ n'est pas modalement cadre-définissable.

Ce bel exemple est du à Goldblatt et Thomason, exposé dans [VB 1983], p. 33 et [Blackburn & ali 2001], p. 95. Soit le cadre <N, <> ; on montre que son ultrafiltre extension satisfait φ, sans que lui le fasse. On peut distinguer dans N_F les ultrafiltres principaux des autres ; et établir alors que pour tout ultrafiltre u et tout ultrafiltre non principal u', $R_F$uu'. Soit en effet $X \subseteq S$; alors si $X \in u'$, $\{s \in S \,/\, \forall s'$ t.q. $Rss', s' \in X\} \in u$. En effet, un ultrafiltre est non principal ssi il ne contient que des éléments infinis (ssi il contient tous les ensembles co-finis (le filtre de Fréchet)) ; donc X est infini donc m(X) = {s ∈ S / ∃s' t.q. Rss', s' ∈ X } = N donc m(X) ∈ u. En particulier, si u' est un ultrafiltre non principal, R_Fu'u'. φ est donc valide dans ue(<N, < >).

3.4.2 Caractérisation générale

On a pour la CL-définissabilité un résultat aussi général que pour la CL_0-définissabilité ; il est cependant beaucoup plus difficile à établir, car dans le cas précédent, on avait pu s'appuyer sur des propriétés du fragment $\prod_1^1$ de la logique du second ordre. Ici, on doit s'appuyer sur des propriétés modèles-théorétiques propres à la logique modale.

Définition 64. soient *M* et *M'* des modèles ; *M'* est l'image p-morphique de *M* s'il existe un p-morphisme *surjectif* de *M* dans *M'*.

Le résultat principal est la

Proposition 42 **(Théorème de Goldblatt-Thomason, 1974)** une classe de cadre L_0-définissable est L-définissable ssi elle est close par sous-cadres engendrés, unions disjointes, images p-morphiques et si son complémentaire est clos par ultrafiltres extensions.

Preuve : (⇒) est une conséquence immédiate des théorèmes de préservation (⇐) a une démonstration algébrique [VB 1984], p. 213, une autre modèle-théorétique [Blackburn & ali 2001], 3.8 et [VB 1983] Théorèmes 14.7 et 16.5. C'est la seconde, qui est la traduction *via* la théorie de la dualité de la première, dont nous allons donner les grandes lignes.

Soit **C** une classe de cadre L_0-définissable et satisfaisant les conditions de clôtures ; si ThL(**C**) désigne l'ensemble des formules modales valides dans **C**, et Ca(ThL(**C**)) l'ensemble des cadres qui valident ThL(**C**), alors il est clair que **C** ⊆ Ca(ThL(**C**)) ; ce qu'il faut montrer, c'est que la réciproque est vraie.

Soit C ∈ Ca(ThL(**C**)) ; à montrer que C ∈ **C**. Ce sera fait si l'on montre que

(*) ue(C) est l'image p-morphique de l'ultrapuissance d'un cadre de **C**

en vertu des différentes clôtures de **C** et du fait qu'elle est L_0-définissable. Reste donc à montrer (*). Notons tout d'abord que l'on peut sans perte de généralité considérer que C est un sous-cadre engendré par un des éléments de son domaine, que l'on appellera w, et ce en raison des propriétés de clôture de **C** et du fait que tout cadre est l'image p-morphique de l'union disjointe de ses sous-cadres engendré par singleton.

Soit *AtC* un ensemble de variables propositionnelles indexées sur l'ensemble des parties de S ; on peut définir le modèle *M* = <C, V> où, pour toute partie X de S, $V(p_X) = X$. Soit Δ l'ensemble des formules modales satisfaites dans le monde w de *M* ; Δ est satisfiable dans **C** car Δ est finiment satisfiable dans **C**. Sinon, il existe une formule ψ (conjonction de formules) incluse(s) dans Δ qui n'est satisfiable dans aucun cadre de **C** donc t;q. $\neg\psi$ est valide dans **C** donc valide dans C, ce qui est impossible. Il suffit ensuite de calquer la preuve du théorème de compacité pour le premier ordre qui utilise les ultraproduits (cf p.e. [Cori & Lascar 1993] II, p. 215) : si pour chaque partie finie de Δ on choisit un modèle basé sur un cadre de **C**, alors leur ultraproduit satisfait Δ et puisque **C** est clos par ultraproduits, alors Δ est satisfaisable dans **C**. Il existe donc un cadre *D*, un modèle *N* basé sur *D* et un monde b de *D* tel que *N*, b $\models \Delta$. On peut supposer que *D* est engendré par b ; on va montrer que *D* est le cadre que l'on recherche pour établir (*).

Définition 65. soit M = <S, R, V> un modèle, $X \subseteq S$ et $\Sigma \subseteq FORM(L(At))$; Σ est dit satisfiable dans X s'il existe un état $s \in X$ t.q. M, s $\models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Sigma$; finiment satisfiable dans X si tout sous-ensemble fini de Σ est satisfiable dans X

Définition 66. un modèle *M* est dit **m-saturé** si pour tout état $s \in S$ et tout $\Sigma \subseteq FORM(L(At))$, si Σ est finiment satisfiable dans l'ensemble des R-successeurs de s, alors Σ est satisfiable dans l'ensemble des R-successeurs de s.

Une adaptation du théorème 6.1.8 de [Chang & Keisler] garantit l'existence d'un modèle *N'*, ultrapuissance de *N* qui est m-saturée, *N'* = <W', Q', T'>. On va le mettre en relation avec l'ultrafiltre extension de *M*, noté ue(M)

Soit la fonction f : W' $\rightarrow S_F$ où S_F est l'ensemble des ultrafiltres de S, domaine de C.

$f(s) = \{X \subseteq S \,/\, N', s \models p_X\}$; autrement dit : la fonction f associe à chaque élément de W' les sous-ensembles X de S tels que en s est satisfaite la variable propositionnelle indexée sur X.

