introduction

introduction aux sciences de la décision
séance 1

M. Cozic

1. décision et rationalité

la théorie de la décision

- la théorie de la décision (TD) est une théorie formalisée, élaborée et utilisée par (1) les économistes, (2) les psychologues et (3) les philosophes

(1) les économistes: la (TD) sert d'hypothèse de base sur le comportement des agents économiques, en particulier en micro-économie. Exemple: modélisation du comportement des consommateurs, des entreprises

(2) les psychologues: la faculté de décider est l'une des facultés cognitives fondamentales, elle fait partie des facultés "de haut niveau", elle met en jeu nombre d'autres facultés. La (TD) fournit à la fois (a) une hypothèse de départ pour la description et l'explication du fonctionnement de cette faculté, et (b) un point de référence pour l'évaluation des décisions effectivement prises par les sujets.

la théorie de la décision

(3) les philosophes: une partie importante de la philosophie est consacrée à l'explicitation, la codification, la discussion et la mise en relation des normes de rationalité.
✓ normes de rationalité épistémique (les normes qui portent sur la formation et la dynamique des croyances) vs. normes de rationalité pratique (les normes qui portent sur les valeurs et les décision).
✓ la TD occupe une place centrale dans la théorie des normes de rationalité pratique - et, plus étonnant, une place non négligeable dans la théorie des normes de rationalité épistémique

objectif du cours

- présenter la (TD), particulièrement la théorie de décision individuelle, mais également la théorie des jeux, en introduisant aux aspects

  (1) mathématiques: concepts et résultats de base.
  (2) conceptuels: questions conceptuelles et philosophiques, en particulier questions de nature normative.
  (3) empiriques: (i) la méthodologie des études expérimentales, (ii) certains des principaux résultats et (iii) certaines des théories qui ont été élaborées en réponse aux découvertes empiriques.

la théorie de la décision

- la (TD) conventionnelle tente de formaliser l'idée intuitive, pré-théorique, de choix "rationnel" ou "approprié"

> **(R).** Le choix d'une action par un agent est rationnel si, étant donné ce qu'il croit et ce qu'il peut choisir, l'action choisie est celle dont les conséquences satisfont au mieux ses désirs

cf. Ramsey (1926): "...nous agissons suivant la manière qui nous semble la plus propice à la réalisation des objets de nos désirs, de sorte que les actions d'une personne sont entièrement déterminées par ses désirs et opinions."(p. 167)

les opportunités

supposons que Pierre préfère le vin jaune au vin blanc et le vin blanc au vin rouge

- situation 1:

a_b	vin blanc
a_r	vin rouge

Pierre doit choisir a_b

- situation 2:

a_b	vin blanc
a_r	vin rouge
a_j	vin jaune

Pierre doit cette fois choisir a_j (et non plus a_b)

$\Rightarrow$ ce qu'il est rationnel de faire dépend des opportunités offertes à l'agent

les opportunités

- situation 2:

a_b	vin blanc
a_r	vin rouge
a_j	vin jaune

Pierre doit choisir a_j

- situation 3:

a_b	vin blanc
a_j	vin jaune

Pierre doit choisir a_j

Dans la situation 3, l'action rationnelle est la même que dans la situation 2 : a_j. Dans le fait que le passage de la situation 2 à la situation 3 ne modifie pas l'action rationnelle semble résider un phénomène tout à fait général ; si l'action a^* est l'action rationnelle quand l'ensemble des actions réalisables est A, alors a^* est toujours l'action rationnelle quand (i) l'ensemble des actions réalisables est $A' \subseteq A$ et (ii) a^* figure dans A'.

les désirs

Pierre préfère le vin blanc ou vin rouge ; Jean préfère le vin rouge au vin blanc

a_b	vin blanc
a_r	vin rouge

Pierre doit choisir a_b mais Jean doit choisir a_r
$\Rightarrow$ ce qu'il est rationnel de faire dépend des désirs de l'agent

les croyances

• Jean croit que s'il choisit l'action a_b, il obtiendra du vin rouge tandis que s'il choisit l'action a_r, il obtiendra du vin blanc
• les goûts de Jean sont les mêmes que ceux de Pierre

a_b	vin rouge
a_r	vin blanc

Jean doit choisir a_r (et non a_b)
$\Rightarrow$ ce qu'il est rationnel de faire dépend des croyances de l'agent

commentaires

(i) la rationalité d'un choix est une relation entre (1) les opportunités, les désirs et les croyances de l'agent et (2) l'action choisie

(ii) *prima facie* la (TD) prend les désirs de l'agent comme *donnés*, elle ne dit pas quels sont les “bons” désirs et quels sont les “mauvais”

(iii) on dit parfois que la (TD) exprime une conception instrumentale de la rationalité ou encore qu'elle traite de la rationalité des moyens et non de celle des fins

remarque sur rationalité instrumentale

- à proprement parler, (R) ne correspond pas exactement à ce qu'on appelle rationalité instrumentale et qui est généralement décrite en termes de fins et de moyens.
- ex: Broome (2010), l'"exigence instrumentale" **(I)** L'idée est que l'on doit avoir l'intention de réaliser le moyen d'une fin que l'on a l'intention de réaliser. Plus précisément,

> **(I).** Si (1) si x a l'intention que e,
> (2) si x croit que, si m n'était pas le cas, alors pour cette raison e ne serait pas le cas,
> (3) si x croit que, s'il n'avait pas l'intention que m, alors m ne serait pas le cas,
> alors si x est rationnel, il a l'intention que m

remarque sur rationalité instrumentale

- autrement dit, d'après (I) si

  Paul a l'intention de courir le 10km en moins de 40'
  Paul croit que s'il ne se mettait pas au régime, pour cette raison il ne pourrait pas courir le 10km en moins de 40'
  Paul croit que s'il n'avait pas l'intention de se mettre au régime, alors il ne se mettrait pas au régime
  Paul n'a pas l'intention de se mettre au régime...

  alors Paul est irrationnel !

commentaires

(iv) le silence de la théorie sur les désirs n'est pas total: la théorie impose des conditions de *rationalité* ou de *cohérence* sur ces désirs

(v) un décideur est généralement ignorant de certains faits ou événements dont dépendent les conséquences de sa décision (ex: le parieur est ignorant de l'issue du tirage ou de la course).

- ▷ quand on évalue la rationalité du choix de x, on doit le considérer du point de vue des croyances initiales de x, avant (*ex ante*) de savoir ce qu'il en est des faits ou événements pertinents.
- ▷ on adopte le point de vue de ce que x tient pour vrai (ou probablement vrai).

commentaires

- les deux perspectives (celle de l'agent et celle de celui qui sait ce qu'il en est réellement) peuvent tout à fait diverger:

♯1 Paul achète 10 euros un ticket de loterie qui rapporte 100 euros avec probabilité 1/1 000 000. Il gagne.
Ex post, Paul a pris la bonne décision. Mais on peut (ce n'est pas forcément l'avis de la TD, voir cours sur l'espérance d'utilité) trouver que la décision de Paul n'était pas rationnelle (ex ante): étant donné ses objectifs et ses croyances, Paul a eu *tort* d'acheter ce ticket de loterie.

♯2 Paul achète 10 euros un ticket de loterie qui rapporte 100 euros avec probabilité 999 999/1 000 000. Il perd.
Ex post, Paul a pris la mauvaise décision. Mais on peut trouver que la décision de Paul était rationnelle (ex ante): étant donné ses objectifs et ses croyances, Paul a eu *raison* d'acheter ce ticket de loterie.

ex ante vs. ex post

- Hérodote, *Histoires*, VII, 10 (trad. Giguet ; cit. Peterson, 2009)

  > Xerxès, roi des Perses après son père Darius, fait part de son intention d'envahir la Grèce. Son oncle cherche à l'en dissuader.

  "Il y a, selon moi, grand profit à sagement délibérer; dussent les événements en quelque point être contraires, on n'en a pas moins pris la bonne direction, et la prudence n'est vaincue que par la fortune. La fortune au contraire seconde-t-elle celui qui n'a point mûri ses projets, soit; il a réussi, mais il n'en a pas moins suivi une impulsion inconsidérée."

commentaires

(iv) + (v) $\Rightarrow$ la (TD) est donc globalement subjectiviste au sens où elle prend non seulement les désirs de l'agent comme donnés, mais également ses croyances: la rationalité d'un choix ne dépend pas de qui serait objectivement vrai ou bon pour l'agent, mais de ce que l'agent prend comme tels

séparation des déterminants du choix

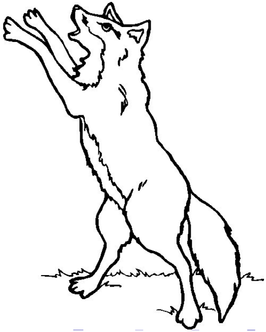
(vi) il y a des contraintes de rationalité qui sont laissées implicites ou satisfaites par construction

- exemple: la séparation des opportunités et des désirs, ou des croyances et des désirs.
  ✓ ce que l'on désire ne doit pas dépendre de ce que l'on peut obtenir
  ✓ ce que l'on croit ne doit pas dépendre de ce que l'on désire

les raisins verts

- ▷ La Fontaine, “Le renard et les raisins” (III, 11)

Certain Renard gascon, d’autres disent normand,
Mourant presque de faim, vit au haut d’une treille
Des raisins mûrs apparemment,
Et couverts d’une peau vermeille.
Le galand en eut fait volontiers un repas;
Mais comme il n’y pouvait point atteindre:
“Ils sont trop verts, dit-il, et bons pour des goujats.”
Fit-il pas mieux que de se plaindre?



interprétations de la TD

- différentes disciplines s'intéressent à la TD pour différentes raisons ; en fait, elles ne semblent pas toutes privilégier la même interprétation de la TD
- on distingue en général 2 interprétations principales de la théorie de la décision:

(i) interprétation descriptive: la TD comme un ensemble d'hypothèses sur le comportement et (éventuellement) les états mentaux des agents.

(ii) interprétation normative: la TD comme un ensemble de normes de rationalité contraignant le comportement et les états mentaux des agents

interprétations de la TD, exemple

- transitivité des préférences : si *a* est préféré à *b* et *b* à *c*, alors *a* est préféré à *c*

  - selon l'interprétation descriptive, la transitivité des préférences est une hypothèse qui est faite sur un certain type d'état mental (les préférences)

  - selon l'interprétation normative, la transivité est une norme : si un agent préfére *a* à *b* et *b* à *c*, alors il *doit* préférer *a* à *c* - sinon il n'est pas rationnel

interprétations de la TD, analogie

- une analogie commode: le modus ponens en logique: de $p \Rightarrow q$ et p, inférer q

  - interprétation descriptive: un individu qui croit que $p \Rightarrow q$ et p en infère que q

  - interprétation normative: un individu qui croit que $p \Rightarrow q$ et p doit en inférer que q

les branches de la (TD)

- 3 branches principales:

(1) théorie de la décision individuelle

  - quelles attitudes (ex., croyances, désirs) sont (doivent être) pertinentes pour la décision ?
  - comment devrait-on décider en fonction de ses attitudes ? et comment décide-on effectivement sur la base de ses attitudes ?
  - quelles sont les conséquences empiriques des modèles de décision ?
  - les modèles de décision sont-ils adéquats empiriquement ?
  - comment peut-on révéler ("éliciter") les attitudes d'un agent à partir des décisions qu'il prend ?

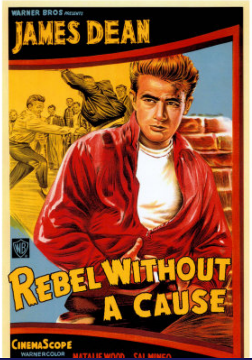
les branches de la (TD)

- 3 branches principales:

(2) théorie des jeux: situations de décision où interviennent *plusieurs agents* et plus précisément où les conséquences de l'action d'un agent (ou "joueur") dépendent de l'action des autres agents

le jeu de la poule mouillée

Les deux joueurs roulent l'un vers l'autre au milieu de la route. Tous deux arrivent au point de non-retour et doivent décider s'ils cèdent C i.e. s'ils se rabattent sur leur voie, ou s'ils tiennent T i.e. restent au milieu de la route. Ils n'ont pas le temps de voir la décision de l'autre avant de prendre la leur.



http://www.youtube.com/watch?v=U1DEp8R9kwg&feature=related

le jeu de la poule mouillée

Les deux joueurs roulent l'un vers l'autre au milieu de la route. Tous deux arrivent au point de non-retour et doivent décider s'ils cèdent C i.e. s'ils se rabattent sur leur voie, ou s'ils tiennent T i.e. restent au milieu de la route. Ils n'ont pas le temps de voir la décision de l'autre avant de prendre la leur.
✓ si (T, T), l'issue est catastrophique pour tous les deux.
✓ si (T, C), c'est l'idéal pour le joueur 1 qui n'est pas une poule mouillée
✓ si (C, C), les deux sont des poules mouillées, mais ils sont sains et saufs !

	C	T
C	$(3, 3)$	$(2, 4)$
T	$(4, 2)$	$(0, 0)$

les branches de la (TD)

- 3 branches principales:

(3) théorie du choix social (TCS),
parfois appelée 'théorie de la décision collective'

- la (TCS) étudie l'*agrégation* des préférences individuelles en une relation de préférence ou en une décision collective.
- Les premières contributions de la théorie du choix social remontent aux travaux de Borda et de Condorcet sur le vote (fin XVIIIème). Son formalisme ainsi que son résultat fondateur remontent aux travaux pionniers d'Arrow (1951).

le paradoxe de Condorcet

Soient 3 candidats : a, b et c ; et 3 électeurs: Pierre, Jean et Marc, dont les préférences sont comme suit:

Pierre	$a \succ b \succ c$
Jean	$b \succ c \succ a$
Marc	$c \succ a \succ b$

Appliquons la **règle majoritaire** à ces préférences, c'est-à-dire la règle selon laquelle $x \succ_c y$ ssi $x \succ y$ majoritairement:

$$a \succ_c b$$
$$b \succ_c c$$
$$c \succ_c a$$

typologie des situations de décision

- la (TD) n'est pas monolithique: si les théories classiques sont fortement unifiées, elles se distinguent par le genre de situations de décision auxquelles elles sont censées s'appliquer
- la distinction majeure est une tripartition dont la formulation canonique remonte à Luce & Raiffa *Games and Decisions* (1957), l'un des ouvrages pionniers de la théorie de la décision contemporaine
- cette tripartition sépare ces situations selon le type de connaissance dont l'agent dispose sur les conséquences des options qui s'offrent à lui

typologie des situations de décision

“A propos de la distinction certitude-risque-incertitude, supposons qu’un choix doit être fait entre deux actions. Nous dirons que nous sommes dans le domaine de la décision en :

(a) Certitude si l’on sait que chaque action conduit invariablement a une certaine issue (...)

(b) Risque si chaque action conduit à une issue particulière parmi un ensemble d’issues chaque issue se produisant avec une probabilité connue. On suppose que les probabilités sont connues du décideur. Par exemple, une action peut conduire à cette issue risquée : une récompense de 10 dollars si une pièce "équitable" tombe sur face, et une perte de 5 dollars si elle tombe sur pile. Bien sûr, la certitude est un cas dégénéré de risque où les seules probabilités sont 0 et 1.

(c) Incertitude si l’une ou l’autre des actions a pour conséquence un ensemble d’issues dont les probabilities sont inconnues voire non signifiantes." (Luce et Raiffa, 1957, p.13)

typologie des situations de décision individuelle

(i) certitude
action 1 : acheter 3 pommes et 2 bananes pour 5 euros
action 2 : acheter 2 pommes et 3 bananes pour 5 euros

(ii) risque
action 1 : un billet de loterie à 5 euros, 200 billets, 100 euros de prix pour le gagnant
action 2 : un billet de loterie à 10 euros, 300 billets, 250 euros de prix pour le gagnant

(iii) incertitude
action 1 : parier sur Uranus gagnant dans la 3ème, billet à 5 euros
action 2 : parier sur Ulster gagnant dans la 3ème, billet à 5 euros

typologie des situations de décision individuelle

- la TD est largement structurée par cette typologie. Mais pas seulement ; il y a un autre type de décision qui constitue également un sous-domaine de la TD:

(iv) choix intertemporel.
action 1 : obtenir 4 euros demain
action 2 : obtenir 6 euros la semaine prochaine

plan du cours

- 8 séances sur la théorie de la décision individuelle
  - ✓ 2 sur le choix certain
  - ✓ 3 sur le choix risqué
  - ✓ 1 sur le choix intertemporel
  - ✓ 1 sur les neurosciences de la décision
  - ✓ 1 sur les biais et la rationalité
- 4 séances sur la théorie des jeux

le choix certain

introduction aux sciences de la décision
séance 2

M. Cozic

2. les préférences

le choix certain et les préférences

- dans les situations dites de choix certain, on suppose que l'agent sait parfaitement quelle seront les conséquences de chacune de ses actions.
  ✓ on peut se passer d'une représentation de ses croyances
  ✓ on peut omettre la distinction entre les actions et leurs conséquences
- les désirs sont approchés en termes de préférences
  • préférences larges : $a \succeq b$
  (lecture possible: Pierre estime que a est au moins aussi bonne que b)
  • préférences strictes : $a \succ b$
  (Pierre estime que a est strictement meilleure que b)
  • indifférence $a \sim b$
  (Pierre estime que a et b ont la même valeur)

indifférence vs. incomplétude

- Sen (1970)
  "Il est important de distinguer entre l'indifférence et le manque de complétude. Notre langage quotidien est souvent trop relâché pour distinguer entre les deux. Si "je ne sais pas" lequel choisir, cela pourrait signifier que je suis indifférent, mais une interprétation plus naturelle est que je ne peux pas me déterminer. La différence logique entre les deux est assez simple. Considérons les deux énoncés:
  (1) x est au moins aussi bon que y
  (2) y est au moins aussi bon que x
  Dans le cas de l'"indifférence", les deux sont affirmés, et dans le cas de la "complétude", aucun." (p. 3, ma trad.)

les hypothèses sur les préférences

- le modèle élémentaire de la théorie de la décision tient en deux ingrédients: deux hypothèses sur les préférences, et une hypothèse sur la relation entre choix et préférence (hypothèse 'CP', voir plus tard).
- deux hypothèses fondamentales sur les préférences (larges):

(T) transitivité: si $x \succeq y$ et $y \succeq z$, alors $x \succeq z$

(C) complétude: pour tous x, y $x \succeq y$ ou $y \succeq x$

- la (TD) ne suppose pas seulement (T) et (C) dans le cas du choix certain: elles constituent le socle de toute la (TD), y compris quand elle s'occupe du choix incertain.

le choix optimal

- idée: un agent rationnel choisit une action qui est optimale du point de vue de ses préférences.
- supp. que l'agent peut choisir dans l'ensemble $X \subseteq A$. Alors ce qu'il est rationnel de choisir est

$$\text{(CP) } c_{rat}(X) = \{x : \neg \exists y \in X, y \succ x\}$$

autrement dit, il est rationnel de choisir une action qui n'est *dominée* par aucune autre.

