Cogmaster CO8

TD n° 6 - jean.baccelli@ens.fr

22 mars 2013

Exercice 1 *Prouvez que si une relation binaire est asymétrique et négativement transitive, alors elle est transitive ; qu'une relation binaire peut être asymétrique sans être négativement transitive, et négativement transitive sans être asymétrique.*

Exercice 2 *Prouvez que sous leurs inter-définitions usuelles, la relation de préférence stricte est asymétrique $\Leftrightarrow$ la relation de préférence large est complète.*

Exercice 3 *Soit $\succeq$ une préférence dans un ensemble convexe $\triangle(X)$ de mesures simples de probabilité sur un ensemble X. Démontrez que A2 est une condition nécessaire de la représentation de cette préférence comme la maximisation de l'espérance d'une fonction d'utilité $u : X \mapsto \mathbb{R}$ i.e. prouvez :*

$$P \succeq Q \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(x_i).u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} Q(x_i).u(x_i)$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall P, Q, R \in \triangle(X), \forall \alpha \in]0,1[: P \succ Q \Leftrightarrow P\alpha R \succ Q\alpha R$$

Quelle propriété de la fonction d'utilité recherchée et quelle propriété de l'ensemble de mesures de probabilité $\triangle(X)$ devrez-vous pour cela exploiter ?

Exercice 4 *Soit p, q, r, s les quatre loteries suivantes :*

$$p = (1 : 1) \; ; \; q = (\frac{2}{100} : 0 ; \frac{98}{100} : 5)$$
$$r = (\frac{99}{100} : 0 ; \frac{1}{100} : 1) \; ; \; s = (\frac{9902}{10000} : 0 ; \frac{98}{10000} : 5)$$

Prouvez que la préférence $p \succ q \wedge s \succ r$ n'est pas compatible avec la règle de la maximisation de l'espérance d'utilité. Identifiez la condition nécessaire à la représentation d'une préférence comme la maximisation de l'espérance d'une fonction d'utilité qui n'est pas satisfaite (soyez complètement explicites).

Exercice 5 *Le lemme suivant est crucial pour la caractérisation axiomatique de la règle de la maximisation de l'espérance d'utilité (P^* et P_* y désignent la loterie $\succeq$-maximale et la loterie $\succeq$-minimale dans $\triangle(X)$, au sujet desquelles vous ferez ici l'hypothèse, déjà rencontrée, de 'non-trivialité' : $P^* \succ P_*$) :*

$$\forall P \in \triangle(X), \exists! \alpha_P \in [0,1] : P \sim \alpha_P P^* \oplus (1-\alpha_P)P_*$$

Prouvez qu'A2 (via D et en conjonction avec A1) assure l'unicité d'α_P : supposez que $P \sim \alpha_{P_1} P^* \oplus (1-\alpha_{P_1})P_*$ et $P \sim \alpha_{P_2} P^* \oplus (1-\alpha_{P_2})P_*$ avec $\alpha_{P_1} \neq \alpha_{P_2}$, puis dérivez-en une contradiction grâce à D et A1. (N.B. : l'existence de cet α_P est elle assurée par A3, toujours en conjonction avec A1).

N.B. D : $\forall P, Q \in \triangle(X)$, $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$: $[P \succ Q \Rightarrow P\alpha Q \succ P\beta Q] \Leftrightarrow [\alpha > \beta]$

Exercice 6 *Dans le cas où une préférence $\succeq$ dans $\triangle(X)$ est représentable comme la maximisation de l'espérance d'une fonction $u : X \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui est dérivable deux fois, la théorie a proposé un indice de risquophobie, le 'coefficient (absolu) de risquophobie', qui $\forall x \in X$ est défini comme suit :*

$$c(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Pour bien comprendre ce coefficient ('d'Arrow-Pratt'), répondez aux questions suivantes (vous vous placerez dans le cas de figure de la risquophobie) :

a/ Quel est le signe de $u'(x)$? (Rappelez-vous la propriété, pertinente dans ce cadre, de 'croissance' C : $x > y \Rightarrow x \succ y$.) Par ailleurs, $u'(x)$ est-elle invariante par transformation affine strictement croissante de $u(x)$?