Il faut vérifier (et on ne le fera pas en détail) que

- pour tout $s \in W'$, f(s) est bien un ultrafiltre sur S, soit un élément de S_F : (i) f(s) est clos par intersection (ii) f(s) est clos par surensembles (iii) f(s) contient S (iv) f(s) ne contient pas $\varnothing$ (v) de deux parties complémentaires de S, f(s) en contient une et une seule
- f est un p-morphisme
- f est surjective ; c'est à cet endroit qu'on se sert de la m-saturation de *N'* : soit u un ultrafiltre sur S et $\Sigma = \{p_k \,/\, k \in u\}$ Soit σ un sous-ensemble fini de Σ et φ la conjonctions des formules de σ. Si φ est satisfiable en *M* (et elle l'est), alors puisque *M* est engendré par w, *M*, w$\models \Diamond^n\varphi$ pour un certain n donc *N*, b$\models \Diamond^n\varphi$, donc φ est satisfiable dans *N'*. Pourquoi ? Parce qu'en vertu de la définition de *N*, $\Diamond^n\varphi \in \Delta$ donc est satisfaite au point b de *N*. Mais puisque *N'* est m-saturé et que toute partie finie de Σ y est satisfiable, il existe un état S de W' qui satisfait Σ ; clairement, f(s) = u.

3.5 A quelles conditions peut-on construire effectivement une formule cadre-L-correspondante à une du premier ordre ?

Une réponse partielle, en connexion avec le théorème de Sahlqvist, est donnée par le Théorème de Kracht que nous mentionnons ici pour mémoire – son analyse est encore plus fastidieuse que celle de la catégorie duale des formules de Sahlqvist.

Définition 67. une formule φ est construite par quantification universelle restreinte si elle est de la forme $\forall y\ (xRy \rightarrow F(y))$

Définition 68. une formule φ est construite par quantification existentielle restreinte si elle est de la forme $\exists y\ (xRy \wedge F(y))$

Définition 69. une formule φ est positive restreinte si elle est construite à partir des variables propositionnelles en utilisant seulement $\wedge$, $\vee$ et les quantificateurs restreints

Définition 70. une formule φ est propre si aucune variable n'apparaît libre et liée et si deux occurrences d'un même quantificateur ne lient pas deux fois la même variable

Définition 71. l'occurrence de la variable y dans la formule φ est intrinsèquement universelle si ou bien y est libre ou bien est liée par un quantificateur universel restreint qui ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur existentiel

Définition 72. une formule $\varphi(x) \in L_0$ est une **formule de Kracht** si φ est propre, positive restreinte, si toute formule atomique y est de la forme u = u ou $u \neq u$ ou bien contient au moins une variable intrinsèquement universelle

Proposition 43 **(Théorème de Kracht)** toute formule de Sahlqvist est LL_0-équivalente à une formule de Kracht et pour toute formule de Kracht, on peut effectivement construire une formule de Sahlqvist à qui elle est LL_0-équivalente

4 Complétude et correspondance

4.1 La méthode des modèles canoniques

Définition 73. un ensemble d'énoncés est un système de logique modale si et seulement si il est clos relativement aux modes d'inférence propositionnellement corrects (*modus ponens* et substitution uniforme) ; un ensemble d'énoncés est un système normal de logique modale si et seulement si c'est un système de logique modale qui contient le schéma d'axiome (K) et est clos par la règle d'inférence (RN)[6]

Définition 74. soit une logique modale normale Λ ; une formule φ est dite Λ-cohérente si $\neg\varphi \notin \Lambda$

Définition 75. un ensemble Γ de formules est maximalement Λ-cohérent si (1) il est Λ-cohérent (2) pour toute formule φ telle que $\varphi \notin \Gamma$, l'ensemble $\Gamma \cup \{\varphi\}$ n'est pas Λ-cohérent

Définition 76. soit Λ un système normal de logique modale ; $M_\Lambda = \langle S_\Lambda, R_\Lambda, V_\Lambda \rangle$ est le **modèle canonique** pour Λ si

(i) S_Λ est l'ensemble des ensembles maximalement Λ-cohérents

(ii) $R_\Lambda = \{(s, s') \ / \text{ pour toute formule } \psi \in s', \Diamond\psi \in s\}$

(iii) pour tout $p_i \in At$, $V_\Lambda(p_i) = \{s \in S_\Lambda \ / \ p_i \in s\}$

Proposition 44 (théorème fondamental pour les modèles canoniques): soit Λ une logique modale normale ; pour tout ensemble Γ maximalement Λ-cohérent, et pour toute formule φ, $(M_\Lambda, \Gamma) \models \varphi$ ssi $\varphi \in \Gamma$

Preuve : par induction sur la complexité des formules

(i) soit φ une formule atomique ; alors par la clause (iii) de la Définition $(M_\Lambda, \Gamma) \models \varphi$ ssi $\varphi \in \Gamma$

(ii) soit $\varphi = \neg\psi$; par la Définition 4, $(M_\Lambda,\Gamma) \models \varphi$ ssi $(M_\Lambda,\Gamma) \models \neg\psi$ ssi non $(M_\Lambda,\Gamma) \models \psi$; par hypothèse de récurrence, non $(M_\Lambda,\Gamma) \models \psi$ ssi non $\psi \in \Gamma$; puisque Γ est maximalement cohérent, alors si ψ n'appartient pas à Γ, $\neg\psi$ appartient à Γ. Donc $(M_\Lambda,\Gamma) \models \neg\psi$ ssi $\neg\psi \in \Gamma$

(iii) soit $\chi = \varphi \wedge \psi$; $(M_\Lambda,\Gamma) \models \chi$ ssi $(M_\Lambda,\Gamma) \models \varphi$ et $(M_\Lambda,\Gamma) \models \psi$ ssi (hypothèse de récurrence) $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$; or $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$; donc $(M_\Lambda,\Gamma) \models \chi$ ssi $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ssi $\chi \in \Gamma$