- on se sert également de

$$\text{(CP') } c_{rat'}(X) = \{x : \forall y \in X, x \succeq y\}$$

qui est équivalente à (CP) sous les hypothèses (T) et (C) - mais pas en général.

quelques propriétés dérivées

- la relation de préférence stricte associée $\succ$ est le résidu asymétrique de $\succeq$:

$$x \succ y \text{ ssi } x \succeq y \text{ et } \neg(y \succeq x)$$

Proposition

Si $\succeq$ satisfait (T) et (C), alors la relation de préférence stricte associée $\succ$ est

(i) irréflexive ($\forall x$, $\neg(x \succ x)$),
(ii) transitive ($\forall x, y, z$ si $x \succ y$ et $y \succ z$ alors $x \succ z$),
(iii) asymétrique ($\forall x, y$, si $x \succ y$, alors $\neg(y \succ x)$),
(iv) négativement transitive ($\forall x, y, z$, $\neg(x \succ y)$ et $\neg(y \succ z)$ $\Rightarrow \neg(x \succ z)$)

NB: on partira indifféremment d'une relation de préférence large satisfaisant (T) et (C) ou d'une relation de préférence stricte asymétrique et négative transitive.

quelques propriétés dérivées

- la relation d'indifférence associée $\sim$ est le résidu symétrique de $\succeq$:

$$x \sim y \text{ ssi } x \succeq y \text{ et } y \succeq x$$

Proposition

Si $\succeq$ satisfait (T) et (C), alors la relation d'indifférence associée $\sim$ est

(i) réflexive,
(ii) transitive,
(iii) symétrique ($\forall x, y$, si $x \sim y$ alors $y \sim x$)

l'interprétation des préférences

- que signifie au juste le concept de préférence ? (cf. Sen 1991/2002, Broome 2006, Pettit 2006, Hausman 2012)
- 3 interprétations saillantes pour la (TD)

(pr1) les préférences comme désirs comparatifs: *x* préfère *a* à *b* ssi il désire plus *a* que *b*

(pr2) les préférences comme évaluations comparatives totales: *x* préfère *a* à *b* ssi il juge *a* meilleur que *b*, tous les aspects pertinents étant pris en compte

(pr3) les préférences comme choix binaire (ou disposition à choisir): *x* préfère *a* à *b* ssi *x* choisit (ou est disposé à choisir) *a* entre *a* et *b*

l'interprétation des préférences

- les préférences font aussi parfois l'objet d'une

  ✓ interprétation hédoniste selon laquelle *a* est préféré à *b* par *x* ssi *a* procure plus de plaisir que *b* à *x*

  ✓ interprétation en termes d'intérêt individuel ou de bien-être selon laquelle *a* est préféré à *b* par *x* ssi *a* favorise plus le bien-être de *x* que *b*

  ...qui n'ont pas la généralité requise pour la (TD)

- (pr1)-(pr2) mettent en avant les deux principales dimensions des préférences envisagées comme des états mentaux: les dimensions 'jugementielle' et motivationnelle

1.2 la transitivité

Question: y a-t-il des situations dans lequelles on pourrait s'attendre à ce que les gens violent (T) ?

- l'exemple canonique est celui du choix multi-dimensionnel i.e. où l'agent peut choisir entre des options qui se laissent comparer selon plusieurs aspects ou dimensions
- exemple $\sharp$1 (Tversky, 1969 adapté par Bar-Hillel & Margalit, 1988):

	dimension I (QI)	dimension II (expérience)
option x	115	7
option y	117	3
option z	120	0

règle de construction des préférences: on préfère a à b si a excède *b de plus de 3 unités* sur la dimension I, ou, sinon, si a excède b sur la dimension II $\Rightarrow x \succ y \succ z \succ x$

- exemple ♯2 (Anand, 1993). Paul est avec un convive et s'apprête à prendre un des deux fruits offerts:

  X = { petite pomme, orange }
  X' = { orange, grosse pomme }
  X'' = { petite pomme, grosse pomme }

  Si Paul ne prenait en compte que ses goûts, il préfèrerait la grosse pomme à l'orange et l'orange à la petite pomme. Mais en présence des deux pommes, la politesse lui fait préférer la petite pomme à la grosse pomme.
  $\Rightarrow$ préférences cycliques

défense ***normative*** ♯1 de (T)

- défense ♯1: il est *évident* que des préférences rationnelles sont transitives

✓ version ♯1 (a): il est évident que les préférences *rationnelles* sont transitives
✓ version ♯1 (b): il est évident que les préférences sont transitives

- une élaboration possible de la version ♯1 (b) consiste à dire qu'il y a une relation sémantique ou conceptuelle entre les préférences et la transivité.

idée: des préférences qui ne sont pas transitives...ne sont pas vraiment des préférences.

défense *normative* ♯1 de (T)

- Anand (1993) attribue une position de ce genre à Davidson (1993):

  "...la théorie de la décision ressemble à la théorie de la mesure de la masse ou de la longueur, ou à la théorie de la vérité de Tarski. La théorie est dans chaque cas si puissante et si simple, et elle fait tellement partie intégrante des concepts postulés par toute théorie plus complète (qu'il s'agisse de physique ou de linguistique), que nous devons nous efforcer d'accorder nos découvertes, ou nos interprétations, pour préserver la théorie. Si une longueur n'est pas transitive, quel peut bien être le sens d'une mesure de la longueur ? Nous pourrions bien trouver ou inventer une réponse, mais tant que nous n'y parvenons pas nous devons nous efforcer d'interpréter "plus long que" de manière à le rendre transitif. De même "préférer à"." (pp. 361-62)

défense ♯1 de (T)

- rem: quelques lignes avant, Davidson nie défendre l'idée que des préférences sont par définition transitives:

  "J'ai l'air de vouloir maintenir que la théorie de la décision, clle le postulat simple que les gens tendent à faire les actions dont ils croient qu'elles serviront leurs objectifs, est nécessairement vraie, ou peut-être analytique, ou qu'elle énonce en partie ce que nous voulons dire quand nous disons que quelqu'un préfère une option à une autre. Mais en fait je ne veux rien dire de tel, parce que je ne comprends pas ce que cela veut dire." (p. 361)

- objection de Anand (ma reconstruction): si l'on conçoit le concept de préférence par analogie avec celui de longueur, alors (T) peut en effet sembler analytique. Mais il ne semble pas aussi déterminé. On pourrait très bien le concevoir par analogie avec celui du match ou de la compétition entre options (*a* est préféré à *b* si *a* gagne le "match" de la comparaison avec *b*), et alors (T) ne s'impose plus.

les préférences et le bien

- un autre argument, librement inspiré par Hausman (2012, p. 19), en faveur de la version ♯1(a) cette fois:

(h1) les préférences sont des évaluations comparatives qui prennent en compte tout ce qui semble pertinent pour la question de savoir si x est meilleur que y

(h2) la relation “être meilleur que” est analytiquement ou conceptuellement transitive

(h3) si des préférences sont rationnelles, alors elles reflètent les propriétés analytiques ou conceptuelles de leur objet

---

(C) des préférences rationnelles sont transitives

la transitivité de "meilleur que"

- (h2), qui est une thèse sur la valeur ou le bien, et non sur les préférences, est défendue par Broome (1991, 2004):
  - Broome (2004)

    "Prenons un prédicat monadique comme "dangereux" ou "ensoleillé le matin". Désignons le de manière générale par la lettre schématique 'F'. Nous pouvons souvent former à partir de F un prédicat dyadique, ou une relation, que l'on désigne par 'plus F que'. Par exemple, nous formons 'plus dangereux que' et 'plus ensoleillé le matin que'. Appelons cela la 'relation comparative' de F. En anglais, quand F est un adjectif court, 'plus F que' est généralement synonyme de 'Fer than'. De manière irrégulière, 'plus bon que' a pour synonyme 'meilleur que'..."

la transitivité de "meilleur que"

- Broome (2004)

  "Une relation comparative est nécessairement transitive. C'est une caractéristique analytique de l'opérateur 'plus...que": la signification de 'plus...que' implique 'plus *F* que' est transitif. Les caractéristiques les plus formelles de la signification d'un terme sont souvent appelées la 'logique' de ce terme. La logique déontique est la logique de 'doit', par exemple. En ce sens, la transitivité est une caractéristique de la logique de 'plus...que'. (p. 50)

défense *normative* $\sharp$2

- défense $\sharp$2: des préférences intransitives ont de mauvaises conséquences pour l'action
- si ce que l'agent choisit ($c(X)$) n'est pas ce qu'il est rationnel de choisir ($c_{rat}(X)$), alors cela signifie qu'il envisage un choix contre-préférentiel: le choix d'une option x, alors qu'il existe une autre option y strictement meilleure que x.
- supposons que les préférences de Paul vis-à-vis de a, b, c forment un cycle: $a \succ b \succ c \succ a$. Alors tout choix de Paul, quand il est confronté à $X = \{a, b, c\}$ est contre-préférentiel.
- une première version de la défense $\sharp$2: si un agent a des préférences cycliques, alors il ne peut pas obéir à (CP)

défense *normative* ♯2

- rem: si X est infini, il est parfaitement possible que les préférences de Paul soient transitives, mais que toute sélection d'un élément $x \in X$ soit contre-préférentielle.
- autre version: supposons que $c(X) = b$. Si Paul obéit à (CP) quand il le peut, alors $c(\{a, b\}) = a$. On aboutit donc à une situation étrange *du point de vue du choix*. On viole une propriété de cohérence entre choix que l'on appelle la propriété α et sur laquelle nous reviendrons plus tard.

défense $\sharp$2: l'argument de la pompe à finance

- principale défense $\sharp$2: l'argument de la pompe à finance
- stratégie générale: montrer que la violation de (T) conduit à des conséquences qui sont incompatibles avec la rationalité

  - plus précisément, incompatibles avec la rationalité *pratique* $\Rightarrow$ on parle parfois de justification pragmatique de (T)
  - l'argument a été proposé par Davidson, McKinsey et Suppes (1956)

l'argument de la pompe à finance

a = un poste très prestigieux à 50 000 euros/an
b = un poste assez prestigieux à 55 000 euros/an
c = un poste peu prestigieux à 60 000 euros/an
Supposons que Pierre ait des préférences cycliques comme suit :

(i) $a \succ b$
(ii) $b \succ c$
(iii) $c \succ a$

Supp. que Pierre possède a. En vertu de (iii), il devrait être prêt à payer ϵ pour obtenir c ; en vertu de (ii), il devrait ensuite être prêt à payer ϵ' pour obtenir b ; et en vertu de (i), il devrait être prêt à payer ϵ'' pour obtenir a. A la fin de cet échange, il se retrouve donc avec ce qu'il possédait au début, a, mais il a versé $\epsilon + \epsilon' + \epsilon''$.

l'argument de la pompe à finance: commentaires

- la structure complète de l'argument est la suivante:

$$\text{intransitivité} \Rightarrow \text{vulnérabilité} \Rightarrow \text{irrationalité}$$

- objection ♯1 : il n'est pas vrai que intransitivité ⇒ vulnérabilité
- Schick (1986)
  "*Does a person with cyclical preferences have no grounds for declining offers ? Let him look back and see the arrangements he has already paid for. He may then come to see which way the wind is blowing, that if he accepts the current offer, he will then get another, and then another, and still another, every cycle bringing him back to where he was at the start, only poorer. Seeing what is in store for him, he may well reject the offer and thus stop the pump.*"

l'argument de la pompe à finance: commentaires

- dans la version proposée par Schick, on corrige "intransitivité $\Rightarrow$ vulnérabilité" par "intransitivité + myopie $\Rightarrow$ vulnérabilité"
- une autre version peut faire valoir que la transitivité est une norme synchronique de rationalité, tandis que la pompe à finance est étendue temporellement. Cela suggère de corriger "intransitivité $\Rightarrow$ vulnérabilité" par "intransitivité + stabilité des préférences $\Rightarrow$ vulnérabilité"
- dans les deux versions, l'intransivité n'est pas une condition suffisante à la vulnérabilité

la nouvelle pompe à finance

- faiblesse de l'objection de Schick (1986): elle n'élabore pas en détails ce que pourrait être le raisonnement d'un agent perspicace (non-myope)
- Rabinowicz (2000) construit une variante du scénario original, la 'nouvelle pompe à finance', dans laquelle, même s'il est perspicace, un agent dont les préférences sont cycliques est vulnérable.
- idée de base: même quand l'agent décline un échange, l'exploiteur continue de lui en proposer

la nouvelle pompe à finance

- faiblesse de l'objection de Schick (1986): elle n'élabore pas en détails ce que pourrait être le raisonnement d'un agent perspicace (non-myope)
- Rabinowicz (2000) construit une variante du scénario original, la 'nouvelle pompe à finance', dans laquelle, même s'il est perspicace, un agent dont les préférences sont cycliques est vulnérable.
- idée de base: même quand l'agent décline un échange, l'exploiteur continue de lui en proposer

l'ancienne pompe à finance

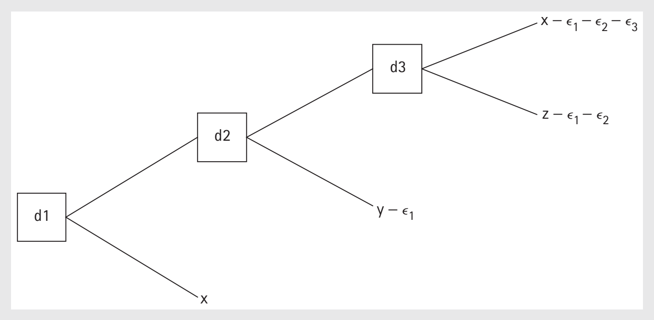
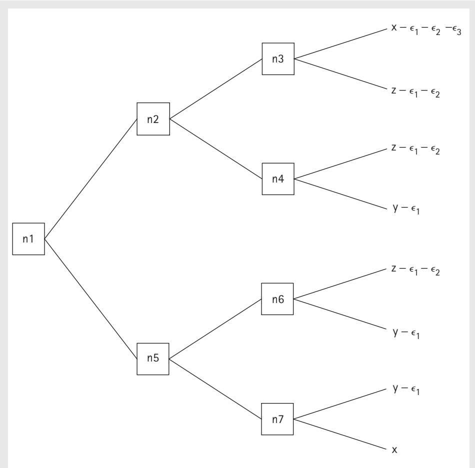


Fig. 6.1. Sophisticated choice and intransitive preference.

la nouvelle pompe à finance



la nouvelle pompe à finance

- Paul préfère

  y à x (et est prêt à échanger pour ϵ_1)

  z à y (et est prêt à échanger pour ϵ_2)

  x à z (et est prêt à échanger pour ϵ_3)

- lecture de l'arbre:

  (n_5, n_7, x) = décline trois fois

  $(n_5, n_7, y - \epsilon_1)$ = décline deux fois puis finalement accepte

  $(n_2, n_4, z - \epsilon_1 - \epsilon_2)$ = accepte, décline puis accepte

  ...

- on suppose qu'un agent perspicace raisonne à rebours (*backwards induction*) i.e. depuis les extrémités de l'arbre jusqu'à la racine

la nouvelle pompe à finance

- résolution de la situation:

  - le haut de l'arbre se simplifie en $x - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3$

  - le bas de l'arbre se simplifie en $z - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3$

  ...et Paul choisit donc la stratégie $(n_2, n_3, x - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)$, et se trouvera moins bien que s'il avait tout décliné et gardé x.

l'argument de la pompe à finance: commentaires

- objection $\sharp 2$: il n'est pas vrai que vulnérabilité $\Rightarrow$ irrationalité (Rabinowicz, 2000)
  - idée: il est trop réducteur de restreindre l'évaluation des attitudes d'un agent, même ses préférences, à leurs conséquences sans prendre en compte leurs motivations

références

- P. Anand (1987), "Are the Preference Axioms Really Rational ?", *Theory and Decision*, 23:2, p.189
- P. Anand (1993), "The Philosophy of Intransitive Preferences", *The Economic Journal*, 103:417, pp. 337-46
- Bar-Hillel, M. & Margalit, A. (1988) "How Vicious Are Cycles of Intransitive Choice", *Theory and Decision*, 24(2), p. 119
- Davidson, D., McKinsey, J.C.C. & Suppes, P. (1955) "Outlines of a Formal Theory of Value", *Philosophy of Science*, vol. 22 (2), pp. 140-60
- Elster, J. (1983) *Sour Grapes*, chap. 1 'Rationality'
- Rabinowicz, W/ (2000) "Money Pump with Foresight"
- F. Schick (1986), "Dutch Bookies and Money Pumps", *The Journal of Philosophy*, vol.83, pp. 112-9

1.3 la complétude

sur la complétude (C)

- des deux propriétés, (C) est celle dont on pense généralement qu'elle est le moins attachée au concept de rationalité: après tout, pourquoi un agent rationnel devrait-il être capable de comparer toute paire d'options ? Pour beaucoup, il n'y a rien d'irrationel dans le fait de tenir *a* et *b* pour incomparables
  - R. Aumann (1962) "Expected Utility without the Completeness Axiom"
    "Of all the axioms of the utility theory, the completeness axiom is perhaps the most questionable. Like others, it is inaccurate as a description of real life ; but unlike them we find it hard to accept even from a normative point of view."
  - Elster (1983)
    "From the point of view adopted here, there are no strong arguments for this condition. In fact, one could argue that it is irrational to commit oneself to a preference for one of the options if one knows very little about either."

l'argument de la petite amélioration

- l'argument de la petite amélioration (dont la prémisse centrale remonte à Savage, 1954/1972) cherche à montrer que (C) n'est pas un principe normatif correct
- imaginons une situation où de deux options x et y, il n'y en a aucune qui nous semble strictement meilleure que l'autre. En outre, il existe un moyen d'améliorer légèrement l'une d'entre elle, disons, x, en x^+. S'il est toujours le cas que x^+ n'est pas strictement préférée à y, alors il semble qu'il n'y a pas indifférence entre x et y, mais incomparabilité.
- exemples:
  x = vélo, x^+ = vélo avec sonnette, y = poney
  x = 1 000 000 euros, x^+ = 1 000 001 euros, y = sauver Pierre, naufragé
  x = devenir professeur de philosophie, x^+ = devenir professeur de philosophie avec 100 euros de plus de salaire, y = devenir marin

l'argument de la petite amélioration

(P1) $\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x)$

(P2) $x^{+} \succ x$

(P3) $(x^{+} \succ x) \wedge (x \sim y) \rightarrow (x^{+} \succ y)$ (PI-transitivité)

(P4) $\neg(x^{+} \succ y)$

$\neg(x \sim y \wedge x+ \succ x)$

$\neg(x \sim y)$

$\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x) \wedge \neg(x \sim y)$

ce que l'on peut abréger par xTy. xTy implique que (C) est fausse.