b/ Quel est le signe de $u''(x)$? Par ailleurs, $u''(x)$ est-elle invariante par transformation affine strictement croissante de $u(x)$?

c/ Quel est le signe de $\frac{u''(x)}{u'(x)}$? Par ailleurs, $\frac{u''(x)}{u'(x)}$ est-elle invariante par transformation affine strictement croissante de $u(x)$?

d/ Selon vous, pourquoi prendre $-\frac{u''(x)}{u'(x)}$ comme indice de risquophobie ?

e/ Déterminez le 'coefficient absolu de risquophobie' d'un décideur VNM caractérisé par la fonction d'utilité $u(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 7 *Soit $X = \{x, y, z\}$ avec, par hypothèse, $x \succ y \succ z$. Dans ce cas, on peut illustrer géométriquement les préférences d'un décideur dans le "triangle (rectangle isocèle) de Marschak". Les trois extrémités du triangle sont les trois mesures dégénérées possibles ; par convention, y est placé à l'angle droit, x au sommet nord, z au sommet est. Par construction, on trouve en fait, comme point dans ce triangle, toutes les mesures de la forme :*

$$p = (p_x : x; p_y : y; p_z : z)$$

a/ Montrez que, pour tout p, on peut exprimer p_y en fonction de p_x et p_z.

b/ Supposez que le décideur suit la règle de maximisation de l'espérance d'utilité. Montrez qu'alors, un ensemble d'indifférence dans $\triangle(X)$ apparait comme une droite dans le triangle. Pour cela, tirez de l'égalité caractéristique d'un ensemble d'indifférence donné une expression de p_x en fonction de p_z. Quels sont le domaine et le co-domaine de définition de cette fonction ? Pourquoi peut-on dire que le coefficient directeur de ces droites est positif ? Qu'il est invariant par transformation admissible de l'échelle d'utilité ? Que le terme constant dans l'équation des droites est aussi invariant en ce sens ?

c/ Supposez que le décideur suit la règle de maximisation de l'espérance d'utilité. Montrez qu'alors, les différents ensembles d'indifférence dans $\triangle(X)$ apparaissent comme des droites parallèles dans le triangle (il vous faudra revenir à la question précédente, à l'expression de p_x en fonction de p_z, et à l'étude du terme constant dans l'équation des "droites d'indifférence"). Comment interpréter qu'une droite d'indifférence ait une équation au terme constant $c > c'$, c' étant le terme constant d'une autre droite d'indifférence ?

d/ Supposez que le décideur suit la règle de maximisation de l'espérance d'utilité et supposez que pour lui : $y \sim 1/2z \oplus 1/2x$. À l'aide de la question précédente, identifiez géométriquement dans le triangle de Marschak d'autres indifférences du décideur (par exemple, considérez la droite parallèle passant par $1/2z \oplus 1/2y$, puis une autre parallèle passant par $1/2y \oplus 1/2x$).

e/ Représentez les loteries du paradoxe d'Allais dans le triangle de Marschak. Aidez-vous de votre réponse à c/ pour identifier l'observation géométrique suffisant à établir que les préférences modales face aux loteries du paradoxe ne sont pas compatibles avec la règle de maximisation de l'espérance d'utilité.

f/ Supposez que $X = \{0, 1, 2\}$. Faîtes figurer dans le triangle de Marschak quelques ensembles de loteries ayant même espérance de gains et démontrez qu'ils doivent eux aussi y apparaître comme des droites parallèles. Puis supposez qu'un décideur suit la règle de maximisation de l'espérance d'utilité, et, vous rappelant les définitions techniques des attitudes par rapport au risque (étudiez le cas d'un décideur 'strictement risquophobe', i.e. caractérisé par la préférence suivante : $\forall p$, $EG(p) \succeq p$ et $\exists p^*$ non dégénéré tel que $EG(p) \succ p$) ainsi que leurs représentations dans le modèle de la maximisation de l'espérance d'utilité, répondez aux questions suivantes. Si vous saviez le décideur strictement risquophobe, que pourriez-vous dire (vous aidant à nouveau de votre réponse à la question c) de la relation entre ses ensembles d'indifférence et ces ensembles de loteries ayant même espérance de gains ? Dès lors, à quelle condition ces ensembles de loteries ayant même espérance de gains seraient-ils exactement ses ensembles d'indifférence ?