---

[6] [Chellas 1980], pp. 113 et sq. ; [Gochet & ali 2000], p. 51

(iv) soit $\varphi = \Box\psi$; (a) supposons que $(M_\Lambda,\Gamma) \models \varphi$; alors $(M_\Lambda,\Gamma) \models \Box\psi$ donc $\forall$ Δ tel que $(\Gamma,\Delta) \in R_\Lambda$ $(M_\Lambda,\Delta) \models \psi$ donc (hypothèse de récurrence) $\forall\Delta$, $\psi \in \Delta$; on en conclut que $\Box\psi \in \Gamma$ (b) supposons que $\Box\psi$ appartienne à Γ alors ψ appartient à tous les Δ tels que $(\Gamma,\Delta)\in R_\Lambda$; donc par hypothèse de récurrence $(M_\Lambda,\Gamma) \models B_i\psi$ ۞

Proposition 45 soit Λ un système normal de logique modale et M_Λ le modèle canonique pour Λ ; alors, pour toute formule φ, $M_\Lambda \models \varphi$ ssi $\vdash_\Lambda \varphi$

Preuve : $M_\Lambda \models \varphi$ ssi $\forall\Gamma$ $(M_\Lambda,\Gamma) \models \varphi$ ssi $\forall\Gamma$ tels que $Max_\Lambda\Gamma$, $\varphi\in \Gamma$; or d'après [Chellas 1980], p. 57, $\vdash_\Lambda \varphi$ ssi $\forall\Gamma$ tels que $Max_\Lambda\Gamma$, $\varphi\in \Gamma$; donc $M_\Lambda \models \varphi$ ssi $\vdash_\Lambda \varphi$. ۞

Commentaire : ceci constitue le résultat de *départ* de la méthode des modèles canoniques pour prouver la complétude de logiques modales normales vis-à-vis de classes de *cadres* et non plus de modèles.

Définition 77. si Λ est une logique modale normale, on note $C_\Lambda = <S_\Lambda, R_\Lambda>$ le cadre canonique pour Λ ; $\varphi \in FORM(L(At))$ est canonique si pour toute Λ

$$\varphi \in\Lambda \text{ implique } C_\Lambda \models \varphi$$

Définition 78. soit Λ une logique modale normale ; Λ est canonique si pour toute $\varphi \in FORM(L(At))$,

$$\varphi \in \Lambda \text{ implique } C_\Lambda\models \varphi$$

Commentaire : la première Définition signifie qu'une formule canonique est une formule telle que le cadre canonique de n'importe quelle logique modale qui peut la contenir appartient à la classe des cadres qu'elle définit, c'est-à-dire telle que ce cadre canonique satisfait la propriété qui lui *correspond*.

Proposition 46 soit Λ une logique modale normale ; si Λ est canonique, il existe une classe de cadre eu égard à laquelle Λ est (fortement) complète

Preuve : c'est une généralisation triviale de la façon dont on exploite la canonicité des axiomes classiques ((T), (4), (D)…) pour montrer que les logiques modales correspondantes sont complètes. Soit $\mathbf{C}_\Lambda$ la classe des cadres qui valident Λ et soit φ une formule Λ-consistante ; alors φ est satisfaite en un certain monde s du modèle canonique M_Λ et comme le cadre canonique C_Λ sur lequel M_Λ est basé appartient à $\mathbf{C}_\Lambda$, alors il existe bien un cadre de $\mathbf{C}_\Lambda$, une valuation sur ce cadre et un état de ce cadre tel que φ est satisfaite en cet état pour cette valuation. ۞

Exemple : (T) est une formule canonique

Exemple : KT est une logique modale canonique

Proposition 47 GL = K + (4) + L n'est pas canonique.

Preuve : on peut (i)- preuve directe -montrer que le cadre canonique C_{GL} ne valide pas la formule L[ZC 1997] ou (ii) – preuve par contraposition - montrer qu'il n'existe pas de classe de cadre eu égard à laquelle GL est fortement complète [BRV2001], 4.4.

(i) L définit la classe des cadres transitifs et ne contenant pas de chaîne infinie ascendante, en particulier un cadre doit être irréflexif pour valider L ; or ce n'est pas vrai de C_{GL} qui contient des points réflexifs.. En effet, la logique GL + (T) est consistente donc il existe un monde de M_{GL} qui contient GL + (T), lequel doit donc être réflexif

(ii) soit **C** une classe de cadres et Γ l'ensemble de formules $\{\Diamond p_1\} \cup \{\psi i = \Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) / i \in N^*\}$; Γ est GL- consistant ssi tout sous-ensemble fini de Γ est GL-consistant. Pour montrer ceci, il suffit de montrer que tout formule $\varphi := \Diamond p_1 \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ est GL-consistante donc qu'il existe un modèle de GL qui satisfait φ en un monde. Soit $M = \langle\{0, \ldots, n+1\}, <, V(p_i) = \{i\}\rangle$; $M, 0 \models \varphi$. Mais Γ n'est pas satisfiable dans un monde d'un modèle basé sur un cadre qui valide toutes les formules de GL : sinon autoriserait une chaîne ascendante de longueur infinie .

Commentaire : il faut donc développer une autre technique que celle des modèles canoniques pour montrer que

Proposition 48 (Segerberg) GL est (faiblement) complète eu égard à la classe de cadres des arbres transitifs finis

4.2 Canonicité et correspondance

Ce simple examen de la méthode des modèles canoniques fait apparaître essentiellement deux liens entre correspondance et complétude :

(1) une formule est canonique si tout cadre canonique pour une logique qui la contient possède la propriété qu'elle définit

(2) les formules (ou logiques) non canoniques que nous avons vues ne sont pas des formules élémentaires (L_0-définissables) ; à l'inverse toutes les formules canoniques que nous avons vues sont L_0-définissables

Question Question : est-ce que la théorie de la correspondance peut nous donner les conditions auxquelles une formule est canonique ? Existe-t-il des rapports "simples" entre correspondance et canonicité ?