- pourquoi accepter PI-transitivité ? Considérons une violation:

  $x \succ y$, $y \sim z$, $\neg(x \succ z)$

  Si (C) est le cas, alors

  ou bien $x \sim z$, et alors, si Paul possède y, il est prêt à payer ϵ_1 pour avoir x et par indifférence ne s'oppose pas à revenir à y en recevant de petites sommes telles que $\epsilon_2 + \epsilon_3 < \epsilon_1$.

  ou bien $z \succ x$ et alors Paul accepterait d'avoir x plutôt que y en payant ϵ_1, il accepterait ensuite d'avoir z plutôt que x en payant ϵ_4, et on peut supposer qu'il accepterait d'avoir y à la place de z en étant payé un $\epsilon_5 < \epsilon_1 + \epsilon_4$.
- objection (Gustafsson & Espinoza, 2010): l'argument suppose (C)..., mais la PI-transitivité, avec les autres prémisses, implique la négation de (C).

références

- Chang, R. (2002) "The Possibilité of Parity", *Ethics*, pp. 659-88
- Gustafsson, J. & Espinoza, N. (2010) "Conflicting Reasons in the Small-Improvement Argument", The Philosophical Quaterly, 60, pp. 754-63

3. l'utilité

la notion d'utilité

- on présente souvent la théorie élémentaire de la décision en disant qu'elle affirme, non pas qu'un agent choisit ce qu'il préfère, mais qu'il choisit l'action qui maximise son utilité ou (ce qui revient au même) l'action dont l'utilité est la plus élevée
- formellement, l'utilité d'une action (ou d'une conséquence) est un nombre réel, et une fonction d'utilité assigne à toute action (ou toute conséquence) un réel.
- interprétation: en première analyse, l'utilité est une mesure de l'attitude évaluative de l'agent vis-à-vis des actions ou conséquences

la notion d'utilité

- le terme "utilité" est entendu en différents sens, dans le language ordinaire, en théorie de la décision et en philosophie
- dans le langage ordinaire, l'utilité désigne la propriété de servir à quelque chose; elle peut s'appliquer à un objet, à une personne, à un acte, etc.
  - Ce livre te sera très utile pendant ton voyage.
  - Quelle est l'utilité de m'avoir réveillé si tôt ?
- en théorie de la décision, l'utilité doit se comprendre comme un concept *technique*, qui résulte de plusieurs glissements sémantiques, et qui n'est pas pour autant tout à fait univoque
- le concept technique d'utilité provient de la philosophie utilitariste

la notion d'utilité

- chez les utilitaristes, l'utilité désigne
  - d'abord les propriétés d'un objet qui ont un effet sur le plaisir et la peine des individus (Bentham). Il s'agit donc d'une propriété instrumentale des objets, comme dans le sens ordinaire (ainsi que le soulignent Mongin & d'Aspremont (1998)), mais on restreint les fins pertinentes (il ne s'agit plus que de produire du plaisir).
  - puis chez les économistes du XIXè (Mill, Jevons), le plaisir ou la peine eux-mêmes qu'un objet provoque chez un individu (sur ce point et sur d'autres, cf. Broome, 1991)
- le concept contemporain d'utilité n'est pas plus hédoniste que celui de préférence: en théorie du choix certain, l'utilité est une représentation numérique des préférences

la représentation des préférences

- Définition
  Une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ **représente** une relation de préférence $\succeq$ sur X ssi pour tout $x, y \in X$,
  $$x \succeq y \text{ ssi } u(x) \geq u(y)$$
- idée: l'ordre naturel sur les nombres associés aux objets correspond à l'ordre décrit par la relation de préférence.

l'utilité ordinale

- si l'on n'exige seulement d'une fonction d'utilité qu'elle représente des préférences, alors, s'il existe au moins une fonction qui peut le faire, "beaucoup" d'autres fonctions peuvent le faire également

  Proposition

  Si $u : X \to \mathbb{R}$ représente la relation de préférence $\succ$, alors pour toute fonction strictement croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = f(u(x))$ représente $\succ$ également.
- la représentation d'une relation de préférence est unique à une transformation strictement croissante près. Pour cette raison, on dit que le concept d'utilité que nous venons d'introduire est ordinal : il ne fait qu'encoder des différences de position dans la hiérarchie évaluative de l'agent, pas des différences d'*intensité*.

l'utilité ordinale

- pour une fonction d'utilité ordinale, cela ne fait pas sens de dire que

- l'utilité de *b* est deux fois celle de *a*
- l'utilité de *c* est juste à mi-chemin entre celle de *a* et celle de *b*

si la fonction d'utilité u_1 est telle que $u_1(b) = 4$ et $u_1(a) = 2$, il se peut parfaitement que la fonction d'utilité u_2 représente aussi bien les préférences et soit telle que $u_2(b) = 4$ et $u_2(a) = 3$.

théorème de représentation

Proposition

Supposons que X soit dénombrable. $\succ$ est une relation de préférence asymétrique et négativement transitive sur X ssi il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ qui représente $\succ$.

Preuve (pour X fini).

($\Leftarrow$). Si $u(.)$ représente $\succ$, alors $\succ$ est asymétrique et négativement transitive :

(i) $x \succ y$ ssi $u(x) > u(y)$ ssi $\neg(u(y) \geq u(x))$ donc $\neg(y \succ x)$.

(ii) Si $\neg(x \succ y)$ et $\neg(y \succ z)$ alors $\neg(u(x) > u(y))$ et $\neg(u(y) > u(z))$ ssi $u(x) \leq u(y) \leq u(z)$. Donc $u(x) \leq u(z)$ ssi $\neg(u(x) > u(z))$ donc $\neg(x \succ z)$.

théorème de représentation

Preuve (pour X fini).

($\Rightarrow$). Kreps (1988) donne une preuve par induction sur la taille de X. Le départ de la preuve est immédiat ; si $X = \{x\}$, on pose $u(x) = 1/2$. On suppose qu'on a montré que cela vaut pour tout ensemble de cardinalité $n-1$ et on considère un ensemble X de cardinalité n. On choisit un élément $x* \in X$ et on note $X' = X - x*$. La restriction de $\succ$ sur X' est une une relation de préférence rationnelle et par conséquent, par hypothèse d'induction, il existe une fonction u' qui représente $\succ$ sur X'.
Cas 1 : il existe $x' \in X'$ t.q. $x' \sim x*$. Dans ce cas, $u(x*) = u'(x')$ et on ne modifie pas $u'(x)$ pour $x \in X'$.
Cas 2 : pour tout $x \in X'$, $x* \succ x$. Dans ce cas, $u(x*) = [\max_{x \in X'} u'(x) + 1]/2$ et on ne modifie pas $u'(x)$ pour $x \in X'$.
Noter que l'on pourrait prendre tout réel strictement supérieur à $\max_{x \in X'} u'(x)$. Le choix présent permet de conserver le co-domaine de $u(.)$ dans $(0, 1)$.

théorème de représentation

Preuve (pour X fini).
Cas 3 : pour tout $x \in X'$, $x \succ x*$. Dans ce cas,
$u(x*) = [\min_{x \in X'} u'(x)]/2$ et on ne modifie pas $u'(x)$ pour $x \in X'$.

Cas 4 : il n'existe pas $x' \in X'$ t.q. $x' \sim x*$ et $x*$ n'est ni strictement préféré ni strictement préférable aux éléments de X'. L'idée est alors la suivante : on va considérer l'option $\underline{x}$ qui est la meilleure des options à qui $x*$ est préférée et $\bar{x}$, la moins bonne des options qui sont préférées à $x*$. Dans ce cas, $u(x*) = [u'(\bar{x}) + u'(\underline{x})]/2$. ♠

exemple

On considère d'abord $x_1 \in X$; on lui attribue

$u(x_1) = 1/2.$

On considère ensuite x_2. Supposons que $x_2 \succ x_1$. On se trouve alors dans le Cas 3. Aussi

$u(x_2) = [u(x_1) + 1]/2 = [1/2 + 1]/2 = 3/4$

On considère ensuite x_3, que le décideur classe entre x_1 et x_2 : $x_2 \succ x_3 \succ x_1$. On se trouve alors dans le Cas 4. Aussi

$u(x_3) = [u(x_1) + u(x_2)]/2 = [1/2 + 3/4]/2 = 5/8$

Etc.

le choix certain

Modèle de choix certain:

- l'agent peut choisir entre les éléments d'un ensemble d'opportunités ou d'actions réalisables $X \subseteq A$
- les préférences de l'agent sur A satisfont (T) et (C)
- l'agent choisit, s'il en existe au moins une, une des actions dont la conséquence est $\succeq$-maximale relativement à X.

$$\text{(CP')}\ c_{rat}(X) = \{x : \forall y \in X, x \succeq y\}$$

des choix aux préférences, et vice-versa

- sous l'hypothèse (CP), on peut

(i) *inférer des choix à partir des préférences*. Exemple: si $x \succ y$, alors $c(\{x, y\}) = \{x\}$

(ii) *inférer des préférences à partir des choix*. Exemple: si $c(\{x, y\}) = \{x\}$, alors on peut inférer que $x \succeq y$ et que $\neg(y \succ x)$.

- ce que l'on peut inférer des décisions de l'agent dépend de la notion exacte de décision en jeu:

  ✓ si par construction l'agent ne peut choisir qu'une action par problème de choix (condition d'exclusivité) = $c(.)$ est *monovalente* (pour tout argument X, $c(X)$ est un singleton), on ne peut pas inférer de $c(\{x, y\}) = \{x\}$ que $x \succ y$ (l'agent peut être indifférent entre x et y)

  ✓ si l'on autorise que $c(.)$ soit *plurivalent*, alors ce que l'on peut inférer de $c(\{x, y\})$ devient plus précis : si $c(\{x, y\}) = \{x\}$, alors $x \succ y$ et si $c(\{x, y\}) = \{x, y\}$, alors $x \sim y$.

les fonctions de choix

- Définition
  Soit A un ensemble d'actions réalisables et $\mathbb{F} \subseteq \wp(A)$ un ensemble de situations de choix basées sur A. Une fonction de choix pour $\mathbb{F}$ est une fonction $c : \mathbb{F} \rightarrow \wp(A)$ t.q. $\forall X \in \mathbb{F}$, $c(X) \subseteq X$. On appelle $(\mathbb{F}, c)$ une structure de choix.
- $c(.)$ décrit ce que Paul choisirait dans chacune des situations de choix $X \in \mathbb{F}$

(Q1) si Paul obéit au (MCC), quelles doivent être les propriétés de sa fonction de choix ?

(Q2) quelles propriétés la fonction de choix de Paul doit-elle avoir pour que je puisse en rendre compte avec le (MCC) ?

qu'est-ce que rendre compte d'une fonction de choix ?

- exemples:
  $c(\{x, y, z\}) = \{z\}$; $c(\{x, y\}) = \{y\}$ OUI
  $c'(\{x, y, z\}) = \{z\}$; $c'(\{y, z\}) = \{y\}$ NON
- Soit $(\mathbb{F}, c)$ une structure de choix ;

(i) $(\mathbb{F}, c)$ est rationalisée par une relation de préférence $\succ$ si $(\mathbb{F}, c) = (\mathbb{F}, c_{\succ})$ où $c_{\succ}(X) = \{x \in X : \forall y \in X, \neg(y \succ x)\}$

(ii) $(\mathbb{F}, c)$ est rationalisable s'il existe une relation de préférence qui la rationalise.

la propriété α

revenons au contre-exemple: $c'(\{x, y, z\}) = \{z\}$; $c'(\{y, z\}) = \{y\}$. Si le comportement de Paul obéissait au (MCC) et que $c'\{x, y, z\} = z$, alors Paul préfère strictement z ; donc il doit également choisir z quand il fait face à un sous-ensemble pertinent de $\{x, y, z\}$.

imaginons que Paul ait le choix, au restaurant, entre

y = saumon à l'aneth
z = agneau de 7 heures
x = caille farcie

et qu'il demande l'agneau au serveur. Celui-ci revient un instant après pour servir l'apéritif et lui dit qu'en fait, il n'y avait plus de caille farcie. Paul réfléchit, et opte finalement pour le saumon à l'aneth. N'y a-t-il pas quelque chose d'étrange dans le comportement de Paul ?

le principe sous-jacent qui est violé s'apelle la propriété α.

la propriété α

- Définition (propriété α ou condition de contraction)
  Une structure de choix $(\mathbb{F}, c)$ satisfait la Propriété α si pour tout $X, Y \in \mathbb{F}$,

$$\text{si } X \subseteq Y \text{ et si } x \in c(Y) \cap X, \text{ alors } x \in c(X)$$

"Ìf the world champion in a particular discipline is a Pakistani, he must be a Pakistani champion" (Sen)

cyclicité et propriété α

soit le cycle suivant: $x \succ y \succ z \succ x$; cela implique
- $c(\{x, y\}) = \{x\}$
- $c(\{y, z\}) = \{y\}$
- $c(\{z, x\}) = \{z\}$

Que se passe-t-il pour $c(\{x, y, z\})$?

En vertu de la propriété α, ni x, ni y, ni z ne peuvent appartenir à $c(\{x, y, z\})$. (exercice: expliquez pourquoi !)

la propriété β

- on peut facilement montrer que la propriété α est une conséquence du (MCC): un agent qui obéit à (MCC) obéit nécessairement à la propriété α.
- il existe d'autres propriétés remarquables.
  imaginons que Paul ait le choix, au restaurant, entre

  y = saumon à l'aneth
  z = agneau de 7 heures

  Il va aux toilettes et dit à sa femme: "j'adore ces deux plats, prends celui qui t'inspire". En revenant, celle-ci dit qu'elle n'a pas commandé car le serveur lui a dit qu'était également proposé x = caille farcie. Le téléphone de Paul sonne, et avant de décrocher et de quitter la salle, il dit: "Très bien, dans ce cas prends-moi le saumon - ni l'agneau, ni la caille". N'y a-t-il pas quelque chose d'étrange dans le comportement de Paul ?

la propriété β

- Définition (Propriété β ou condition d'expansion)
  Une structure de choix $(\mathbb{F}, c)$ satisfait la Propriété β si pour tout $X, Y \in \mathbb{F}$,

$$\text{si } X \subseteq Y \; x, y \in c(X), \text{ alors } y \in c(Y) \text{ ssi } x \in c(Y)$$

"If a Pakistani is world champion, then all the Pakistani champions are world champions"

- **Fait**
  Si $c(.)$ est monovalente, alors les Propriétés α et β sont équivalentes.
- **Définition (WAC)**
  Une structure de choix $(\mathbb{F}, c)$ satisfait l'axiome faible de congruence (WAC) si, si pour un $X \in \mathbb{F}$ avec $x, y \in X$, $x \in c(X)$, alors pour tout $X' \in \mathbb{F}$ avec $x, y \in X'$, $y \in c(X')$, $x \in c(X')$ (WAC)
  idée: s'il arrive que x soit choisi alors que y est disponible, x est toujours choisi quand il est disponible et que y est choisi

- Proposition
  Une structure de choix satisfait α+β ssi elle satisfait (WAC)
- Définition
  Une structure de choix est régulière si elle contient (au moins) tous les sous-ensembles finis de *A*.
- Proposition
  Si une structure de choix est régulière, alors elle est rationalisable ssi elle satisfait (WAC)

attention: quelle que soit la structure de choix, si elle est rationalisable, elle satisfait (WAC) ; mais si elle n'est pas régulière, elle peut satisfaire (WAC) sans être rationalisable.

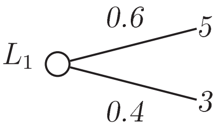
le choix risqué

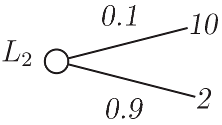
introduction aux sciences de la décision
séance 3

M. Cozic & B. Hill

le risque

- situation d'incertitude lato sensu : l'agent ne sait pas quelle sera la conséquence $c \in C$ qui adviendra s'il choisit l'action $a \in A$
- situation de risque: situation où le décideur a connaissance de relations probabilistes entre actions et conséquences. Il sait pour toute action a et pour toute conséquence c avec quelle probabilité l'action a produit la conséquence c.
- deux tickets de loterie:





le risque

- en théorie du choix risqué, on identifie les actions aux distributions de probabilités qu'elles induisent (par hypothèse) sur les conséquences.
- si C est fini, on peut voir une action P comme une fonction $P : C \rightarrow [0, 1]$ telle que $\sum_{c \in C} P(c) = 1$.
- remarques:
  - les conséquences $c \in C$ doivent se concevoir comme mutuellement exclusives.
  - les conséquences $c \in C$ ne sont pas nécessairement monétaires ; dans le cas particulier où elles le sont toutes, on parlera de "loterie monétaire".

1. l'espérance de gain

la logique de Port-Royal d'Arnauld et Nicole (1662)

LA LOGIQVE

OV

L'ART DE PENSER:

*Contenant, outre les Regles communes, plu-
ſieurs obſeruations nouvelles propres
à former le iugement.*

A PARIS,

Chez { IEAN GVIGNART le pere, au premier Pillier de la grand' Sale du Palais, au Sacrifice d'Abel.
CHARLES SAVREVX, au pied de la Tour de Nôtre-Dame.
IEAN DE LAVNAY, ſous le Porche des Eſcoles de Sorbonne.

M. DC. LXII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

- Q: comment déterminer la valeur d'une action risquée ? comment choisir entre différentes actions risquées ?
- proposition fondamentale: (dans le cas de loteries monétaires) pondérer les différents gains possibles par la probabilité qu'ils arrivent
  - Arnauld & Nicole, *Logique de Port-Royal* (1662) : "...pour juger de ce que l'on doit faire pour obtenir un bien ou pour éviter un mal, il ne faut pas seulement considérer le bien ou le mal en soi, mais aussi la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas, et regarder géométriquement la proportion que toutes ces choses ont ensembles"

exemple

$$EG(L_1) = (0.6 \times 5) + (0.4 \times 3) = 4.2$$
$$EG(L_2) = (0.1 \times 10) + (0.9 \times 2) = 2.8$$

l'espérance de gain

- évaluation des options: l'espérance de gain d'une action identifiée à la loterie monétaire P définie sur C est
$$EG(P) = \sum_{x \in C} P(x).x$$
- règle de décision: choisir l'action dont l'espérance de gain est maximum.

le paradoxe de Saint-Petersbourg

Une pièce non-biaisée est lancée de manière répétée jusqu'à ce qu'elle tombe sur face (F). Les paiements (et probabilités induites) sont comme suit :

série	F	PF	PPF	...	P...PF	...
proba.	1/2	1/4	1/8	...	$1/2^n$	...
gain	2	4	8	...	2^n	...

Question : quelle est la valeur du pari de St-Petersbourg?
Selon le (MEG), $EG(StP) = 1 + 1 + 1 + ... = \infty$!

le paradoxe de Saint-Petersbourg

- prop de Daniel Bernouilli (1738): distinguer le gain monétaire (la conséquence, disons x) et la satisfaction que l'agent en retire ou l'utilité (disons $u(x)$). On peut alors substituer $u(x)$ à x dans l'espérance de gain pour obtenir l'espérance d'utilité :

$$EU(P) = \sum_{x \in C} P(x).u(x)$$

- comment est-ce cela permet de résoudre le Paradoxe de Saint-Petersbourg ? En imposant certaines conditions sur $u(.)$: on suppose que l'argent a une utilité marginale décroissante.
  - exemple $u(x) = log(x)$. Dans ce cas, l'espérance d'utilité $EU(StP) = log(4)$ et la valeur monétaire du Pari est (environ) 4 euros.

remarque sur l'utilité

- la notion d'utilité change de signification par rapport à celle qui servait simplement à représenter les préférences; elle reflète désormais l'intensité de ces préférences (mais voir discussion séance 3)
- exemple
  $L_1 = (5\$, 0.6; 3\$, 0.4)$ vs. $L_2 = (10\$, 0.1; 2\$, 0.9)$
  $L_1 = (5\$, 0.6; 3\$, 0.4)$ vs. $L_3 = (10000\$, 0.1; 2\$, 0.9)$

  les deux situations de choix partagent la même structure du point de vue du classement ; mais (pour une partie d'entre nous), L_1 est préférable à L_2 mais pas à L_3.

