Cogmaster CO8

TD n° 9 - jean.baccelli@ens.fr

19 avril 2013

En théorie des jeux, la 'solution' la plus célèbre est la 'solution de Nash'. Un jeu $G = \langle S^1, ..., S^n \ ; \ u^1, ..., u^n \rangle$ admet une 'solution de Nash' s'il existe un $s* \in S$ t.q. $\forall i \in N$ et $\forall t^i \in S^i$ on vérifie : $u^i(s*^i, s*^{-i}) \geq u^i(t^i, s*^{-i})$ (i.e. s'il existe un $s* \in S$ t.q. $\nexists i \in N$ t.q. $\exists t^i \in S^i$ t.q. $u^i(t^i, s*^{-i}) > u^i(s*^i, s*^{-i})$).

Exercice 1 *Identifiez les solutions de Nash pour chacun des jeux suivants.*

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	H	$3,5$	$0,4$
	B	$1,0$	$5,6$

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	H	$2,0$	$0,8$
	B	$3,3$	$2,2$

		Joueur 2		
		G	C	D
	H	$0,2$	$2,2$	$2,3$
Joueur 1	M	$4,4$	$3,3$	$1,2$
	B	$3,2$	$1,3$	$0,2$

La semaine dernière, nous avons introduit le concept de 'meilleure réponse'. Par définition, les solutions de Nash ont pour propriété d'être des 'meilleures réponses réciproques'. Mathématiquement, cela veut dire que les solutions de Nash, si elles existent, devront être des 'points fixes' de la correspondance jointe de meilleure réponse. En effet, si $s*$ est une solution de Nash pour G, il doit être vrai que $\forall i \in N$ et $\forall t^i \in S^i$, $u^i(s*^i, s*^{-i}) \geq u^i(t^i, s*^{-i})$ i.e. par définition que $s*^i \in R^i(s*^{-i})$. Par conséquent, si l'on définit la 'correspondance jointe de meilleure réponse' $R : S \mapsto S$ comme $R(s) = \prod_{i \in N} R^i(s^{-i})$, $s*$ doit être t.q. $s* \in R(s*)$ i.e., par définition, doit être un point fixe de R.

Exercice 2 *Soit* $G = \langle S^1, S^2\ ;\ u^1, u^2\rangle$ *le jeu caractérisé par* $S^1 = S^2 = [0,1]$, $u^1(s^1, s^2) = s^1(1-2s^2)$ *et* $u^2(s^1, s^2) = s^2(2s^1-1)$. *Déterminez la solution de Nash de* G *suivant la méthode algébrique consistant à identifier le point fixe de la correspondance jointe de meilleure réponse. Vous pourrez déterminez cette solution suivant la méthode graphique consistant à identifier l'intersection des graphes des correspondances individuelles de meilleure réponse (cette méthode est particulièrement commode dans le cas de jeux à deux joueurs - bien entendu, quand il est possible de tracer de tels graphes).*

Exercice 3 *Pouvez-vous identifier des solutions de Nash pour les jeux suivants ?*

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	H	$3, -3$	$0, 0$
	B	$-1, 1$	$2, -2$

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	H	$3, 2$	$1, 5$
	B	$2, 3$	$3, 1$

Ce genres de jeux (historiquement, surtout le genre dont relève le premier d'entre eux, à savoir, celui des 'jeux à somme nulle') ont incité les théoriciens des jeux à considérer les 'extensions mixtes' des jeux. Étant donné un jeu fini $G = \langle S^1, ..., S^n\ ;\ u^1, ..., u^n\rangle$, l'extension mixte G_m de G est définie comme le jeu $G_m = \langle S^1_m, ..., S^n_m\ ;\ u^1_m, ..., u^n_m\rangle$ avec $\forall i \in N : S^i_m = \triangle(S^i)$ d'un côté, $\forall s_m \in S_m$, $\forall s \in S : g^i_m(s_m) = \sum\limits_{s\in S} \left[\prod_{j\in N} s^j_m s^j\right] u^i(s)$ de l'autre côté. On peut montrer que l'extension mixte d'un jeu fini a toujours au moins une solution de Nash, i.e. que pour tout G fini, $\exists s_m * \in S_m$ t.q. $s_m * \in R(s_m *)$. La seule façon infaillible d'identifier les solutions de Nash en 'stratégies mixtes' est d'essayer de calculer le(s) point(s) fixe(s) de la correspondance jointe de meilleure réponse (d'autres méthodes, semblant plus simple, ont pour inconvénient de parfois empêcher l'identification de certaines solutions).

Exercice 4 *Vous aidant d'une matrice auxiliaire de probabilités jointes, et utilisant la correspondance jointe de meilleure réponse, déterminez les solutions de Nash pour les 'extensions mixtes' des jeux de l'exercice 2. Faîtes-en de même pour l''extension mixte' du premier jeu de l'exercice 1, notamment pour vérifier que vous retrouvez ainsi, entre autres solutions et au titre de cas dégénérés, les solutions de Nash identifiées pour le jeu d'origine.*

Exercice 5 *Quelle est la classe d'unicité des fonctions d'utilité contribuant à caractériser l'extension mixte d'un jeu originellement en 'stratégies pures' ?*