La réponse à la seconde question est négative, si l'on s'attend à ce que canonicité et L_0-définissabilité se recouvrent :

Proposition 49 Toute logique modale normale axiomatisée par un ensemble de formules L_0-définissabl*e* n'est pas complète

Preuve : [VB 1983], p.192 (?) [BRV 2001], p. 218

Soit $\Lambda = K + (T) + (M) + (E) = \Diamond(\Diamond p \wedge \Box q) \to \Box(\Diamond p \vee \Box p) + (Q) = (\Diamond p \wedge \Box(p \to \Box p)) \to p$; la formule $(T) \wedge (M) \wedge (E) \wedge (Q)$ est L_0-définissable par la formule $\forall x \forall y\ (Rxy \leftrightarrow x = y)$ mais Λ est incomplète (donc elle n'est pas canonique)

Proposition 50 Toute logique modale canonique n'est pas L_0-définissable

Preuve : Fine (1975) montre que la formule $\Diamond\Box(p \vee q) \to \Diamond(\Box p \vee \Box q)$ axiomatise une logique modale canonique (donc fortement complète) mais pas élémentairement définissable.

Il existe cependant un résultat qui précise dans quelles conditions l'élémentarité est garante de canonicité ; il repose sur l'utilisation de la sémantique algébrique pour la logique modale.

4.3 Approche algébrique

4.3.1 Algèbres modales

On procède à un simple enrichissement des algèbres pour la logique propositionnelle

Définition 79. (Jonsson & Tarski 1948) une **algèbre de boole avec opérateur** est un n-uplet $< A, \cup, -, 0, f>$ où $< A, \cup, -, 0>$ est une algèbre de Boole et f un opération sur A satisfaisant

- condition de normalité : $f(0) = 0$
- condition d'additivité : $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$

Définition 80. Soir $C = <S, R>$ un cadre ; alors C^+, appelé l'algèbre complexe de C, est l'algèbre constituée de

- l'algèbre de Boole de l'ensemble des parties de S
- l'opérateur $f = m : (X) \rightarrow \{s \in S \ / \text{ il existe } x \text{ dans } X \text{ tel que } sRx\}$

4.3.2 Logique équationnelle

On définit comme on le fait usuellement les notions de base de la logique équationnelle pour les algèbres modales :

- l'algèbre des termes pour le type des algèbres modales basé sur un ensemble de variables X (c'est l'algèbre modale générée par X)
- l'assignation α à chaque élément de X d'un élément d'une algèbre modale *A* ; cette assignation induit un homomorphisme h_α de l'algèbre des termes vers *A* qui attribue à chaque terme un élément de *A*
- une équation est un coupe formé de deux éléments t et t' de l'algèbre des termes, notée $t \approx t'$
- une équation $t \approx t'$ est dite vérifiée en *A* pour une assignation α si $h_\alpha(t) = h_\alpha(t')$; $t \approx t'$ est valide en *A* si elle est vérifiée en *A* pour toute assignation α, noté $A \models t \approx t'$; enfin une équation $t \approx t'$ est valide dans une classe d'algèbres modales **A** si elle est valide dans toutes ses algèbres, noté $\mathbf{A} \models t \approx t'$
- soit E un ensemble d'équations et **A** une classe d'algèbres modales ; B(E) est la classe des algèbres modales qui valident E ; Eq(**A**) est l'ensemble des équations qui sont valides dans **A**.
- **A** est une *classe équationnelle* ssi il existe un ensemble E d'équations tel que $\mathbf{A} = B(E)$

Commentaire : cette notion est évidemment un des concepts fondamentaux quand on s'intéresse à l'usage de la sémantique algébrique pour la théorie de la correspondance ; grâce à des relations systématiques entre les cadres de Kripke et les algèbres modales, on peut déterminer les conditions auxquelles une classe de cadres est modalement définissable en "mimant" les conditions auxquelles une classe d'algèbres est équationnelle. Il est (assez) facile d'établir les relations depuis les cadres de Kripke vers les algèbres modales, c'est le contenu des Propositions suivantes :

Proposition 51 soit C un cadre ; C^+ est une algèbre de Boole avec opérateur.

Preuve : il suffit de vérifier que m satisfait bien les deux conditions de la Définition ۞

Proposition 52 soit C un cadre, C^+ son algèbre complexe, **C** une classe de cadre, $\mathbf{C}^+$ la classe d'algèbres complexes correspondantes et $\varphi \in FORM(L(At))$;

$$C \models \varphi \text{ ssi } C^+ \models \varphi \approx T$$

$$\mathbf{C} \models \varphi \text{ ssi } \mathbf{C}^+ \models \varphi \approx T$$

Par contre, établir la relation depuis les algèbres modales vers les cadres de Kripke est beaucoup plus difficile ; c'est la substance du théorème de représentation de Jonsson-Tarski qui dépasse largement notre propos.

4.3.3 Algèbre de Lindenbaum-Tarski

Définition 81. soit Λ une logique modale normale ; on définit sur FORM(L(*At*)) la relation suivante :

$$\varphi \equiv_\Lambda \psi \text{ ssi } \varphi \leftrightarrow \psi \in \Lambda$$

Définition 82. soit Λ une logique modale normale ; l'algèbre de Lindenbaum-Tarski de Λ, notée LT_Λ, est l'algèbre $(FORM(L(At))/\equiv_\Lambda, \cup, -, 0, f)$ où

- $FORM(L(At))/\equiv_\Lambda$ est le quotient de FORM(L(*At*)) par $\equiv_\Lambda$
- $[\varphi] \cup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$
- $-[\varphi] = [\neg\varphi]$
- $f\,[\varphi] = [\Diamond\varphi]$
- $0 = [\bot]$