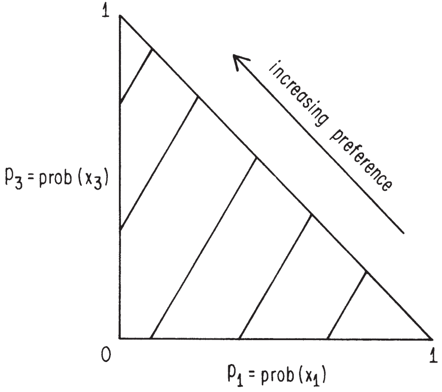
2. l'espérance d'utilité

notations

- options = loteries. Si l'on suppose C fini, alors l'ensemble **P** des loteries se ramène à l'ensemble des fonctions $P : C \to [0, 1]$ telles que $\sum_{x \in C} P(x) = 1$
- si l'on numérote les conséquences $C = \{c_1, ..., c_n\}$, alors on peut écrire une loterie P de la manière suivante :

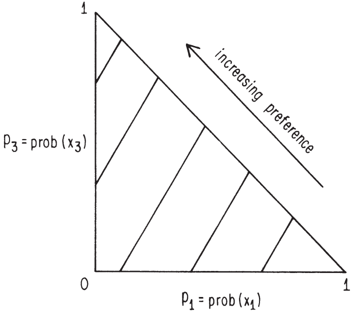
  $P = (c_1, p_1; ...; c_n, p_n)$ ou $P = (P(c_1), ..., P(c_n))$ ou $P = (p_1, ..., p_n)$
- Les lotéries peuvent également être représentées par des arbres de décision ('de profondeur un').

le triangle Marschak-Machina



représentation géométrique de l'ensemble **P** des loteries pour $|C| = 3$. Les trois extrémités sont les loteries dégénérées $\delta_1 = (1, 0)$, $\delta_2 = (0, 0)$ et $\delta_3 = (0, 1)$. p_3 est en ordonnée et p_1 en abscice.
hypothèse: $\delta_3 \succ \delta_2 \succ \delta_1$

courbes d'indifférence dans le triangle MM



les **courbes d'indifférence** sont les loteries entre lesquelles l'agent est indifférent. Deux distributions de probabilités (p_1, p_3) et (p'_1, p'_3) appartiennent à la même courbe d'indifférence ssi l'agent est indifférent entre elles ssi $EU(p_1, p_3) = EU(p'_1, p'_3)$. Une courbe d'indifférence est l'ensemble des distributions de probabilités qui ont la même espérance d'utilité (disons $\bar{u}$) - si l'agent obéit au MEU !

linéarité des courbes d'indifférence

les courbes d'indifférence sont données par des équations de la forme :

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{3} u(c_i).p_i = u(c_1)p_1 + u(c_2)(1 - p_1 - p_3) + u(c_3).p_3$$

Toutes les courbes d'indifférence sont des droites de pente

$$u(c_2) - u(c_1)/u(c_3) - u(c_2)$$

En effet,
$(u(c_2) - u(c_1)).p_1 + \bar{u} = (u(c_3) - u(c_2)).p_3$
$p_3 = u(c_2) - u(c_1)/u(c_3) - u(c_2).p_1 + \bar{u}/u(c_3) - u(c_2)$

mixage de loteries

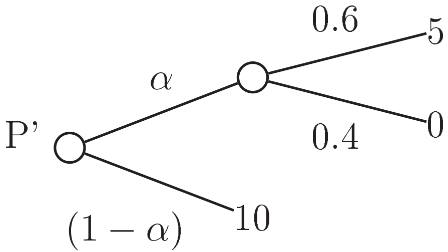
- Définition
  Soit P et Q deux distributions de probabilités sur C ; pour $a \in [0, 1]$, on appelle α-mixage de P et Q la distribution de probabilité notée $\alpha P \oplus (1 - \alpha)Q$ et définie ainsi :

  $$\forall x \in C, \alpha P \oplus (1 - \alpha)Q(x) = \alpha P(x) + (1 - \alpha)Q(x).$$

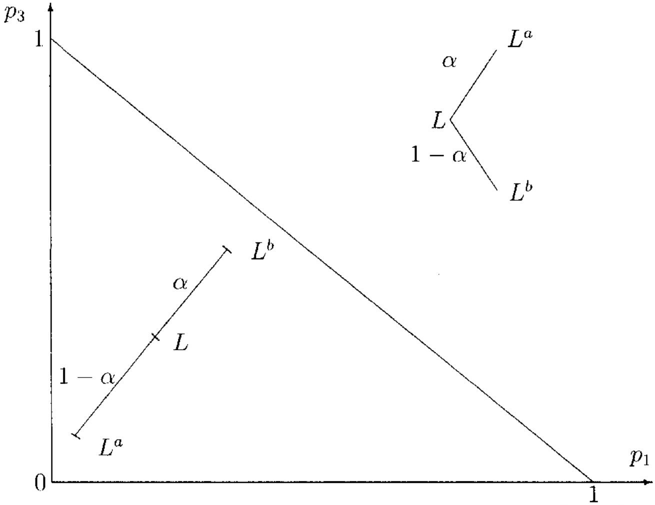
- on peut concevoir les α-mixages de distributions de probabilité comme des loteries composées où la loterie P est tirée avec probabiltié α et la loterie Q avec probabilité $(1 - \alpha)$.
  Cette conception des α-mixages repose sur la supposition de réduction de lotéries composées, selon laquelles les gens 'réduisent' les lotéries composées en lotéries simples en appliquant le calcul des probabilités.

mixage de loteries et loteries composées, exemple

exemple: une manière de représenter l'α-mixage P' de P et de la loterie dégénérée qui donne 10 euros avec probabilité 1



mixage de loteries et triangle MM



mixage de loteries et triangle MM

- chaque loterie peut être conçue comme un mixage de loteries dégénérées, i.e. de loteries qui produisent l'une des conséquences $x \in C$ avec certitude. On note génériquement une telle loterie δ_x.
- soit $P \in \mathbf{P}$ une loterie. Alors on peut vérifier que

  $$P = \sum_{x \in C} P(x).\delta_x$$

  où la "somme" se comprend comme un mixage à $|C|$ arguments.

la préservation par mixage

- Proposition
  EU satisfait la propriété de préservation par mixage (ou linéarité):
  $EU(\alpha P + (1-\alpha)Q) = \alpha EU(P) + (1-\alpha)EU(Q)$

  in french: l'espérance d'utilité d'un α-mixage de P et Q est la somme pondérée (par α et $(1-\alpha)$) de l'espérance d'utilité de P et de celle de Q.

  Preuve.
  $EU(\alpha P + (1-\alpha)Q) = \sum_{x \in C}[\alpha P(x) + (1-\alpha)Q(x)]u(x)$
  $= \sum_{x \in C} \alpha P(x).u(x) + \sum_{x \in C}(1-\alpha)Q(x).u(x)$
  $= \alpha EU(P) + (1-\alpha)EU(Q)$ ♠.

- la réciproque est vraie : si $V : \mathbf{P} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité qui satisfait la préservation par mixage, alors $V(.)$ a une forme d'utilité espérée.

  Preuve:
  - on peut voir toute loterie P comme $\sum_{x \in C} P(x).\delta_x$,
  - si l'on applique ensuite la préservation par mixage on obtient $V(P) = \sum_{x \in C} P(x).V(\delta_x)$
  - il suffit alors de prendre comme fonction d'utilité $v : C \to \mathbb{R}$ la fonction $v(x) = V(\delta_x)$.

utilité espérée et préservation par mixage

- Définition
  Une fonction d'utilité $U : \mathbf{P} \to \mathbb{R}$ a une forme d'utilité espérée (ou est une fonction d'utilité VN-M) s'il existe une fonction d'utilité sur les conséquences (ou fonction d'utilité de Bernouilli) $u : C \to \mathbb{R}$ telle que pour toute loterie P,
  $$U(P) = \sum_{x \in C} u(x).P(x)$$
- Proposition
  Une fonction d'utilité $U : \mathbf{P} \to \mathbb{R}$ a une forme d'utilité espérée ssi elle satisfait la préservation par mixage.

3. le théorème de von Neumann-Morgenstern

espérance d'utilité

Le principe de maximisation d'utilité peut être écrit formellement comme suit:

$$P \preceq Q \text{ si et seulement si } \sum_{c \in C} P(c).u(c) \leq \sum_{c \in C} Q(c).u(c)$$

pour tout $P, Q \in L$.

Si c'est le cas, on dit que u **représente** $\preceq$.

Quand est-ce que les préférences peuvent être représentées ainsi?

indépendance

Considérer la propriété suivante:

Indépendance Pour tout P, Q, R in L et tout $\alpha \in (0, 1)$,

$$P \preceq Q \text{ si et seulement si } \alpha P + (1-\alpha)R \preceq \alpha Q + (1-\alpha)R$$

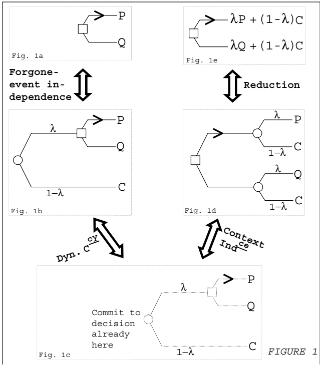
Cette propriété:

- paraît naturelle quand formulée en termes des arbres de décision
- peut être défendue par un argument à partir des principes de conséquentialisme et cohérence dynamique
- est souvent satisfaite

C'est la propriété centrale de la décision dans le risque.

(NB: les versions plus faibles, mais non moins intuitives, auraient suffies pour les résultats techniques qui suivent.)

l'argument dynamique pour l'indépendance



continuité

Considérer la propriété suivante:

Continuity Pour tout P, Q, R dans L, si $P \succ Q \succ R$, il existe $\alpha, \beta \in (0, 1)$ tels que

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \succ Q \succ \beta P + (1 - \beta)R$$

Cette propriété:

- dit qu'une très petite probabilité de décevoir une mauvaise lotérie ne gâche pas une bonne lotérie (et vice versa)
- est généralement considérée comme "technique".

les axiomes

(vNM1) rationalité: $\succeq$ est complète et transitive

(vNM2) indépendance

(vNM3) continuité

théorème de représentation

- Proposition (théorème de représentation)
  Une relation de préférence $\succ$ sur **P** satisfait (vNM 1)-(vNM 3) ssi il existe une fonction d'utilité (de Bernouilli) $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$P \succeq Q \text{ ssi } \sum_{c \in C} u(c)P(c) \geq \sum_{c \in C} u(c)Q(c)$$

  En outre, u' se substitue à u dans cette représentation ssi $u'(.) = a.u(.) + b$ où $a > 0$ (ou encore : u est unique à une transformation affine positive près).

théorème de représentation vNM

- quels usages pour le théorème de représentation ? Principalement trois:
  - usage normatif : l'axiomatisation sert à évaluer normativement le modèle d'espérance d'utilité. En effet, pourquoi après tout obéir à la maximisation de l'espérance d'utilité ? Pourquoi ne pas suivre une autre règle ? Le théorème suggère que si l'on trouve les axiomes sur les préférences plausibles, alors l'espérance d'utilité s'en trouve justifiée.
  - usage descriptif : les préférences entre loteries sont quasiment observables ; par conséquent, une axiomatique comme celle que nous venons de présenter permet de déterminer les implications observables du modèle. Typiquement, quand on veut tester le modèle d'espérance d'utilité, on sélectionne un ou plusieurs axiomes (testables) et on observe le comportement des agents.

théorème de représentation vNM

- quels usages pour le théorème de représentation ? Principalement trois:
  - usage méta-scientifique ou fondationnel: la notion d'utilité n'est pas observable, et ainsi on pourrait se demander qu'est-ce que veut dire avoir une fonction d'utilité. Le théorème fournit une réponse en termes des propriétés des préférences qui, elles, sont (supposémment) observables. On dit que le théorème donne un *fondement* pour la notion d'utilité.
    En outre, le théorème dit quelles propriétés de la fonction d'utilité ont du sens. C'est l'importance de la partie concernant l'unicité: les seules propriétés des fonctions d'utilités qui ont du sens sont celle qui sont "préservées" quand on remplace une fonction d'utilité qui représente les préférences par une autre.

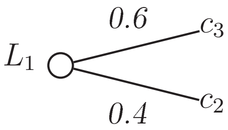
unicité à une transformation affine croissante près

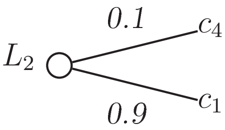
- Rappel de la partie "unicité" du théorème
  Soit $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'utilité de Bernouilli qui EU-représente la relation de préférences $\succeq$ sur **P**. Alors la fonction d'utilité de Bernouilli $v : \rightarrow \mathbb{R}$ EU-représente également la relation de préférences $\succeq$ ssi il existe $a > 0$ et b tels que pour tout $x \in C$,

$$v(x) = au(x) + b$$

ordinalité et cardinalité

- on dit souvent que les fonctions d'utilité $u(.)$ ne sont pas ordinales mais cardinales: elles contiennent plus d'information que la seule façon dont l'individu classe les conséquences, elle représentent aussi l'intensité des préférences
- exemple:





ordinalité et cardinalité

soient deux fonctions d'utilité de Bernouilli $u(.)$ et $v(.)$:

	u	v
c_1	2	2
c_2	3	3
c_3	5	5
c_4	10	50

$u(.)$ et $v(.)$ classent de la même façon les conséquences. Mais, si l'on se base sur l'espérance d'utilité, elles ne classent pas de la même façon les loteries :

$EU_u(L_1) = (0.6 \times 5) + (0.4 \times 3) = 4.2$;
$EU_u(L_2) = (0.1 \times 10) + (0.9 \times 2) = 2.8$
$EU_v(L_1) = (0.6 \times 5) + (0.4 \times 3) = 4.2$;
$EU_v(L_2) = (0.1 \times 50) + (0.9 \times 2) = 6.8$

celsius et fahrentheit

Les mesures Celsius et Fahrenheit de température sont des échelles d'intervalle. Notons $(x)C$ la température du corps x en Celcius
- l'ordre est évidemment préservée: $(a)C > (b)C$ ssi $(a)F > (b)F$.
- les ratios ne sont pas préservés : il se peut par exemple que $(a)C/(b)C \neq (a)F/(b)F$

$\Rightarrow$ pas sens de dire que la température de a est deux fois plus élevée que celle de b. Si $(a)F = 100$ et $(b)F = 50$, alors $(a)C = 37.38$ et $(b)C = 10$.
- mais les ratios de différences de température sont préservés :

$$[(a)C - (b)C/(b)C - (c)C] = [(a)F - (b)F/(b)F - (c)F]$$

les invariants

- Proposition (invariance des ratios de différences
Soit deux fonctions d'utilité de Bernouilli u et v qui EU-représentent $\succ$. Soit quatre conséquences x_1, x_2, x_3, x_4 avec $x_3 \neq x_4$. Les ratios de différences sont invariants de u à v.

$$(v(x_1) - v(x_2))/(v(x_3) - v(x_4)) =$$
$$(u(x_1) - u(x_2))/(u(x_3) - u(x_4))$$

interprétation possible : l'identité $(u(x_1) - u(x_2))/(u(x_3) - u(x_4)) = \lambda$ vaut quand le changement causé par le gain de x_1 et la perte de x_2 est λ fois le changement causé par le gain de x_3 et la perte de x_4.

l'unicité et la révélation des utilités

L'unicité garantit qu'il fait du sens de mesurer ou révéler les utilités sur les conséquences d'un individu qui obéit aux axiomes VNM. Voici comment on peut procéder pour mésurer

- Etape de calibration: puisque l'utilité est unique à une transformation affine croissante près, deux valeurs de la fonction d'utilité sont conventionnelles. Ainsi, prenons n'importe quels $\overline{x}, \underline{x} \in C$ tel que $\overline{x} \succ \underline{x}$ et leur donner n'importe quelles valeurs différentes (où la valeur donnée à $\overline{x}$ et supérieur à celle donnée à $\underline{x}$).
- Par exemple, on prend typiquement comme $\overline{x}$ la conséquence la plus préférée et comme $\underline{x}$ la moins préférée. On dit que $u(\overline{x}) = 1$ et $u(\overline{x}) = 0$.

l'unicité et la révélation des utilités

L'unicité garantit qu'il fait du sens de mesurer ou révéler les utilités sur les conséquences d'un individu qui obéit aux axiomes VNM. Voici comment on peut procéder pour mesurer

- Etape de mesure: pour savoir quelle utilité le décideur attribue à x, on lui demande de déterminer α_x t.q.

$$\delta_x \sim \alpha_x \delta_{\bar{x}} \oplus (1 - \alpha_x)\delta_{\underline{x}}$$

- on appelle α_x la standard-gamble (SG) probability
- α_x mesure l'utilité de x: il s'ensuit de la formule d'espérance d'utilité que $u(x) = \alpha_x$.

preuve du théorème de représentation (existence)

D'ailleurs, une preuve du théorème de représentation procède en démontrant que ce procédé de mesure “marche” toujours: qu'il donne une valeur unique d'utilité pour chaque élément de C et que ces valeurs représentent les préférences selon le critère d'espérance d'utilité.

preuve du théorème de représentation

Nous aurons besoin du fait préliminaire suivant:

Lemme (*) Pour tout $P, Q \in L$ avec $P \succ Q$, et pour tout $\alpha, \beta \in [0, 1]$,

$\beta P \oplus (1-\beta)Q \succeq \alpha P \oplus (1-\alpha)Q$ ssi $\beta \geq \alpha$

($\Rightarrow$). Supposons que $\beta > \alpha$. On peut reécrire
$\beta \bar{P} \oplus (1-\beta)\underline{P}) = \gamma \bar{P} \oplus (1-\gamma)[\alpha \bar{L} \oplus (1-\alpha)\underline{P}]$ où
$\gamma = (\beta - \alpha)/(1-\alpha)$
$\bar{P} \succ \alpha \bar{L} \oplus (1-\alpha)\underline{P}$
$\gamma \bar{P} \oplus (1-\gamma)[\alpha \bar{L} \oplus (1-\alpha)\underline{P}] \succ \alpha \bar{P} \oplus (1-\alpha)\underline{P})$ ssi $\beta > \alpha$
$\beta \bar{P} \oplus (1-\beta)\underline{P}) \succ \alpha \bar{P} \oplus (1-\alpha)\underline{P})$ ssi $\beta > \alpha$
($\Leftarrow$). Laissé à votre sagacité. ♠

preuve du théorème de représentation

Notation

on suppose qu'il existe une "meilleure" conséquence $\bar{x}$ et une "pire" conséquence $\underline{x}$ telles que pour tout $y \in C$, $\bar{x} \succeq y \succeq \underline{x}$. Si C fini et les préférences sont rationnelles, une telle configuration est garantie.

On démontrera que:

- le procédé de mesure décrit précédemment donne toujours une valeur pour chaque élément de C
- la valeur qu'elle donne est unique
- la fonction d'utilité ainsi définie représente les préférences selon le critère de maximisation d'espérance d'utilité.

preuve

Pour les deux premiers points, on établit le résultat suivant.

Lemme (calibration)

Si $\succ$ satisfait (A1)-(A3), alors pour toute conséquence y il existe un unique α_y t.q.[1]

$$y \sim \alpha_y \bar{x} \oplus (1 - \alpha_y)\underline{x}$$

(a) Preuve de l'existence.

Soit $\alpha_y = sup\{\alpha \in [0,1] : \alpha\bar{x} \oplus (1-\alpha)\underline{x}) \preceq y\}$. On va montrer qu'$\alpha_y$ ainsi défini satisfait bien la propriété désirée : $y \sim \alpha_y \bar{x} \oplus (1 - \alpha_y)\underline{x}$. Etant donné les hypothèses, il existe trois cas possibles :

[1] Pour simplifier la notation, on écrit désormais y plutôt que δ_y, et de même pour $\bar{x}$, $\underline{x}$.

preuve

(i). $\alpha_y \bar{x} \oplus (1-\alpha_y)\underline{x} \succ y \succ \underline{x}$. L'axiome de continuité nous conduit à une contradiction. Notons d'abord que pour tout $\alpha < \alpha_y$, $y \succ \alpha\bar{x} \oplus (1-\alpha)\underline{x}$. Or, par l'axiome de continuité, le cas (i) implique l'existence de $\beta \in (0,1)$ tel que $\beta(\alpha_y \bar{x} \oplus (1-\alpha_y)\underline{x}) \oplus (1-\beta)\underline{x} \succ y$. Mais $\beta(\alpha_y \bar{x} \oplus (1-\alpha_y)\underline{x}) \oplus (1-\beta)\underline{x} = \beta\alpha_y \bar{x} \oplus (1-\beta\alpha_y)\underline{x}$. Puisque $\beta\alpha_y < \alpha_y$, contradiction.
(ii). $\bar{x} \succ y \succ \alpha_y \bar{x} \oplus (1-\alpha_y)\underline{x}$. L'axiome de continuité nous conduit derechef à une contradiction par un argument analogue.
(iii). $y \sim \alpha_y \bar{x} \oplus (1-\alpha_y)\underline{x}$ est le seul cas restant.

(b) Preuve de l'unicité. Une conséquence immédiate du Lemme (*): si α et β avec $\alpha > \beta$ satisfont la condition dans la définition de la mesure, alors $\beta\bar{x} \oplus (1-\beta)\underline{x} \sim y \sim \alpha\bar{x} \oplus (1-\alpha)\underline{x} \succ \beta\bar{x} \oplus (1-\beta)\underline{x}$, ce qui contredit la transitivité des préférences.

preuve I

Grace au Lemme de calibration, on a une fonction $u : C \to \Re$ définie de manière suivante: pour tout $y \in C$, $u(y) = \alpha_y$. Venons maintenant au troisième point: il faut démontrer que u représente $\preceq$. C'est-à-dire, il faut démontrer que

Pour tout $P, Q \in L$, $P \succeq Q$ ssi $\sum_{y \in C} P(y).u(y) \geq \sum_{y \in C} Q(y).u(y)$.

Preuve.

- Par le Lemme de calibration, pour chaque y, $y \sim \alpha_y \bar{x} \oplus (1 - \alpha_y)\underline{x}$. Soit P la loterie $(y_1, p_1; \ldots; y_n, p_n)$. Notez que $P = p_1 \delta_{y_1} \oplus (1 - p_1)R_1$, où $R_1 = (y_2, \frac{p_2}{1-p_1}; \ldots; y_n, \frac{p_n}{1-p_1})$. Il s'ensuit de l'axiome d'indépendance que $P \sim p_1(\alpha_{y_1}\bar{x} \oplus (1 - \alpha_{y_1})\underline{x}) \oplus (1 - p_1)R_1 = (y_2, \frac{p_2}{1-p_1}; \ldots; y_n, \frac{p_n}{1-p_1}; \bar{x}, p_1\alpha_{y_1}; \underline{x}, p_1(1 - \alpha_{y_1}))$. En répétant ce raisonnement pour tout y_i, on démontre que $P \sim P'$, où P' est telle que $P'(\bar{x}) = \sum_{y \in C} P(y)\alpha_y$, $P'(\underline{x}) = \sum_{y \in C} P(y)(1 - \alpha_y)$.[2]

preuve II

- De même, $Q \sim Q'$, où $Q'(\bar{x}) = \sum_{y \in C} Q(y)\alpha_y$, $Q'(\underline{x}) = \sum_{y \in C} Q(y)(1 - \alpha_y)$
- Par la Lemme (*), $P \succeq Q$ si et seulement si $\sum_{y \in C} P(y)\alpha_y \geq \sum_{y \in C} Q(y)\alpha_y$
- Par la définition de u, il s'ensuit que $P \succeq Q$ ssi $\sum_{y \in C} P(y).u(y) \geq \sum_{y \in C} Q(y).u(y)$. ♠.

[2] En traçant les arbres de décision, la logique de cette étape sort plus clairement. Tracez tout premièrement la loterie composée obtenue en remplaçant y_1 par $\alpha_{y_1}\bar{x} \oplus (1 - \alpha_{y_1})\underline{x}$. Par indépendance, cette loterie est indifférente à P. Répétant pour tous les y, on obtient une loterie composée qui est indifférente à P. Par notre supposition concernant le rapport entre des loteries composées et les loteries simples (la "Réduction des Loteries Composées"), cette loterie peut être considérée comme le même qu'une loterie simple obtenu en "multipliant les probabilités": c'est la loterie P'.

4. attitudes par rapport au risque

illustration par le triangle MM

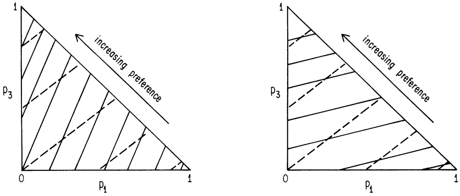


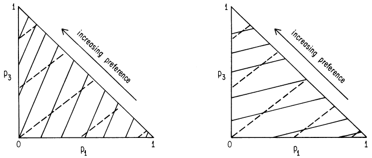
Fig. 3a. Relatively steep indifference curves of a risk averter

Fig. 3b. Relatively flat indifference curves of a risk lover

courbes d'iso-espérance de gain = courbes qui relient les points qui ont la même espérance de gain. Décrites par des équations de la forme suivante :

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^{3} c_i.p_i = c_1.p_1 + c_2.(1 - p_1 - p_3) + c_3.p_3$$

illustration par le triangle MM



(solid lines are expected utility indifference curves)
(dashed lines are iso-expected value lines)

Fig. 3a. Relatively steep indifference curves of a risk averter

Fig. 3b. Relatively flat indifference curves of a risk lover

considérons l'origine 0 c'est-à-dire la loterie (dégénérée) qui donne c_2 avec certitude. Un décideur est risquophode s'il préfère cette loterie à une loterie qui a la même espérance de gain, en particulier à la loterie L_0, intersection de la droite d'iso-espérance de gain qui passe par 0 et de la droite (1,1).

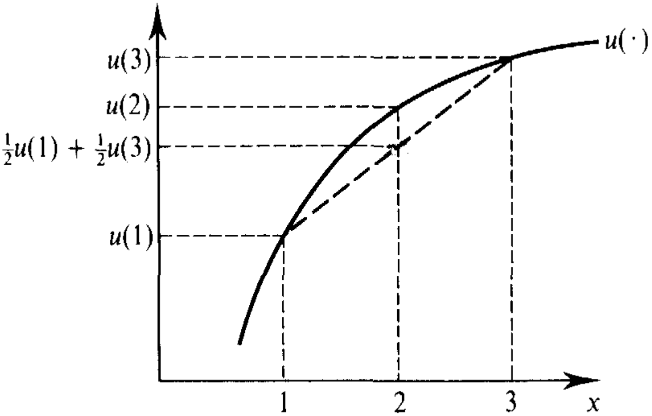
attitudes, définition

- Notation
  Soit $P \in \mathbf{P}$ une loterie monétaire et soit $EG(P)$ l'espérance de gain de P. On note $\delta_{EG(P)}$ la loterie dégénérée qui produit $EG(P)$ avec certitude
- une relation de préférence est
  - risquophobe (ou averse au risque) si pour toute loterie $P \in \mathbf{P}$, $\delta_{EG(P)} \succeq P$
  - neutre à l'égard du risque si pour toute loterie $P \in \mathbf{P}$, $\delta_{EG(P)} \sim P$
  - risquophile si pour toute loterie $P \in \mathbf{P}$, $\delta_{EG(P)} \preceq P$

formes de $u(.)$ et attitudes

- **Définition**
  Soit $f : C \to \mathbb{R}$;
  - f est concave si pour tous $x, y \in C$ et $a \in [0, 1]$, $f(ax + (1 - a)y) \geq af(x) + (1 - a)f(y)$
  - f est affine s'il existe a, b tels que $f(x) = ax + b$
  - f est convexe si pour tous $x, y \in C$ et $a \in [0, 1]$, $f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$
- **Proposition**
  Soit $\succ$ une relation de préférence qui se laisse EU-représenter par une fonction sur les conséquences $u(.)$;
  - $\succ$ est risquophobe ssi $u(.)$ est concave
  - $\succ$ est neutre à l'égard du risque ssi $u(.)$ est affine
  - $\succ$ est risquophile ssi $u(.)$ est convexe

concavité et risquophobie



liens (désirables ?) entre aversion pour le risque et utilité marginale décroissante

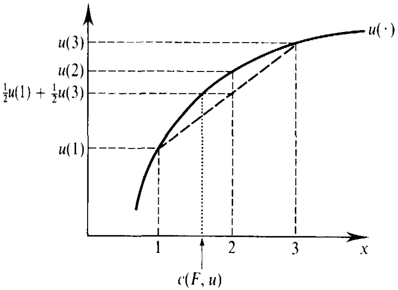
- utilité marginale décroissante (UMD) $\approx$ plus l'agent a de richesse (monétaire), moins l'incrément d'une unité monétaire lui procure d'utilité. $u'(.)$ est non croissante ou encore $u''(.)$ est non positive. Si $u(.)$ est concave, alors (étant donné les conditions mathématiques appropriées), $u'(.)$ est non croissante.
- l'UMD signifie que, à un niveau donné de richesse, l'augmentation d'utilité procurée par le gain d'1 euro est inférieure à la perte d'utilité infligée par la perte d'1 euro. C'est ce que met en évidence la figure pour un niveau de départ de 2 euros : $u(3) - u(2) < u(2) - u(1)$ soit $u(2) > (u(3) + u(1))/2$. De cela suit que l'agent qui a cette fonction d'utilité préfère le statu quo à la loterie $L = 1/2(\delta_3) \oplus 1/2(\delta_1)$. En effet, $EU(\delta_2) = u(2)$ tandis que $EU(L) = (u(3) + u(1))/2$. Donc $EU(\delta_2 > EU(L)$. Graphiquement, $EU(L)$ correspond au milieu du segment $(u(3), u(1))$.

équivalent-certain et prime de risque

- Définition
  Soit P une loterie ; l'ensemble des équivalents-certains de P, noté $C(P)$, est l'ensemble des conséquences $x \in C$ telles que l'agent est indifférent entre la loterie dégénérée qui produit x avec certitude et P : $C(P) = \{x \in C : \delta_x \sim P\}$
- sous certaines conditions, cet ensemble a un seul élément et on parle alors de **l'** équivalent-certain $C(P)$
- sous cette hypothèse, on peut définir la prime de risque $R(P) = EG(P) - C(P)$

équivalent-certain, exemple

équivalent certain de la loterie $L = 1/2(\delta_3) \oplus 1/2(\delta_1)$. On sait que l'agent est risphophobe donc $C(L) < EG(L)$. $C(L)$ s'obtient en prenant l'inverse de $(u(3) + u(1))/2$ (l'utilité espérée de L) par la fonction $u(.)$: $C(L) = u^{-1}((u(3) + u(1))/2)$.



coefficient d'aversion au risque

- définition (Arrow-Pratt)
  Supposons que les préférences de l'individu soient représentables par une fonction d'utilité de Bernouilli deux fois dérivable $u(.)$. Le coefficient absolu d'aversion au risque au point $x \in C$ est défini comme

$$\rho(x) = -u''(x)/u'(x)$$

- fait
  $\rho(x)$ est indépendant de la fonction d'utilité choisie.

5. critique 1: comment EU rend compte du risque

assurance et jeux d'argent I

Il y a des gens qui assurent leurs biens mais qui parient. Comment la théorie d'EU peut-elle rendre compte des deux comportements?

- acheter de l'assurance indique une aversion au risque.
- acheter des paris indique une risquophilie.

Vu ce qui a été dit dans la section précédente, il paraît que la seule manière de rendre compte de ces comportements est avec une fonction d'utilité de ce la forme suivante:

assurance et jeux d'argent II

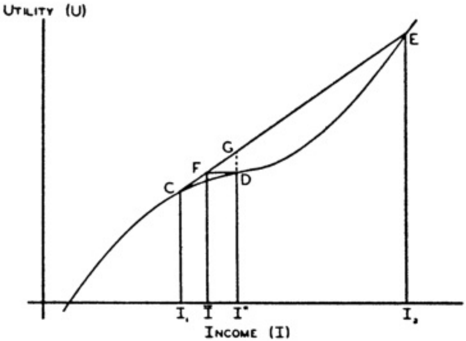


FIG. 2.—Illustration of utility function consistent with willingness of a low-income consumer unit both to purchase insurance and to gamble.

assurance et jeux d'argent III

C'est ce qui a été proposé par Savage et Friedman en 1948.

Or:

- pourquoi tout le monde est sur le point d'inflexion entre risquophilie et risquophobie?
- et si l'on gagne la loterie, et donc accroît tout d'un coup sa richesse, devient-on risqophile? Cesse-t-on par exemple d'assurer ses biens?

la dépendance sur la référence I

Qu'est-ce qui est à la source de ce problème?

Une suggestion:

- les conséquences (les objets de la fonction d'utilité) ne sont pas des valeurs absolues de richesse, comme on le suppose dans l'analyse standard du risque: elles sont des changements de richesse par rapport à un point de référence. Autrement dit, elles sont des gains et des pertes relativement à un point de référence.

la dépendance sur la référence II

Ainsi

- Une fonction d'utilité qui est convexe dans les gains et concave dans les pertes expliquerait l'assurance et les paris. De plus, le point d'inflexion change avec le niveau de richesse, sous l'hypothèse qui le niveau de richesse est le point de référence.

La notion de point de référence a été introduite dans la théorie de la décision par Kahneman & Tversky (1979).

la dépendance sur la référence III

Seul pépin

Comme le notent K & T, l'explication qui vient d'être proposée pour l'assurance et les jeux d'argent n'est pas tout à fait convaincant. De fait, les gens tendent à choisir:

- $(500, 1)$ sur $(1000, 0.5; 0, 0.5)$ [indiquant une risquophobie dans les gains]
- $(-1000, 0.5; 0, 0.5)$ sur $(-500, 1)$ [indiquant une risquophilie dans les pertes]

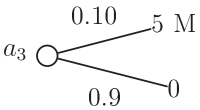
Ainsi la fonction d'utilité serait concave dans les gains et convexe dans les pertes ... l'inverse de ce qu'il faudrait pour rendre compte de l'assurance et des jeux d'argent!

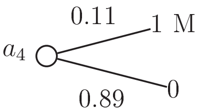
6. critique 2: le paradoxe d'Allais et les anomalies empiriques

Maurice Allais (1911-2010)

Allais, choix 1

Allais, choix 2





Allais, résultats

Comportement modal : $a_1 \succ a_2$ et $a_3 \succ a_4$ $[[(0, 100\%),$ $(100\%, 0)]]$

Intuition : dans le Choix 1, il ne vaut pas la peine d'avoir une chance (même faible) de repartir avec 0 euro pour avoir une chance (seulement) modérée d'obtenir 5M. Donc a_1. Dans le Choix 2, on a dans tous les cas une très grande chance de repartir avec 0 euro. Dans ce cas, autant sacrifier une petite partie de sa probabilité de gagner pour gagner vraiment beaucoup dans l'éventualité où l'on gagne. Donc a_3.

Allais et l'espérance d'utilité

- Qu'est-ce qui ne va pas (du point de vue du MEU) avec le comportement modal ? On peut concevoir $a_1, ..., a_4$ comme des loteries composées. Considérons en effet les loteries P, Q, Φ_0, Φ_1 :
  $P = \Phi_1 = (1M, 1)$
  $\Phi_0 = (0, 1)$
  $Q = (5M, 10/11; 0, 1/11)$
- on peut facilement vérifier que
  $\triangleright a_1 = 0.11P \oplus 0.89\Phi_1$
  $\triangleright a_2 = 0.11Q \oplus 0.89\Phi_1$
  $\triangleright a_3 = 0.11Q \oplus 0.89\Phi_0$
  $\triangleright a_4 = 0.11P \oplus 0.89\Phi_0$

  $\Rightarrow$ **le comportement modal viole l'axiome d'indépendance**

- Une première représentation des quatre loteries :

	0.01	0.89	0.1
a_1	1M	1M	1M
a_2	0	1M	5M
a_4	1M	0	1M
a_3	0	0	5M

Allais dans le triangle MM

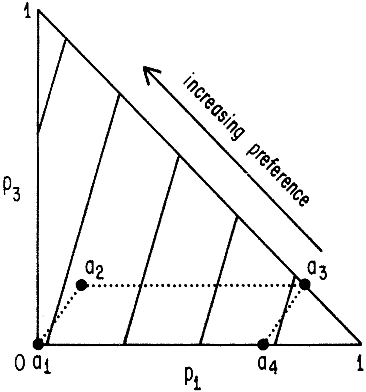


Fig. 4a. Expected utility indifference curves and the

Allais dans le triangle MM

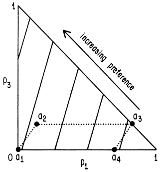


Fig. 4a. Expected utility indifference curves and the Allais Paradox

(a_1, a_2) et (a_3, a_4) sont des droites parallèles:
- la droite (a_1, a_2) est décrite par $y = 10x$
- la droite (a_3, a_4) est décrite par $y = 10x - 8.9$

Allais dans le triangle MM

- point crucial : si les préférences de l'agent obéissent aux axiomes du MEU, alors quelles qu'elles soient, si a_1 est préféré à a_2, alors a_4 doit être préféré à a_3 (et réciproquement). Pourquoi ?
- Parce que dans le triangle MM les courbes d'indifférence d'un agent se conformant au MEU sont (1) linéaires et (2) parallèles entre elles.
- Les courbes d'indifférences "observées" correspondent plutôt à la figure suivante, où les courbes ne sont pas parallèles mais partent dans plusieurs directions (*fan out*). a_1 est "au-dessus" de a_2 tandis que a_4 est "en-dessous" de a_3.