Proposition 53 (**Théorème de complétude généralisé pour les algèbres de Boole avec opérateur**) Soient $K+\Sigma$ la logique modale axiomatisée par $\Sigma \subseteq FORM(L(At))$ et $B(\Sigma)$ la classe des algèbres de Boole avec opérateur qui valident l'ensemble d'équations $\{\varphi \approx T / \varphi \in \Sigma\}$;

$$\vdash_{K+\Sigma} \varphi \text{ ssi } \models_{B(\Sigma)} \varphi \approx T$$

Preuve : ($\Rightarrow$) est une vérification routinière, comme pour la preuve de complétude en sémantique relationnelle ($\Leftarrow$) est prouvé par la construction de l'algèbre de Lindenbaum-Tarski de K+Σ : il suffit de montrer que (i) $\vdash_{K+\Sigma} \varphi$ ssi $\models_{LT(K+\Sigma)} \varphi \approx T$ et (ii) $LT_{K+\Sigma} \in B\Sigma$ ۞

Commentaire : c'est là une différence fondamentale avec la sémantique de Kripke pour la logique modale qui n'a pas une telle propriété de complétude généralisée. Ainsi, la logique temporelle KThoM dont on montre qu'elle est incomplète relativement à la sémantique de Kripke, définit la classe vide des cadres et pourtant n'est pas inconsistante (donc n'est pas complète pour la classe vide des cadres).

4.3.4 Les variétés

Voici la dernière famille de notions fondamentale :

Définition 83. une classe d'algèbres est une **variété** ssi elle est close par sous-algèbres, produits et images homomorphiques

Définition 84. soit **A** une classe d'algèbres ; la variété engendrée par **A**, notée **V(A)**, est la plus petite variété contenant **A**

Deux résultats d'algèbre universelle concernant les variétés sont nécessaires pour les applications à la canonicité que nous avons en tête ; le premier a un intérêt essentiellement technique :

Proposition 54 (Tarski) Soit **A** une algèbre ; on note pour toute algèbre **K**, H(**K**) (resp. S(K), P(**K**)) l'ensemble des images homomorphiques de *K* (resp. l'ensemble des sous-algèbres, des produits de **K**) ; **V(A)** = H(S(P(**A**)))

Preuve : cf [Burris & Sankappanavar 1981] p.67 ۞

Le second est le célèbre Théorème de Birkhoff qui montre que les variétés *sont* les classes d'algèbre équationnelles :

Proposition 55 (Birkhoff 1935) La classe d'algèbres **A** est équationnelle ssi c'est une variété.

4.3.5 La canonicité des algèbres canoniques

Définition 85. soit A = <A, ∩, -, 0, f> une algèbre de Boole avec opérateur ; on définit alors le cadre ultrafiltre de A, noté A_+ = <UfA, Rf> où

- Uf est l'ensemble des ultrafiltres sur A
- Rfuu' ssi f(s) ∈ u pour tout s ∈ u'

Définition 86. soit A une algèbre de Boole avec opérateur et A_+ son cadre ultrafiltre ; l'algèbre canonique de A, notée ac$A$, est $(A_+)^+$, soit l'algèbre complexe induite par A_+.

Remarque : l'algèbre canonique ac$A$ est appelée par Jonsson-Tarski "extension parfaite de A"

Définition 87. une classe **A** d'algèbres de Boole avec opérateurs est dite canonique si elle est close par algèbre canonique, c'est-à-dire

si A ∈ **A** alors acA ∈ **A**

Proposition 56 soit **C** une classe de cadres close par ultraproduits ; alors la variété engendrée par les cadres de **C**, notée **V(C$^+$)**, est canonique

Preuve : soit **C** une classe de cadres close par ultraproduits ; à montrer que HSP**V(C)**$^+$ est canonique (cela suffit en vertu du Théorème de Tarski précédemment énoncé). Soit *A* un élément de HSP**V(C)**$^+$; alors il existe *B* et une famille de cadre $\{C_i / i \in I\}$ tel que *B* est (isomorphique à) une sous-algèbre du produit des C_i^+ (les algèbres induites par les cadres C_i), soit $\prod_{i \in I} C_i^+$ et *A* est une image homomorphique de *B*. A montrer que ac*A* $\in$ HSP**V(C)**$^+$. Pour obtenir cela, on va mêler des résultats de sémantique algébrique et relationnelle :

- d'abord on se sert d'un des résultats de base de théorie de la dualité selon lequel l'algèbre induite par une union disjointe de cadres est isomorphe au produits des algèbres induites par les mêmes cadres, soit : $(\cup C_i)^+$ isomorphe à $\prod_{i \in I} C_i^+$
- un autre résultat de la théorie de la dualité assure que les homorphismes et les plongements sont préservés quand on passe d'une algèbre à son algèbre canonique, soit : $(((\cup C_i)^+)_+)^+$ isomorphe à ac($\prod_{i \in I} C_i^+$)
- la définition du cadre ultrafiltre a pour corollaire immédiat que l'ultrafiltre extension d'un cadre n'est rien d'autre que le cadre ultrafiltre de son algèbre induite, soit ici : $(((\cup C_i)^+)_+)^+ = (\text{ue } (\cup C_i))^+$
- l'ultrafiltre extension d'un cadre est l'image p-morphique d'une de ses ultrapuissances, soit ici : il existe U ultrapuissance de $\cup C_i$ tel que ue($\cup C_i$) est l'image p-morphique de U
- si K est une classe de cadre, alors toute ultrapuissance d'une union disjointe de cadres de K est l'image p-morphique d'une union disjointe d'ultraproduits de cadres de K, soit ici : U est l'image p-morphique de D union disjointe d'ultraproduits de **C**
- à nouveau par les résultats de théorie de la dualité, si l'on prend les trois cadres ue($\cup C_i$), U et D, puisque ue($\cup C_i$) est l'image p-morphique de U qui est l'image p-morphique de D, leurs algèbres induites sont telles que $(\text{ue}(\cup C_i))^+$ se plonge dans U^+ qui se plonge dans D^+
- puisque **C** est clos par ultrapuissance, D^+ appartient à P**V(C)** ; comme (ue($\cup C_i$)) se plonge dans D^+ et qu'il est isomorphe à ac($\prod_{i \in I} C_i^+$), alors ac($\prod_{i \in I} C_i^+$) est dans SP**V(C)**
- enfin, pour terminer la démonstration, on reprend la chaîne de départ : ac *B* est dans SP**V(C)** également et donc ac *A* est dans HSP**V(C)** : la variété engendrée par la classe de cadre **C** est donc bien canonique ✵