Allais dans le triangle MM

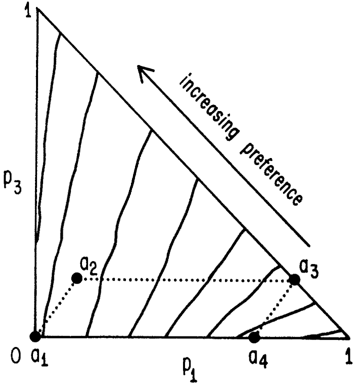


Fig. 4b. Indifference curves which 'fan out' and the Allais Paradox

Figure: D. Kahneman

Figure: A. Tversky

common consequence effect

- le PA est une instance du **common consequence effect** :

choix 1	$a_1 = \alpha\delta_c \oplus (1-\alpha)L_3$	$a_2 = \alpha L_1 \oplus (1-\alpha)L_3$
choix 2	$a_4 = \alpha\delta_c \oplus (1-\alpha)L_2$	$a_3 = \alpha L_1 \oplus (1-\alpha)L_2$

où

(i) δ_c est la loterie (dégénérée) qui produit la conséquence c avec certitude [dans le PA, il s'agit de P soit 1M].
(ii) L_1 est une loterie qui comprend au moins une issue meilleure que c et une issue moins bonne que c [dans le PA, Q dont les conséquences sont 0M et 5M]
(iii) L_3 domine stochastiquement L_2 [dans PA, Φ_0 dom.stoch. Φ_1]

common consequence effect

choix 1	$a_1 = \alpha\delta_c \oplus (1-\alpha)L_3$	$a_2 = \alpha L_1 \oplus (1-\alpha)L_3$
choix 2	$a_4 = \alpha\delta_c \oplus (1-\alpha)L_2$	$a_3 = \alpha L_1 \oplus (1-\alpha)L_2$

• on parle de “conséquence commune” parce que a_1 et a_2 (resp. a_3 et a_4) ont pour conséquence commune L_3 (resp. L_2).

• interprétation de Machina (1987, p. 10) : concevons ces loteries composées comme issues d’un tirage d’une pièce qui tombe sur le côté α ou sur le côté $(1-\alpha)$. Ce qui se passe, c’est que l’aversion au risque des décideurs sur ce qui peut se passer si α change selon ce qui se passe si $(1-\alpha)$. Meilleure est la loterie obtenue si $(1-\alpha)$, plus le décideur est risquophile. (“déjà, si α, je perds beaucoup, alors je ne veux pas prendre de risque.”)

common ratio effect

- une autre anomalie qui met en jeu l'axiome d'indépendance :

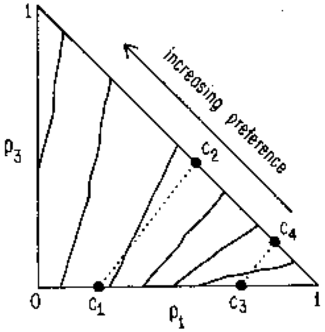
choix 1	$c_1 = (p, X; 1-p, 0)$	$c_2 = (q, Y; 1-q, 0)$
choix 2	$c_3 = (rp, X; 1-rp, 0)$	$c_4 = (rq, Y; 1-rq, 0)$

- exemple (KT 79)

choix 1	$c_1 = (0.8, 4000)$	$c_2 = (1, 3000)$
choix 2	$c_3 = (0.2, 4000)$	$c_4 = (0.25, 3000)$

common ratio effect et triangle MM

- comme pour le common consequence effect, on peut voir avec le triangle de Marschack-Machina que le MEU implique $c_1 \succ c_2$ ssi $c_3 \succ c_4$ (suit de l'axiome d'indépendance).



Indifference curves which fan out and the

résultats

choix 1	$c_1 = (0.8, 4000)$	$c_2 = (1, 3000)$
choix 2	$c_3 = (0.2, 4000)$	$c_4 = (0.25, 3000)$

Comportement modal : $c_1 \prec c_2$ (80 %) et $c_3 \succ c_4$ (65 %)

Interprétation : “Apparently, reducing the probability of winning from 1.0 to 0.25 has a greater effect than the reduction from 0.8 to .2”

reflection effet

choix 1	$c_1 = (0.8, 4000)$	$c_2 = (1, 3000)$
choix 2	$c'_1 = (0.8, -4000)$	$c'_2 = (1, -3000)$

Comportement modal : $c_1 \prec c_2$ et $c'_1 \succ c'_2$

Interprétation : $c_1 \prec c_2$ manifeste risquophobie pour les gains ; mais $c'_1 \succ c'_2$ manifeste risquophilie pour les pertes.

attitudes par rapport au risque

- les choses se compliquent :

(a) risquophilie pour les petites probabilités de gain

choix 1	$d_1 = (1, 500)$	$d_2 = (0.5, 1000)$
choix 2	$d'_1 = (1, 5)$	$d'_2 = (0.001, 5000)$

Comportement modal : $d_1 \succ d_2$ (84 %) et $d'_1 \prec d'_2$ (72 %)

attitudes par rapport au risque

- les choses se compliquent :

(b) ...et risquophobie pour les petites probabilités de pertes !

choix 1	$e_1 = (1, -500)$	$e_2 = (0.5, -1000)$
choix 2	$e'_1 = (1, -5)$	$e'_2 = (0.001, -5000)$

Comportement modal : $e_2 \succ e_1$ (65 %) et $e'_1 \succ e'_2$ (83 %)

synthèse

- on obtient donc la structure quaternaire suivante d'attitudes par rapport au risque :

	petites proba.	proba. moyenne à forte
gain	risquophile	risquophobe
perte	risquophobe	risquophile

Que faire?

- Un ingrédient de base:

(1) une fonction de pondération $\pi : [0,1] \to [0,1]$ qui déforme les probabilités ("probability weighting function") :
"decision weights are inferred from choices between prospects much as subjective probabilities are inferred from preferences in the Ramsey-Savage approach. However, decision weights are not probabilities : they do not obey the probability axioms and they should not be interpreted as measures of degree of belief...Decision weights measure the impact of events on the desirability of prospects and not merely the perceived likelihood of these events."

Que faire.

- Un ingrédient de base:

(1) une fonction de pondération $\pi : [0,1] \to [0,1]$
$\pi(0) = 0$ et $\pi(1) = 1$. La fonction de pondération sur-pondère les petites probabilités et sous-pondère les probabilités moyennes à fortes.

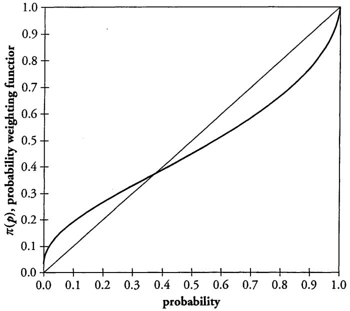
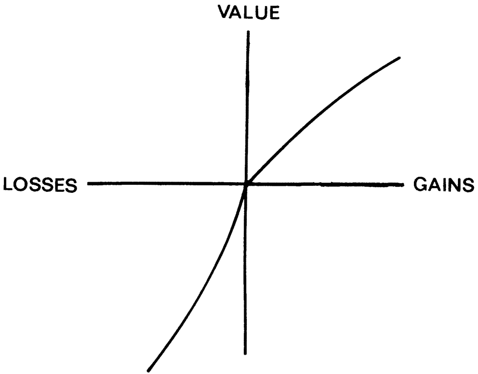


Figure 20.2 A characteristic probability weighting function

Que faire?

- L'autre ingrédient de base (voir section précédente):

(2) une **fonction de valeur** $v(.)$ est
(i) concave pour les gains
(ii) convexe pour les pertes
(iii) *steeper* pour les pertes que pour les gains (*loss aversion*)



le point de référence

- propriété très importante de la fonction de valeur:
  - “An essential feature of the present theory is that the carriers of value are changes in wealth or welfare rather than final states. This assumption is compatible with basic principles of perception and judgment. Our perceptual apparatus is attuned to the evaluation of changes or differences rather than to the evaluation of absolute magnitudes.”

Ce sont les deux ingrédients principaux de la théorie des perspectives proposées par K & T en 1979.

évaluation des loteries

A partir de la fonction de pondération et de la fonction de valeur, on obtient la fonction $V(.)$ qui évalue les loteries :

$$(1) V(P) = \pi(p_1)v(c_1) + \pi(p_2)v(c_2) \tag{1}$$

Cela vaut pour c_1, c_2 ni strictement positifs tous les deux, ni strictement négatifs. Si l'on est dans l'un ou l'autre de ces cas de figure, alors, supposons que c_2 soit la composante la moins risquée (la plus proche de 0),

$$(2) V(P) = v(c_2) + \pi(p_1)[v(c_1) - v(c_2)] \tag{2}$$

L'équation (1) se réduit à l'équation (2) si $\pi(p_1) + \pi(1 - p_1) = 1$ - ce qui n'est pas le cas général.

attitudes par rapport au risque

choix 1	$f_1 = (0.25, 6000)$	$f_2 = (0.25, 4000; 0.25, 2000)$
choix 2	$f_1' = (0.25, -6000)$	$f_2' = (0.25, -4000; 0.25, -2000)$

Comportement modal : $f_1 \prec f_2$ et $f_1' \succ f_2'$
On applique l'équation (1) :
$V(f_1) < V(f_2) \Leftrightarrow$
$\pi(0.25).v(6000) < \pi(0.25).[v(4000) + v(2000)] \Leftrightarrow$
$v(6000) < [v(4000) + v(2000)]$ - ce dont on peut rendre compte par v concave pour les gains.

$V(f_1') > V(f_2') \Leftrightarrow$
$\pi(0.25).v(-6000) > \pi(0.25).[v(-4000) + v(-2000)] \Leftrightarrow$
$v(-6000) < [v(-4000) + v(-2000)]$ - ce dont on peut rendre compte par v convexe pour les pertes.

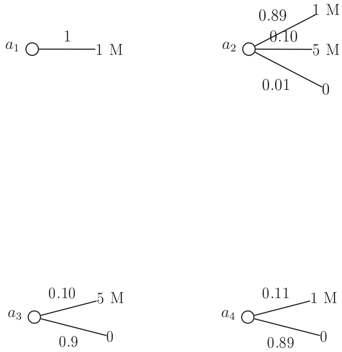
attitude par rapport au risque

- attention : dans le MEU, l'attitude par rapport au risque dépend exclusivement de la fonction d'utilité. Dans la TP, ce n'est plus le cas : la fonction de pondération participe également à l'attitude par rapport au risque.

choix 1	$g_1 = (0.001, 5000)$	$g_2 = (1, 5)$
choix 2	$g'_1 = (0.001, -5000)$	$g'_2 = (1, -5)$

Comportement modal : $g_1 \succ g_2$ et $g'_1 \prec g'_2$ (risquophilie pour gain et risquophobie pour perte).
$g'_1 \succ g'_2 \Leftrightarrow \pi(0.001).v(5000) > v(5)$ donc $\pi(0.001) > v(5)/v(5000) > 0.001$ si v est concave. π grossit donc les petites probas.

common consequence effect



common consequence effect

comportement modal : $a_1 \succ a_2$ et $a_3 \succ a_4$.
On en infère $v(1M) > \pi(0.89).v(1M) + \pi(0.10).v(5M)$ et $\pi(0.10).v(5M) > \pi(0.11).v(1M)$. Donc

$v(1M) > \pi(0.89).v(1M) + \pi(0.11).v(1M)$
$v(1M) > [\pi(0.89) + \pi(0.11)].v(1M)$
$1 > \pi(0.89) + \pi(0.11)$

propriété de subcertainty est la suivante : $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$.
"...subcertainty captures an essential element of people's attitudes to uncertain events, namely that the sum of the weights associated with complementary events is typically less than the weight associated with the certain event."

common ratio effect

choix 1	$c_1 = (0.8, 4000)$	$c_2 = (1, 3000)$
choix 2	$c_3 = (0.2, 4000)$	$c_4 = (0.25, 3000)$

Comportement modal : $c_1 \prec c_2$ (80 %) et $c_3 \succ c_4$ (65 %)

$\pi(1).v(3000) > \pi(0.8).v(4000)$ $\quad$ $\pi(0.2).v(4000) > \pi(0.25).v(3000)$

$\pi(1)/\pi(0.8) > v(4000)/v(3000)$ $\quad$ $v(4000)/v(3000) > \pi(0.25)/\pi(0.2)$

$\Rightarrow \pi(1)/\pi(0.8) > \pi(0.25)/\pi(0.2)$

pour $p > q$ et $r \in (0, 1)$, la propriété de subproportionality est la suivante : $\pi(p)/\pi(q) > \pi(rp)/\pi(rq)$.

références

- Gilboa, I. (2009) *Theory of Decision under Uncertainty*, Cambridge: CUP
- Gilboa, I. (2010) *Rational Choice*, Cambridge, Mass: MIT Press {chap. 4 (informel) et App. B4 (formel) }
- Kreps, D. (1988), *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press {chap. 1-3 }
- Wakker, P. (2010), *Prospect Theory*, {chap. 1-3 }

le choix intertemporel

introduction aux sciences de la décision

M. Cozic

- Saint Augustin, *Confessions*, VIII, 7, 17

  “Donnez-moi la chasteté et la continence,...

  ...mais pas encore”

exemples

les choix intertemporels sont des décisions qui mettent en jeu des arbitrages entre des coûts et des bénéfices (tels qu'appréciés par l'agent) qui surviennent à différents moments

- acheter un nouveau scooter ou placer l'équivalent en assurance-vie
- travailler ce soir sur un article à rendre la semaine prochaine
- continuer ses études ou entrer sur le marché du travail
- aller au cinéma ce soir ou plutôt la semaine prochaine
- fixer le montant épargné automatiquement chaque mois

préliminaires

- les choix intertemporels ont attiré l'attention des philosophes et moralistes depuis toujours ; et des économistes depuis la naissance de la discipline à la fin du XVIIIème
- l'économie moderne a développé la formalisation mathématique du choix intertemporel (Samuelson, 1937) et en fait un usage très intensif (tant descriptif que normatif)
- depuis une vingtaine d'années, emergence d'études interdisciplinaires (économie / psychologie cognitive / neurosciences) sur le choix intertemporel

1. Les préférences temporelles

préférences temporelles

- idée fdtale : les agents ont des préférences temporelles (pures), i.e. des plans d'actions sont préférés à d'autres uniquement en vertu de différences dans la position temporelle des conséquences.
- exemple : $(c, 0) \succ (0, c)$

  où c est une "bonne" conséquence du point de vue de l'agent et 0 le *statu quo*. L'individu préfère obtenir plus tôt la bonne conséquence. Les deux plans d'actions (chacun comportant deux périodes t_0 et t_1) contiennent les mêmes conséquences, mais leur distribution temporelle diffère. Et cela fait une différence pour l'individu.
- préférences temporelles $\neq$ préférences calendaires (Strotz 1956) : je peux préférer gagner un dîner samedi soir plutôt que ce soir parce que ce soir, on est en semaine, je suis plus fatigué, ma femme ne pourra pas m'accompagner, etc. - avec les préférences temporelles, on fait abstraction de toute propriété particulière des dates hormis leur succession temporelle

préférence temporelle et actualisation

- retour à l'exemple : $(c, 0) \succ (0, c)$

  question : s'il l'on fait abstraction de toute propriété calendaire des dates, comment rendre compte de ces préférences ?

- idée: la valeur d'une conséquence est pondérée selon sa position temporelle = actualisation.

- une spécification simple de cette idée consiste à supposer que la valeur d'un plan d'action est déterminée par l'addition des utilités actualisées:

  $U(c, 0) = u(c) + \delta u(0)$

  $U(0, c) = u(0) + \delta u(c)$

  $u(.)$ est l'utilité instantanée

  δ est l'actualisation = l'impact de la distance temporelle sur l'évaluation

- si $\delta < 1$, $u(c) > 0$ et $u(0) = 0$, alors $U(c, 0) > U(0, c)$

préférence temporelle et actualisation

- δ reflète l'importance que le décideur accorde au moment du choix à son utilité instantanée dans le futur - ou encore le poids que le "moi présent" du décideur accorde à son "moi futur"
- quand il y a plusieurs périodes $t \in \{0, 1, ..., T\}$, on suppose une fonction d'actualisation qui spécifie pour chaque période t la pondération $D(t)$ de l'utilité instantanée en t.
- le taux d'actualisation est le taux de décroissance de la fonction d'actua. soit (version continue, si la fonction est dérivable)

$$\rho(t) = -D'(t)/D(t)$$

- le facteur d'actualisation est $f(t) = exp(-\rho(t))$ (cf. intérêts composés continument)

préférence temporelle et actualisation, versions discrètes

- taux d'actualisation
  version discrète $\sharp 1$: $\rho_d^1(t) = -\frac{D(t)-D(t-1)}{D(t-1)}$
  version discrète $\sharp 2$: $\rho_d^2(t) = -\frac{D(t)-D(t-1)}{D(t)}$
  supp. que $u(x) = x$, que $D(t-1) = D(0) = 1$ et que Paul est indifférent entre 100 euros maintenant et 400 euros à t donc $D(t) = 0.25$.
  • $\rho_d^1(t) = -(0.25-1)/1 = 0.75$
  (de combien diminue la pondération quand on passe de $t-1$ à t)
  • $\rho_d^2(t) = -(0.25-1)/0.25] = 3$
- facteur d'actualisation: $f_d(t) = D(t)/D(t-1)$

allure de l'actualisation

- on suppose en général que la fonction d'actualisation décroît (*ceteris paribus*, plus une conséquence c est temporellement éloignée, plus elle perd de sa valeur du point de vue du présent), même si cela ne *semble* pas toujours être le cas
- exemple: aux Etats-Unis, certains enseignants ont le choix entre être payés pendant les mois de l'année scolaire ou être payé sur les 12 mois de l'année; ils préfèrent majoritairement être payés sur les 12 mois.

- attention, interprétation délicate: ce comportement peut s'expliquer non pas par le fait que les enseignants valorisent plus leurs salaires d'été quand ils les reçoivent plus tard (actualisation non-décroissante), mais par le fait qu'ils veulent s'empêcher de dépenser cet argent trop tôt (ils s'auto-contraignent).

rationalité des préférences temporelles ?

- question normative: est-il rationnel d'avoir des préférences temporelles?
- J. Rawls, philosophe (1971, par. 45)

  "La rationalité exige une attitude impartiale à l'égard des différentes parties de notre vie. La seule différence de position temporelle, le fait que quelque chose arrive plus ou moins tôt, ne constitue pas une raison pour avoir plus ou moins d'égard vis-à-vis d'elle. S'agissant d'un avantage présent ou dans un futur proche, il va de soi qu'on lui donne plus de poids à cause de son degré plus élevé de certitude ou de probabilité; et il nous faut prendre en compte les changements de notre situation et de notre psychologie. Mais rien de tout ceci ne justifie que nous préférions un bien présent moins grand à un bien futur plus grand simplement parce que le premier est plus proche dans le temps."
- Pigou, économiste (1902)

  "notre faculté téléscopique est défective, aussi voyons-nous nos plaisirs futurs comme s'ils étaient à une échelle réduite."

identité personnelle et préférences temporelles

- on peut reformuler la position de Rawls comme défendant l'impartialité vis-à-vis de ses différents soi (présent, futurs); mais pourquoi le moi présent devrait-il se soucier du moi futur ?
- Parfit (1984)
  "Mon souci pour mon futur peut correspondre au degré de connexion entre moi, aujourd'hui, et moi, dans le futur...puisque la connexion est presque toujours plus faible sur de longues périodes, je peux rationnellement attacher moins d'importance à mon futur."