Toute ce travail serait évidemment un peu vain si les variétés dites canoniques n'avaient aucun rapport avec la canonicité telle qu'on l'a définie en théorie de la complétude

Proposition 57 soit Σ un ensemble de formules ; si $B\Sigma$, l'ensemble des algèbres de Boole qui valident Σ, est une variété canonique, alors Σ est canonique

Preuve : [BRV 2001], p.294 On va se servir dans cette démonstration de deux lemmes majeurs de la sémantique algébrique, l'un qui permet de prouver la complétude, l'autre le théorème de représentation de Jonsson-Tarski ; tous les deux concernent l'algèbre de Lindenbaum-Tarski

- l'algèbre de Lindenbaum-Tarski de $K\Sigma$, $LT_{K\Sigma}$, est dans $B\Sigma$ - c'est l'étape essentielle de la preuve de complétude *via* la sémantique algébrique -. Par hypothèse, $B\Sigma$ est canonique donc l'algèbre canonique de $LT_{K\Sigma}$, notée ac $LT_{K\Sigma}$, est aussi dans $B\Sigma$
- le cadre canonique d'une logique normale est isomorphe au cadre ultrafiltre de son algèbre de Lindenbaum-Tarski, soit ici : $C_{K\Sigma}$ isomorphe à $(LT_{K\Sigma})_+$. On en déduit :

$$C_{K\Sigma} \cong (LT_{K\Sigma})_+$$
$$(C_{K\Sigma})^+ \cong ((LT_{K\Sigma})_+)^+$$
$$(C_{K\Sigma})^+ \cong \text{ac } LT_{K\Sigma}$$

- or on a vu qu'un cadre et son algèbre complexe induite valident les mêmes formulas ; ici, $C_{K\Sigma}$ et $(C_{K\Sigma})^+$ sont donc modalement équivalents ; en vertu des deux points précédents, cela implique que $C_{K\Sigma}$ valide toutes les formules de Σ. Autrement dit, par la définition de la canonicité en théorie de la complétude, Σ est canonique. ۞

Proposition 58 soit **C** une classe de cadres close par ultraproduits ; alors Λ**C**, l'ensemble des formules modales valides dans **C** est canonique

Preuve : se déduit des deux Propositions précédentes. ۞

4.4 Les cadres généraux

La contrepartie ensembliste des algèbres de Boole avec opérateur est :

Définition 88. un **cadre général** <C, $\wp S^*$> est une paire constituée d'un cadre C = <S, R> et d'un sous-ensemble $\wp S^* \subseteq \wp S$ tel que $\wp S^*$ est clos par intersection, complémentation et l'opérateur md.

Commentaire : [CZ1997], chap.8 présentent les cadres généralisés comme des *moyens termes* qui conservent la transparence des cadres de Kripke et la complétude généralisée de la sémantique algébrique.

Proposition 59 soit CG un cadre ; CG^+ est une algèbre de Boole avec opérateur.

Proposition 60 **(Théorème généralisé de complétude pour les cadres généraux)** Soient Λ une logique modale normale et $CG\Lambda$ la classe des cadres qui valident Λ et $\varphi \in$ FORM(L(*At*)) ;

$$\varphi \in \Lambda \text{ ssi } CG\Lambda \models \varphi$$

Preuve : on en a une preuve simple en passant par la contrepartie algébrique de $CG\Lambda$

Définition 89. soit Λ une logique modale normale, $M_\Lambda = \langle S_\Lambda, R_\Lambda, V_\Lambda \rangle$ son modèle canonique ; on définit le **cadre général canonique pour** Λ, $CG_\Lambda = \langle S_\Lambda, R_\Lambda, \wp S^*_\Lambda \rangle$ où

$$\wp S^*_\Lambda = \{V_\Lambda(\varphi) / \varphi \in \text{FORM}(L(At))\}$$

Proposition 61 Soient Λ une logique modale normale, LT_Λ son algèbre de Lindenbaum-Tarski et CG_Λ^+ l'algèbre modale induite par son cadre général canonique ; il existe un isomorphisme en LT_Λ et CG_Λ^+

Preuve : soit g : $[\varphi]_\Lambda \to V_\Lambda(\varphi)$; la bijection est une conséquence directe du fait que M_Λ est complet pour Λ ; on vérifie ensuite que les opérations sont préservées ۞

Le Théorème de complétude généralisé pour les cadres généralisés s'ensuit. ۞

L'utilisation des cadres généraux pour la canonicité exige qu'après la contrepartie algébrique de la canonicité, on trouve une contrepartie en termes de cadres généraux ; ici intervient la notion de *persistance*.

Définition 90. Soit $CG = \langle C, S^* \rangle$ un cadre général ; on définit le cadre de Kripke sous-jacent à CG, noté $CG_\#$, $CG_\# = C$. De même, si **CG** est une classe de cadres généraux, $\mathbf{CG}_\#$ est la classe des cadres de Kripke sous-jacents à **CG**.

Définition 91. Soient **CG** une classe de cadres généraux, $\varphi \in$ FORM(L(*At*)) ; φ est dite **CG**-persistante si pour tout $CG \in \mathbf{CG}$, si $CG \models \varphi$, alors $CG_\# \models \varphi$

Proposition 62 soit Λ une logique modale normale ; si Λ est complète relativement à **CG** et **CG**-persistante, alors Λ est complète relativement à $\mathbf{CG}_\#$.