2. actualisation exponentielle et cohérence temporelle

l'actualisation exponentielle

- le modèle classique de préférence temporelle est le modèle d'actualisation exponentielle (MAE)
$U(c_0, c_1, c_2, c_3) = u(c_0) + \delta u(c_1) + \delta^2 u(c_2) + \delta^3 u(c_3)$

$$\boxed{U^t(c_t, ..., c_T) = \sum_{k=0}^{T-t} \delta^k . u(c_{t+k})}$$

avec $0 < \delta < 1$
- $U^t(.)$ est l'utilité d'une suite de conséquences *du point de vue du moment présent t*
- T est la dernière période

l'actualisation exponentielle

$$\boxed{U^t(c_t, ..., c_T) = \sum_{k=0}^{T-t} \delta^k . u(c_{t+k})}$$

- $D(t) = \delta^t$ diminue avec le temps ($D'(t) \leq 0$)
- $D(t)$ diminue à un taux constant (Ex: le rapport entre $D(2)$ et $D(4)$ est la même qu'entre $D(28)$ et $D(30)$). Le taux d'actualisation est constant:
  version continue: $\rho = \rho(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)} = -\frac{\delta^t . ln(\delta)}{\delta^t} = -ln(\delta)$
  version discrète: $\rho_d^1(t) = 1 - \delta$
- le facteur d'actualisation est aussi constant: $f(t) = \delta$

cohérence temporelle, exemple préliminaire

- Paul a le choix entre 2 plans d'action : statu quo $(0, 0, 0)$ ou $(0, m, a)$: rien à $t = 0$, ménage (désagréable) à $t = 1$ et environnement agréable à $t = 2$.
- supposons que $u(m) = -6$ et $u(a) = +8$ et $(0, 0, 0) \prec (0, m, a)$; alors $U^0(0, m, a) = 0 - \delta 6 + \delta^2 8 > 0$
- Paul reconsidère son plan à $t = 1$: $U^1(m, a) = -6 + \delta 8 = U^0(0, m, a)/\delta > 0$ donc $U^1(m, a) > U^1(0, 0)$; en $t = 1$, le décideur préfère toujours ranger puis profiter du rangement au statu quo $\Rightarrow$ Paul est cohérent temporellement : ses préférences futures confirment ses préférences présentes.

cohérence temporelle et stationnarité

- stationnarité des préférences (version $\sharp 1$, interprétation diachronique, cf. Frederick & al., 2002) Soient deux suites de $(c_t, ..., c_T)$ et $(c'_t, ...c'_T)$ qui commencent de la même façon ie $(c_t = c'_t)$:

$$U^t(c_t, ..., c_T) \geq U^t(c'_t, ...c'_T) \text{ ssi}$$
$$U^{t+1}(c_{t+1}, ..., c_T) \geq U^{t+1}(c'_{t+1}, ...c'_T)$$

- idée: si rien n'a changé si ce n'est l'éloignement temporel par rapport au moment où les deux plans d'actions commencent à différer, alors les préférences sur les portions restantes des plans d'actions doivent s'aligner sur les préférences initiales sur les plans d'actions complets
  - parfois appelé longitudinal consistency

cohérence temporelle et stationnarité

- remarque: le (MAE) implique cette version $\sharp$1 de la stationarité des préférences si l'on suppose que les utilités instantanées et le facteur d'actualisation de U^t et U^{t+1} sont identiques
- exemple :
- situation $\sharp$ 1: 1100 euros dans 13 mois plutôt que 1000 euros dans 12 mois évalués en t
- situation $\sharp$ 2:1100 euros dans un mois plutôt que 1000 euros tout de suite évalués à $t+$ 12 mois

cohérence temporelle et stationnarité

- stationnarité des préférences (version ♯2, interprétation synchronique, cf. Koopmans, 1960) Soient deux plans d'actions $(c_t, ..., c_T)$ et $(c'_t, ...c'_T)$ qui commencent de la même façon i.e. $(c_t = c'_t)$:

$$U^t(c_t, ..., c_T) \geq U^t(c'_t, ...c'_T) \text{ ssi}$$
$$U^t(c_{t+1}, ..., c_T) \geq U^t(c'_{t+1}, ...c'_T)$$

- exemple :
  - situation ♯ 1': 1100 euros dans 13 mois plutôt que 1000 euros dans 12 mois évalués en t
  - situation ♯ 2': 1100 euros dans un mois plutôt que 1000 euros tout de suite évalués en t
  - parfois appelé cross-sectional consistency

stationnarité, (encore une) autre formulation

- une version de la théorie se développe non pas à partir des préférences entre suites de conséquences mais entre des paires (x, t) de conséquences datées.
  - les préférences ont alors la forme $(x, t) \succ (y, s)$: Paul préfère obtenir x en t à obtenir y en s
  - le (MAE) a alors la forme

$$\boxed{U(x, t) = \delta^t \cdot u(x)}$$

- stationnarité des préférences (version ♯3, Fishburn & Rubinstein, 1982): pour toutes conséquences $x, y \in C$ et moments $t, s, t + \tau, s + \tau$

$$\text{si } (x, t) \sim (y, t + \tau), \text{ alors } (x, s) \sim (y, s + \tau)$$

remarques sur l'axiomatisation du MAE

- Fishburn & Rubinstein (1982) fournissent l'une des axiomatisations de référence du MAE à partir de propriétés sur les préférences entre conséquences datées.
- la propriété cruciale de cette axiomatisation est (la version $\sharp 3$ de) la stationarité.
- dans cette axiomatisation, le facteur d'actualisation δ et la fonction d'utilité instantanée u représentent collectivement les préférences de l'agent

  ✓ si l'agent obéit aux axiomes, on peut choisir n'importe quel $\delta \in (0, 1)$

  ✓ un couple (δ, u) peut être "plus impatient" qu'un couple (δ', u') alors que $\delta > \delta'$.

l'axiomatisation de Fishburn & Rubinstein (1982)

Le décideur a une relation de préférence $\succeq$ sur $X \times T$ où $X \subseteq \mathbb{R}$ est l'espace des conséquences et $0, 1 \in T$

(Ax1) [Ordre faible] $\succeq$ est transitive et complète.

(Ax2) [Monotonie] Si $x > y$, alors $(x, t) \succ (y, t)$

(Ax3) [Impatience] Si $s < t$, alors (i) si $x > 0$, alors $(x, s) \succ (x, t)$, (ii) si $x = 0$, $(x, s) \sim (x, t)$ et (iii) si $x < 0$, $(x, t) \succ (x, s)$

(Ax4) [Continuité]

(Ax5) [Stationarité] pour toutes $x, y \in X$ et $t, s, t + \tau, s + \tau \in T$, si $(x, t) \sim (y, t + \tau)$, alors $(x, s) \sim (y, s + \tau)$

l'axiomatisation de Fishburn & Rubinstein (1982)

- Théorème de représentation

  Si (Ax1)-(Ax5), pour tout $0 < \delta < 1$, il existe une fonction continue croissante u sur X tq

  (i) pour tout $(x, t), (y, s) \in X \times T$,

  $$(x, t) \succeq (y, s) \text{ ssi } \delta^t \cdot u(x) \geq \delta^s \cdot u(y)$$

  (ii) $u(0) = 0$ si $0 \in X$ et $x \cdot u(x) > 0$ pour tout $X \backslash \{0\}$

  (iii) si T est un intervalle, étant donné δ, $u(.)$ est unique à une multiplication près par des constantes positives sur $\{x \in X : x > 0\}$ et $\{x \in X : x < 0\}$.

autres propriétés du (MAE), cf. Frederick & al. (2002)

1. les complémentarités/rivalités entre conséquences à différents moments sont exclues

- exemple: la préférence de Paul entre une pizzeria et un Indien demain soir n'est pas affectée par le fait qu'il aille ou non à la pizzeria ce soir

2. les utilités $u(.)$ sont indépendantes du temps.
3. la fonction d'actualisation n'est pas sensible au genre de conséquence en jeu

- il n'y a pas une fonction d'actualisation pour les conséquence de telle sorte, une autre pour les conséquence de telle autre sorte, etc.

références

articles

- Fishburn, P. & Rubinstein, A. (1982) “Time Preference”, *International Economic Review*, 23(3)
- Koopmans, T. (1960) “Stationary Ordinal Utility and Impatience”, *Econometrica*, 28, 287-309
- Samuelson, P. (1937) “A Note on Measurement of Utility”

références

panoramas

- Chabris, C., Laibson, D. & Schuldt, J. (2008) “Intertemporal Choice”, *Palgrave Dictionary of Economics*
- Read, D (2004) Intertemporal choice In: D. Koehler & N. Harvey (eds) *Blackwell Handbook of Judgment and Decision Making*, pp. 424-443. Oxford: Blackwell
- Laibson, D. (2003) “Intertemporal Decision Making” *Encyclopedia of Cognitive Science*, Nature Publishing Group: London.
- Manzini, P. & Mariotti, M. (2009) “Choice over Time” in Anand, P. & al. *The Handbook of Rational and Social Choice*, OUP

3. incohérence temporelle et actualisation hyperbolique

décroissance du taux d'actualisation

- dans le MAE, le taux d'actualisation est donc constant
- anomalie empirique: données en faveur de la décroissance du taux d'actualisation. Exemple: Thaler, 1981

  Question : pour quelle somme X seriez vous indifférent entre (a) 15 \$ maintenant et (b) X dans [1 mois/1 année/10 ans] ?

  Réponse médiane : [20 \$ / 50 \$ / 100 \$], ce qui correspond à un taux d'actualisation annuel moyen de [345 % / 120 % / 19 %]
- par ailleurs, plusieurs études montrent qu'une fonction d'actualisation hyperbolique est plus adéquate aux données expérimentales qu'une fonction exponentielle.

décroissance du taux d'actualisation

- rem ♯1: questions méthodologiques soulevées par les mesures de l'actualisation. On suppose en général

  - fonction d'utilité linéaire/argent

  - consommation immédiate; dans le cas des conséquences monétaires, on suppose qu'il n'y pas d'effet des taux d'intérêt hors-laboratoires (cf. Coller & Williams, 1999)

  - confiance des sujets dans le fait qu'ils obtiendront bien la conséquence déterminée à la date déterminée

- rem ♯2: toutes les données empiriques ne sont pas aussi claires, cf. Read (2001) et Coller, Harrison & Ruström (2003).

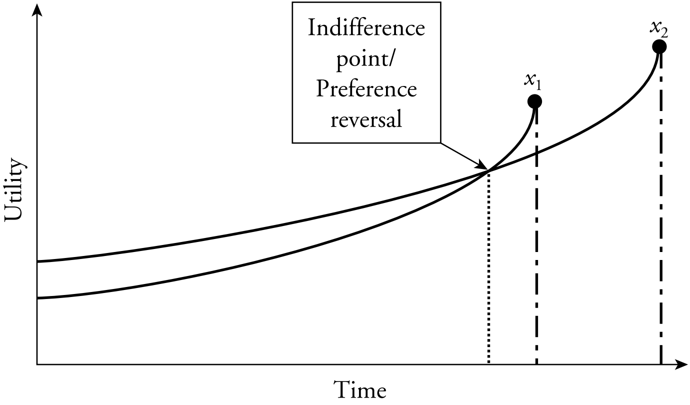
le biais du présent

- l'anomalie empirique la plus célèbre est certainement la violation de la cohérence temporelle que l'on appelle biais du présent (*present time biais*) ou effet d'immédiateté (*immediacy effect*). Elle se traduit (en principe) par l'observation de préférences qui violent une forme ou une autre de stationnarité.
- typiquement: $(x, t) \succ (y, s)$ mais $(y, s + \tau) \succ (x, t + \tau)$ (avec, généralement, (a) pour un s quelconque, $(y, s) \succ (x, s)$ et (b) $t \prec s$). On désigne souvent (x, t) comme l'option smaller-sooner, (y, s) comme l'option larger-later.
- rem: on parle parfois, improprement, de renversement des préférences

le biais du présent

- une des premières démonstrations expérimentales du phénomène: Kirby & Herrnstein (1995)
- idée: 1/ on propose *SS* = smaller-sooner dans un futur proche et *LL*= larger-later peu de temps après. On augmente progressivement l'intervalle entre *SS* et *LL* jusqu'à ce que que *SS* soit préféré.

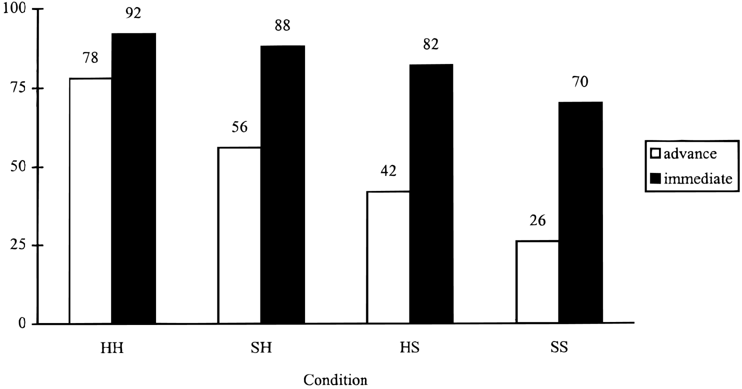
  2/ on garde cet intervalle mais on éloigne progressivement le moment où *SS* sera obtenu (que l'on appelle parfois le "*front-end delay*"), jusqu'à ce que le sujet devienne assez patient pour préférer *LL*.
- une majorité de sujets violent effectivement stationnarité
- le phénomène n'est toutefois pas si évident à mettre en évidence expérimentalement, cf. Harrison & Lau (2005)
- idée: les sujets peuvent avoir une méfiance pour les conséquences différées *en général* (coûts de transaction, confiance modérée dans le fait que l'expérimentateur, par ex., donnera bien la somme y dans le futur)


Indifference point/ Preference reversal
x_1
x_2
Utility
Time

mars ou pomme ?

- étude expérimentale de Read & Leeuwen (1998) :
- Question 1 (posée mardi 4 mars) : le mardi 11 mars, vous pourrez avoir, au choix, une barre de chocolat ou une pomme ; que choisissez vous ?
- Question 2 (posée le mardi 11 mars) : vous pouvez revenir sur votre décision prise la semaine dernière ; préférez-vous une barre de chocolat ou une pomme ?

mars ou pomme ? résultats



Pourcentage de mars choisis

commentaires

- 4 conditions: H = *hungry* (en fin d'après-midi) et S = *satisfied* (juste après le repas). Les individus sont informés du moment où l'expérimentateur repassera, une semaine plus tard, avec la nourriture
- on désigne les biais de prédiction liés à la présence ou non d'états viscéraux par le terme de manque d'empathie intrapersonnelle

commentaires

- si l'on choisit la description en termes de conséquences datées (x, t), alors ce qu'on observe est en réalité une violation radicale (en un sens à préciser) d'une variante de la version diachronique de la version $\sharp 3$ de la stationnarité!!!

- version $\sharp 3$ de la stationnarité:
si $(x, t) \sim (y, t + \tau)$, alors $(x, s) \sim (y, s + \tau)$
- version diachronique de la version $\sharp 3$:
si $(x, t) \sim_0 (y, s)$, alors $(x, t) \sim_\tau (y, s)$
- variante de la version diachronique:
$(x, t) \succ_0 (y, s)$ ssi $(x, t) \succ_\tau (y, s)$

commentaires

- dans “Mars ou Pomme”, on est dans le cas particulier où $t = s$. Si l’on suit cette modélisation, alors les observations sont non seulement incompatibles avec le (MAE), mais avec tout modèle selon lequel $U(x, t) = D(t) \cdot u(t)$. (Pourquoi ?)
- le cas (1100 euros dans 13 mois vs. 1000 euros dans 12 mois / 1100 euros dans 1 mois, 1000 euros maintenant) est moins radical car il remet “seulement” en question (MAE), pas l’hypothèse générique selon laquelle $U(x, t) = D(t) \cdot u(t)$
- mais peut-être n’est-ce pas la bonne modélisation: les deux biens alternatifs devraient peut-être être représentés comme des conséquences distribuées dans le temps (grossièrement, le plaisir gustatif en t, les conséquences diététiques ensuite)

actualisation (quasi-)hyperbolique

- réaction aux données qui précèdent : modèle de décision qui rend possible l'incohérence temporelle et la diminution du taux d'actualisation
- exemple (Elster, 1979 ; Laibson, 1997) : modèle quasi-hyperbolique (ou β - δ), qui introduit un paramètre β supplémentaire, qui amoindrit (plus encore) les utilités futures

$$U(c_0, c_1, c_2, c_3) = u(c_0) + \beta[\delta u(c_1) + \delta^2 u(c_2) + \delta^3 u(c_3)]$$

$$\boxed{U^t(c_t, ..., c_T) = u(c_t) + \beta[\sum_{k=1}^{T-t} \delta^k.u(c_{t+k})]}$$

- Elster (2000, p.25) à propos de l'actualisation (quasi-)hyperbolique:

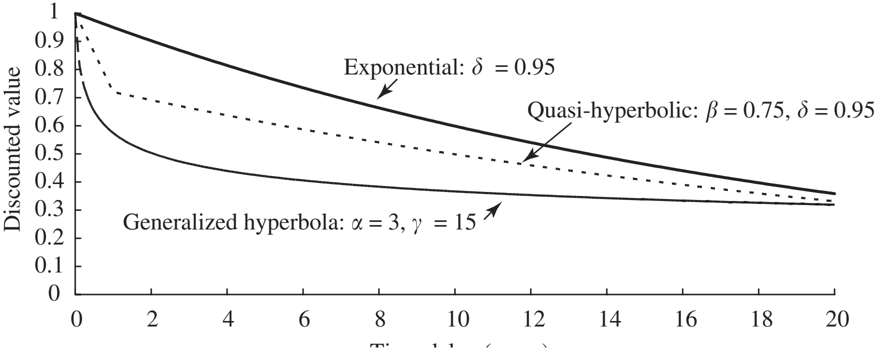
  "*Perhaps the central intuition behind this view is that individuals have a strong preference for the present compared to all future dates, but are much less concerned with the relative importance of future dates. If they receive a big sum of money today, for instance, they may decide to spend half of it immediately and allocated the rest evenly over their lifetime.*"

retour à l'exemple

- Paul a le choix entre 2 plans d'action : statu quo $(0, 0, 0)$ ou $(0, m, a)$ = rien à $t = 0$, ménage (désagréable) à $t = 1$ et environnement agréable à $t = 2$. $u(m) = -6$ et $u(a) = +8$
- modèle exponentiel avec $\delta = 0.95$: $U^0(0, m, a) = 1.52 > 0$ et $U^1(m, a) = 1.6 > 0$ (cohérence)
- modèle hyperbolique avec $\delta = 0.95$ et $\beta = 0.75$:
  $U^0(0, m, a) = 0 - \beta\delta 6 + \beta\delta^2 8 = 1.14 > 0$
  $U^1(m, a) = -6 + \beta\delta 8 = -0.3 < 0$