Preuve : immédiate d'après la définition [Kracht 1999], p. 241. ۞

Définition 92. la classe **DCG** de cadres généraux, appelée classe des cadres descriptifs, est la classe des cadres tels que :

- $CG = \langle C, \wp S^* \rangle$ est différencié si pour tous s, s' $\in$ S, s = s' ssi pour tout V $\in \wp S^*$ (s $\in$ V ssi s' $\in$ V) (condition de différenciation)
- CG est *tight* si pour tous s, s' $\in$ S, sRs' ssi pour tout V $\in \wp S^*$ (s'$\in$V implique s $\in$ md(V))
- CG est compact si pour tout sous-ensemble $X \subseteq \wp S^*$, si pour tous sous-ensembles finis $X' \subseteq X$, $\bigcap X' \neq \varnothing$ (intersection finie), alors $\bigcap X \neq \varnothing$.

Exemple : $\langle N, \equiv_2, \{\varnothing, N, 2n, 2n+1\} \rangle$ n'est pas différencié puisque tous les états pairs appartiennent aux mêmes éléments de $\wp S^* = \{\varnothing, N, 2n, 2n+1\}$

Exemple : $<S = N \cup \{\omega\}, >, B = \{b \subseteq S$; b est fini et $\{\omega\} \notin b\} \cup \{b \subseteq S$; b est co-fini et $\{\omega\} \in b\}>$ est différencié

Remarque : [CZ 1997] prennent comme propriété définitoire la principale caractéristique des cadres descriptifs, qui tient dans la

Proposition 63 un cadre général *CG* est descriptif ssi il est isomorphe à son bidual, soit

$$CG \cong (CG^{+})_{+}$$

Preuve : [BRV 2001], pp. 313-4.

Si la classe des cadres descriptifs est si importante, c'est qu'elle entretient une relation privilégiée avec les cadres canoniques :

Proposition 64 soit Λ une logique modale normale ; alors CG_Λ est un cadre général descriptif.

Preuve : [BRV 2001], p.309

- CG_Λ est différencié : soient Γ et Δ deux ensembles maximaux Λ-consistants de formules (deux mondes distincts du cadre canonique) ; alors il existe une formule φ qui appartient à l'un sans appartenir à l'autre ; donc l'un appartient à $V(\varphi)$, l'autre non. La réciproque est immédiate.
- CG_Λ est *tight* : ($\Leftarrow$) soit Γ et Δ deux ensembles maximaux Λ-consistants de formules ; supposons que Δ ne soit pas relié à Γ par R_Λ (la relation d'accessibilité canonique) ; cela implique qu'il existe une formule φ telle que $\varphi \in \Gamma$ et $\Diamond\varphi \notin \Delta$. Autrement dit, $V_\Lambda(\varphi) \in \Gamma$ mais $\Delta \notin V_\Lambda(\Diamond\varphi) = md\ (V_\Lambda(\varphi))$ ($\Rightarrow$) soient Γ et Δ, $V \in \wp S^*_\Lambda$ telle que $\Gamma \in V$ et $\Delta \notin md(V)$. Puisque $V \in \wp S^*_\Lambda$, cela implique qu'il existe une formule φ telle que $\varphi \in \Gamma$ mais $\Diamond\varphi \notin \Delta$; donc Γ n'est pas canoniquement accessible depuis Δ
- CG_Λ est compact : soit X un ensemble de valuations canoniques qui a la propriété de l'intersection finie ; il existe un ensemble de formules Σ tel que $X = \{V_\Lambda(\varphi) / \varphi \in \Sigma\}$; par la propriété de l'intersection finie, tout sous-ensemble fini de Σ est consistant donc (par compacité pour la satisfaction) Σ est consistant. Σ peut être étendu en un ensemble maximal Λ-consistant, lequel est donc un monde du modèle canonique et appartient à toute intersection des éléments de Σ.

Parmi les conséquences de cette proposition, on a

Proposition 65 **(Théorème généralisé de complétude pour les cadres généraux descriptifs)**

Soient Λ une logique modale normale et $CG\Lambda$ la classe des cadres descriptifs qui valident Λ et $\varphi \in FORM(L(At))$;

$$\varphi \in \Lambda \text{ ssi } CG\Lambda \models \varphi$$

et surtout, pour la canonicité,

Proposition 66

- une formule φ est canonique ssi elle est **DCG**-persistante
- une logique Λ est canonique ssi elle est **DCG**-persistante

Preuve : [Kracht 1999], p.221.

Remarque : à la différence de la notion algébrique de canonicité, on a une parfaite identité entre la canonicité (au sens des cadres de Kripke) et la **DCG**-persistance. Passons désormais à un exemple d'application de cette notion.

Proposition 67 tout formule simple de Sahlqvist est **DCG**-persistante.

Preuve : rappelons qu'une formule une formule de Sahlqvist simple est de la forme$\chi := \varphi \rightarrow \psi$ où φ est construite à partir des boxatomes, de $\perp$ et de T, en utilisant seulement $\Diamond$ et $\wedge$, et ψ est positive. A montrer que si un cadre général descriptif *DCG* valide une telle formule χ, le cadre de Kripke sous-jacent $DCG_{\#}$ valide aussi χ. On va se servir des manipulations que l'on a déjà faites sur les formules de Sahlqvist : il faut en fait montrer que

$$DCG_{\#} \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x \forall x_1 \ldots \forall x_m(\text{REL} \wedge \text{BOX-AT} \rightarrow ST_x(\psi)), \text{ soit}$$

$$\text{pour tout } \bar{s} \text{ et pour toute valuation V, } DCG_{\#}, \models (\text{REL} \wedge \text{BOX-AT} \rightarrow ST_x(\psi))$$

Pour un $\bar{s}$ fixé on définit $V_m(p_i) = \bigcup \{R[s_j] \,/\, \forall y(Rx_jy \rightarrow P_iy)$ est dans BOX-AT$\}$ où $R[s_j] = \{x \in S \,/\, [s_j]\, R\, x\}$; il faut alors montrer que ($DCG_{\#}$, V_m, $\bar{s}$) satisfait (REL $\wedge$ BOX-AT $\rightarrow ST_x(\psi)$) et que V_m est bien une valuation minimale. Ce dernier point est analogue à ce que l'on a fait dans la preuve de correspondance élémentaire ; il faut donc établir le premier point, et c'est évidemment ici que l'on se sert du fait que *DCG* valide χ. Cela exige quelques détours, plus précisément une approche topologique de *DCG*.

Définition 93. soit *DCG* = <C, $\wp S^*$> un cadre général ;

- un élément f de $\wp S$ est dit fermé s'il est l'intersection d'un ensemble d'éléments de $\wp S^*$
- une valuation V est dite fermée si pour toute $p_i \in At$, $V(p_i)$ est une valuation fermée

On montre que si *DCG* est un cadre descriptif, alors pour tout s, R[s], défini comme précédemment, est un fermé ; puisque l'union finie de fermés est un fermé, V_m est bien une valuation fermée. L'intérêt de ceci est que l'on va pouvoir utiliser le Lemme suivant :

Lemme si U est une valuation close et φ une formule positive, alors $U(\varphi) = \{\bigcap V(\varphi)$ / V est une valuation admissible (pour toute p_i, $V(p_i) \in \wp S^*$) et étend U(pour toute p_i, $U(p_i) \subseteq V(p_i)$}

Preuve : par induction sur la taille de φ [BRV 2001], pp.325-6.

Si tel est le cas, alors pour toute valuation admissible V qui étend V_m, si (C, V_m), $\bar{s}$ $\models$ REL $\wedge$ BOX-AT, alors (C, V), $\bar{s}$ $\models$ REL $\wedge$ BOX-AT (V_m est minimale)donc (C, V), $\bar{s}$ $\models ST_x(\psi)$ (V est une valuation admissible de *DCG*, lequel valide χ) Maintenant, il faut se rappeler que $ST_x(\psi)$, comme toute traduction d'une formule modale, est une formule à une variable libre, nommément x, donc la seule assignation pertinente dans $\bar{s}$ = <s, s_1, …,s_m> est s. Si (C, V), $\bar{s}$ |= $ST_x(\psi)$, alors (C, V), s |= $ST_x(\psi)$, soit s $\in$ V(ψ). Ceci vaut pour toute valuation V qui étend V_m et qui est admissible ; par le Lemme $\in V_m(\psi)$ donc (C, V_m), $\bar{s}$ |= $ST_x(\psi)$.

5 Logique hybride et correspondance

5.1 Trivialisation du problème de la correspondance

Lorsqu'on enrichit la logique modale avec des nominaux et des symboles logiques pour les traiter (la quantification existentielle sur les nominaux et le @)[7], on obtient un langage aussi expressif que la logique du premier ordre, au sens précis où l'on dispose d'une traduction mécanique HT de la logique du premier dans la logique hybride :

HT (xRy) = $@_x$ <R>y
HT (Px) = @x p
HT (x=y) = $@_x$y
HT ($\sim\varphi$) = ~ HT (φ)
HT ($\exists v\varphi$) = $\exists$v HT(φ)

Il decoule des clauses de satisfaction pour la logique hybride que, pour une formule close du premier ordre φ, on a :

M|=φ ssi M|=HT(φ)

Ce lien au niveau des modèles se propage au niveau des cadres : soit K une classe de cadres,

1) K est HL définissable ssi K est L_2 définissable[8]

2) K est HP définissable ssi K est L_0 définissable

---

[7] On note HL la logique hybrique complète, et HP le fragment pur de la logique hybrique dans lequel tous les opérateurs et lieurs sont permis mais où

[8] L_2 est le fragment universel du second ordre, restreint en outre à la quantification sur les prédicats monadiques.

Pour 1), l'implication de gauche à droite est une conséquence directe de la possibilité d'étendre la traduction standard à la logique hybride. L'implication de droite à gauche est également évidente. On fait le raisonnement pour le cas où K est définit par une formule, le passage aux ensembles de formules n'étant pas problématique. Soit $\varphi = \forall P\ G(P)$ où G est une formule du premier ordre, une formule du fragment universel du second ordre qui définit K. Montrons que HT(G(P)) définit K.

F |= HT (G(P))

ssi pour toute valuation V, on F,V|= HT(G(P))

ssi F |= $\forall$P G(P)

ssi F $\in$ K

2) est une conséquence immédiate de la première, une fois que l'on remarque que si φ est une formule d'un langage purement relationnel, HT(φ) est une formule de HP.

Une morale possible de ceci (mais déjà en fait de l'existence de la rétro-traduction HT), morale que les thuriféraires de la logique hybride accepteraient sans doute, est que l'intérêt de la logique hybride réside moins dans la logique hybride complète, avec @ et quantificateur, que dans la hiérarchie des langages. Si l'on considère que la spécificité de la logique modale réside dans son point de vue local sur les structures, on sera sans doute conduit à privilégier les systèmes qui possèdent les propriétés de préservation exprimant cette localité, comme la préservation par union disjointe ou par sous-modèle engendré. Par exemple, on voit que la combinaison de @ et de o conserve ces deux propriétés[9] : de telles combinaisons ne sont pas dénuées d'intérêt puisqu'elles permettent par exemple de définir l'opérateur 'until' en logique temporelle. En revanche, on constate que la propriété de décidabilité (de la satisfiabilité) des formules modales se perd très rapidement : [Areces-Blackburn-Marx] montre que le simple fait de rajouter o fait perdre la décidabilité (les résultats décidabilité ne sont obtenus qu'en resteignant l'inteprétation de la relation de satisfaction).

[9] ceci montre … l'existence d'une hiérarchie.