  $\Rightarrow$ à $t = 1$, Paul change de plan et opte pour le statu quo (plutôt que le ménage)

hyperbolique vs. exponentiel



préférence temporelle et actualisation

- version discrète $\sharp 2$: $\rho_d^2(t) = -[D(t) - D(t-1)/D(t)]$

  $\rho_d^2(1) = -[\beta\delta - 1/\beta\delta] = [1 - \beta\delta/\beta\delta]$
  $\rho_d^2(k) = [1 - \delta/\delta] < [1 - \beta\delta/\beta\delta]$ pour $k > 1$

procrastination

- l’exemple montre comment la procrastination = [remettre indéfiniment une tâche désagréable (ranger son bureau, arrêter de fumer) alors qu’on était déterminé à l’accomplir] peut apparaître
- la procrastination est associée à un changement de taux d’actualisation : plus on se rapproche du moment de l’action, plus le biais temporel en faveur de ce moment augmente

références

- Elster, J. (1979) *Ulysses and the Sirens: Studies in Rationality and Irrationality*, Cambridge: CUP
- Elster, J. (2000) *Ulysses Unbound*, Cambridge: CUP
- Laibson, D. (1997) “Golden Eggs and Hyperbolic Discounting”, *Quarterly Journal of Economics*, 62(May):443-77.
- Frederick, S. Loewenstein, G. & O’Donoghue, T. (2002) “Time Discounting and Time Preference: A Critical Review”, *Journal of Economic Literature*, Vol. XL (June 2002), pp. 351-401

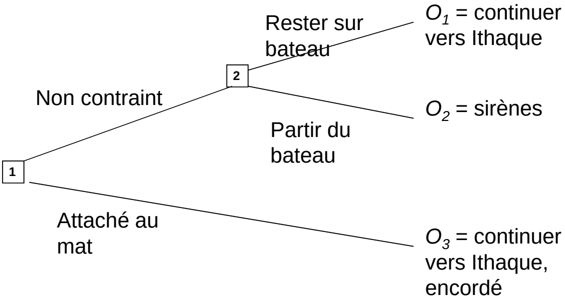
4.naïveté, lucidité et auto-contrainte

auto-contrainte

- 2 attitudes polaires pour un individu dont les préférences temporelles sont non-exponentielles:
- naïveté : Paul n'a pas conscience que ses préférences actuelles seront remises en question
- lucidité : Paul prévoit que ses préférences actuelles vont être mises à mal dans le futur
- un agent dont l'actualisation n'est pas exponentielle a intérêt à s'auto-contraindre i.e. à prendre des engagements qui l'empêchent d'abandonner son plan (ou qui lui imposent un coût élevé s'il abandonne son plan)

Ulysse et les sirènes

Ulysse et les sirènes



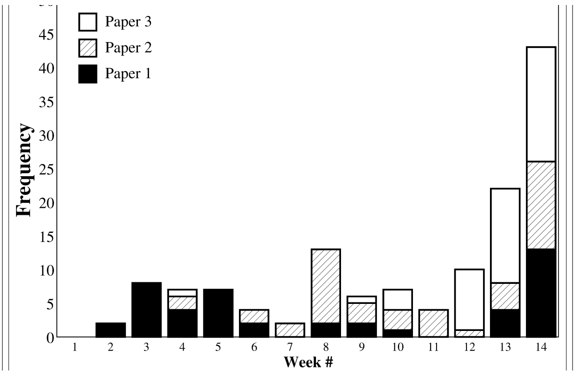
autres exemples

- Christmas Clubs:
  "...we are often willing even to pay a price to precommit future actions (and to avoid temptation). Evidence of this in economic and other social behaviour is not difficult to find. It varies from the gratuitous promise, from the familiar phrase 'Give me a good kick if I don't do such and such' to saving plans such as insurance policies and Christmas Clubs which may often be hard to justify in view of the low rates of return." (Strotz, 1955-1956)
  de manière générale, on peut concevoir les actifs illiquides comme des formes d'auto-contrainte (Laibson 1997)
- annoncer publiquement qu'on fera telle chose à tel moment
- idée générale : affecter l'environnement irréversiblement de manière à ce que le changement de préférence soit couteux voire impossible

les dates-butoir (Ariely & Wertenbroch 2002)

- les étudiants d'un cours semestriel doivent rendre 3 devoirs durant le semestre
  - les étudiants sont libres de choisir la date à laquelle ils rendent chacun des trois devoirs
  - mais ces 3 dates doivent être choisies à l'avance (au début du semestre) et l'étudiant s'engage à les respecter (pénalités en cas de retard)
  - *prima facie*, il semble plus intéressant pour les étudiants de s'engager à rendre les 3 devoirs lors de la dernière séance (plus de flexibilité), quitte à se donner des dates-butoirs privées
  - seuls 27/100 des étudiants choisissent de tout remettre lors de la dernière séance
  - groupe de contrôle où le professeur impose des dates-butoirs également espacées durant tout le semestre. Les résultats sont significativement meilleurs de l'autre groupe, mais pas de ceux de l'autre groupe qui ont spontanément également espacés ⇒ les étudiants s'auto-contraignent...mais pas assez !

les dates-butoir (Ariely & Wertenbroch 2002)



modéliser naïveté vs. lucidité

- O'Donoghue & Rabin (1999) : 3 types d'agents : exponentiels (*e*), hyperboliques naïfs (*hn*) et hyperboliques lucides (*hl*)
- Quel samedi choisir pour finir le rapport (scénario à coût immédiat et croissant) ?
  agents *e* : le premier samedi
  agents *hn* : le dernier samedi (procrastination maximale)
  agents *hl* : le second samedi (procrastination modérée)
- mais quand il s'agit d'un scénario à récompense (vs. coût) immédiate, les hyperboliques lucides s'en tirent moins bien que les hyperboliques naïfs !

références

- Ariely, D. & Wertenbroch, K. (2002) “Procrastination, Deadlines and Performance. Self-Control by Precommitment”, *Psychological Science*, 13(3)
- Elster, J. (1979) *Ulysses and the Sirens: Studies in Rationality and Irrationality*, Cambridge: CUP
- O’Donoghue, T. & Rabin, M. (1999) “Doing It Now or Later”, *The American Economic Review*, Vol. 89(1), pp. 103-124.

Effets, anomalies et irrationalité

CO8, introduction aux sciences de la décision

M. Cozic

introduction

- on a déjà vu un certain nombre d'anomalies (descriptives) par rapport aux modèle standards de la théorie de la décision:
  - préférences (supposées) cycliques
  - "paradoxe" d'Allais (choix risqué)
  - effet d'immédiateté (choix intertemporel)
- anomalie = régularité comportementale ("effet") qu'il est difficile de rendre compatible avec les modèle standards de la théorie de la décision

introduction

- la recherche et l'explication d'anomalies dans la prise de décision est l'un des principaux programmes de recherche empirique depuis 30 ans en sciences de la décision. A la frontière de l'économie et de la psychologie, il s'identifie largement avec
  - l'économie comportementale, du pt de vue des spécialités universitaires (voir Camerer, Loewenstein & Rabin (2003))
  - les travaux qui font suite à ceux de Kahneman et Tversky (1979, 1981)
- ces anomalies sont progressivement prises en compte en économie. Par exemple, dans sa dernière édition (2010), le fameux manuel *Intermediate Microeconomics* de Varian consacre un chapitre entier à l'eco. comportementale.

introduction

- très souvent, les anomalies sont interprétées comme des manifestation d'irrationalité. Cette interprétation repose sur deux hypothèses, l'une factuelle, l'autre normative:
  - hypothèse factuelle: les comportements observés révèlent que les individus n'obéissent pas aux modèles standard de la théorie de la décision
  - hypothèse normative: les hypothèses des modèles standards de la théorie de la décision sont des hypothèses nécessaires à la rationalité des agents (donc si les agents n'y obéissent pas, ils sont irrationnels)
- dans le cas du Paradoxe d'Allais, il n'y a pas de consensus sur l'hypothèse normative: certains contestent que la rationalité implique la conformité à l'Axiome d'Indépendance.

le renversement des préférences

- renversement de préférences = phénomène découvert par Lichtenstein & Slovic (1971), cf. l'anthologie Lichtenstein & Slovic (2006)

  H = (4 avec proba. 0,99 ; - 1 avec proba. 0,01)
  L = (16 avec proba. 0,33 ; - 2 avec proba. 0,66)

  2 méthodes:
  - révélation directe: que préférez-vous entre H et L ?
  - prix minimal de vente: si vous possédiez H (resp. L), quel est le plus bas prix auquel vous seriez prêt à le céder ?

résultats

H = (4 avec proba. 0,99 ; - 1 avec proba. 0,01)
L = (16 avec proba. 0,33 ; - 2 avec proba. 0,66)

- comportement modal :
  - la plupart des sujets *choisissent* H plutôt que L
  - pour la plupart des sujets, le prix minimal de vente (PMinV) de H est inférieur à celui de L
- selon Lichtenstein & Slovic (2006), les renversements des préférences se produisent typiquement dans des situations de choix (ou d'évaluation) qui
  (1) ne sont pas familières,
  (2) mettent en jeu des options où les préférences connues sont conflictuelles (ex., la certitude d'un gain vs. la magnitude d'un gain) et
  (3) il est difficile de synthétiser numériquement ces préférences conflictuelles

résultats

- D.Grether & C.Plott (1979) ont mené des recherches empiriques pour tenter de “discréditer” le phénomène. Ils mettent à l’épreuve 12 tentatives de “sauvetage” de la théorie de la décision standard, comme par exemple :

  (i)les sujets ne sont pas motivés financièrement à jouer le jeu ;

  (ii) il peut y avoir un “effet revenu” ;

  (iii) les sujets peuvent en fait être indifférents entre les options ;

  (iv) les sujets peuvent être méfiants vis-à-vis d’expérimentateurs psychologues, etc.
- à la grande satisfaction des psychologues, l’analyse des résultats de Grether & Plott montre que tous ces paramètres affectent pas ou peu les comportements. Le renversement des préférences semble “réel” et robuste.

résultats et interprétations

- différentes possibilités interprétatives (Tversky & Thaler 1991) :
  (1) violation de l'invariance procédurale : les préférences changent en fonction de la méthode de révélation. L'heuristique qui a guidé Slovic & Lichtenstein (1971) est l'idée que quand on demande les préférences "simples" entre loteries, c'est la probabilité de gagner quelque chose qui gouverne les réponses ; tandis que lorsqu'on demande un prix, c'est la magnitude du gain qui est déterminante.

  (2) violation de la transitivité : si c'est la même relation de préférence qui est révélée par les deux méthodes et si l'on suppose qu'elle est monotone par rapport au gain, alors on obtient

$$PMinV(H) \sim H \succ L \sim PMinV(L) \succ PMinV(H)$$

résultats et interprétations

- différentes possibilités interprétatives (Tversky & Thaler 1991) :

  (3) violation d'un axiome du modèle d'espérance d'utilité (indépendance) : procédure d'élicitation par PMinV repose sur un mauvais schéma d'incitation : la procédure standard (BDM) ne reçoit de garantie théorique que si le sujet est un maximisateur d'espérance d'utilité. Si le décideur viole l'axiome d'indépendance (et on a de bonnes raisons de penser que dans bien des situations c'est le cas, voir le Paradoxe d'Allais), alors on a plus cette garantie.

rappel: la procédure BDM : soit une loterie x. Après que le sujet donne son $PMinV(x)$, on tire au sort un montant. Si le montant excède $PMinV(x)$, on donne le montant au sujet ; sinon, on joue la loterie x. Cette procédure reçoit une justification théorique : si l'agent maximise son espérance d'utilité, alors le $PMinV(x)$ est l'équivalent certain de x.

discriminer entre les interprétations

Tversky, Slovic & Kahneman (1990) ont mis en place un protocole dont l'objectif est de discriminer entre les interprétations par violation de l'invariance procédurale et celles par violation de la transitivité. Ils introduisent un gain certain X tel que $C_L > X > C_H$ et proposent des choix binaires ($H - L$, $H - X$, $L - X$). Il y a quatre cas possibles :

(1) si $L \succ X \succ H$, alors on a intransitivité puisque $L \succ X \succ H \succ L$

(2) si $X \succ H$ et $X \succ L$, alors on a sur-évaluation de L puisque $C_L \succ X \succ L$

(3) si $H \succ X$ et $L \succ X$, alors on a sous-évaluation de H puisque $H \succ X \succ C_H$

(4) si $H \succ X$ et $X \succ L$, alors on a sur-évaluation de L et sous-évaluation de H

discriminer entre les interprétations

- Tversky, Slovic & Kahneman (1990) estiment avoir des résultats particulièrement univoques : selon eux, 90 % des renversements de préférences sont imputables à une violation de l'invariance procédurale (cas (2)-(3) avec une grande prépondérance du cas (2)) tandis que 10 % seulement le seraient à une violation de la transitivité (cas (1)).
- si les préférences changent avec la méthode d'élicitation, (1) comment connaît-on les "vraies" préférences d'un agent ?, et (2) existe-t-il quelque chose comme les "vraies" préférences de l'agent ?

- A. Tversky & R. Thaler (1991)

" The discussion of the meaning of preference and the status of value may be illuminated by the well-known exchange among three baseball umpires. "I call them as I see them" said the first. "I call them as they are" said the second. The third disagreed, "They ain't nothing till I call them". Analogously, we can describe three different views regarding the nature of values. First, values exist - like body temperature - and people perceive and report them as best they can, possibly with bias (I call them as I see them). Second, people know their values and preferences directly - as they know the multiplication table (I call them as they are). Third values or preferences are commonly constructed in the process of elicitation (they ain't nothing till I call them). The research reviewed in this article is most compatible with the third view of preference as constructive, context-dependent process."

structure logique de la discussion

- 3 hypothèses:

(h1) stabilité des préférences d'un contexte de révélation à l'autre: soient x et y deux contextes différents, alors

$$\succ(x) = \succ(y)$$

(h2) invariance des procédures: si x et y sont deux méthodes de révélation et si $\succ_x$ et $\succ_y$ dénotent les préférences mesurées, alors

$$\succ_x = \succ_y$$

(h3) fiabilité des méthodes de révélation:

$$\succ(x) = \succ_x$$

- (h2) est impliqué par (h1) et (h3). Or, ce que l'on observe, c'est non-(h2). Donc non-(h1) ou non-(h3). L'interprétation non-(h1) est assurée si l'on peut être raisonnablement confiant dans (h3).

références

- D.Grether & C.Plott (1979), “Economic Theory of Choice and the Preference Reversal Phenomenon”, *American Economic Review*
- Lichtenstein & Slovic (1971), “Reversals of Preference Between Bids and Choices in Gambling Decisions”, *Journal of Experimental Psychology*, vol.89, pp. 46-55.
- Lichtenstein & Slovic (2006), *Contruction of Preferences*, Cambridge UP
- A. Tversky & R. Thaler (1991), “Anomalies : Preference Reversals”, *The Journal of Economic Perspectives*, vol.4, nř2, pp. 201-11

effet de cadrage

Problem 1

Problem 1 [N = 152]: Imagine that the U.S. is preparing for the outbreak of an unusual Asian disease, which is expected to kill 600 people. Two alternative programs to combat the disease have been proposed. Assume that the exact scientific estimate of the consequences of the programs are as follows:

If Program A is adopted, 200 people will be saved.

If Program B is adopted, there is 1/3 probability that 600 people will be saved, and 2/3 probability that no people will be saved.

Which of the two programs would you favor?

Problem 2

Problem 1 [N = 152]: Imagine that the U.S. is preparing for the outbreak of an unusual Asian disease, which is expected to kill 600 people. Two alternative programs to combat the disease have been proposed. Assume that the exact scientific estimate of the consequences of the programs are as follows:

If Program C is adopted, 400 people will die.

If Program D is adopted, there is 1/3 probability that nobody will die, and 2/3 probability that 600 people will be die.

Which of the two programs would you favor?

- Résultats:

  Problem 1: Program A = 72% vs. Program B = 28% (aversion pour le risque)

  Problem 2: Program C = 22% vs. Program D = 78% (goût pour le risque)

- mais les Problèmes 1 et 2 sont les mêmes problèmes de choix, simplement les options sont décrites différemment (quoique de manière équivalente).

- on a donc des décideurs qui ont des attitudes différentes qui dépendent de descriptions (“cadres”) équivalentes. Pourtant, on s’attendrait à ce que les préférences d’un décideur rationnel soient invariantes quand on passe d’une description à une description équivalente.

  “...seemingly inconsequential changes in the formulation of choice problems caused significant shifts of preference.” (TK 1981)

- Tversky & Kahneman (1986):

  “Invariance. An essential condition for a theory of choice that claims normative status is the principle of invariance: different representations of the same choice problem should yield the same preference...This principle of invariance...is so basic that it is tacitly assumed in the characterization of options rather than explicitly stated as a testable axiom. For example, decision models that describe the objects of choice as random variables all assume that alternative representations of the same random variables should be treated alike.

  ...

  Normative models of choice, which assume invariance, therefore cannot provide an adequate descriptive account of choice behavior.”

explication de l'EC

- comment expliquer (EC) ?
- explication la plus populaire: explication par la *Prospect Theory* (Kahneman & Tversky 1979). Idée:
  - le Problème 1 est formulé en termes de gain $\Rightarrow$ aversion pour le risque
  - le Problème 2 est formulé en termes de perte $\Rightarrow$ goût pour le risque
  - ces attitudes différentielles par rapport au risque résultent des propriétés de la fonction de valeur $v(.)$ et de la fonction de pondération des probabilités $\pi(.)$.

    "If π and v were linear throughout, the preference order between options would be independent of the framing of acts, outcomes, or contingencies.Because of the characteristic nonlinearities of π and v, however, different frames can lead to different choices."

références

- Tversky & Kahneman (1981) "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice", *Science*, 211(4481)

effet de dotation

une histoire de mugs

- protocole:

  groupe 1 (vendeurs potentiels): on donne à chaque sujet un mug

  Q: pour chaque prix *p*, indiquez si vous êtes prêts à céder votre mug pour *p*?

  Procédure BDM: un prix sera tiré au hasard, et l'expérimentateur fera ce que le sujet a indiqué pour ce prix

  groupe 2 (acheteurs potentiels): on donne à chaque sujet un mug

  Q: pour chaque prix *p*, indiquez si vous êtes prêts à acheter mug pour *p*?

  Procédure BDM: un prix sera tiré au hasard, et l'expérimentateur fera ce que le sujet a indiqué pour ce prix

une histoire de mugs

- Résultats:

	Prix de vente	Prix d'achat
Médian	5.75$	2.25$
Moyen	5.78$	2.21$

- variation de Knetsch (1989)

  Groupe 1: sujets dotés d'un mug, Q sur l'échange avec une barre de chocolat

  Groupe 2: sujets dotés d'une barre de choco., Q sur l'échange avec un mug

  Groupe 3: que choisissez-vous entre mug et barre de chocolat ?

- Résultats:

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
pro-mug	89%	10%	56%

une affaire de mug

Interpretation by KKT (1990):
"The evidence presented in this paper supports what may be called an instant endowment effect: the value that an individual assigns to such objects as mugs, pens, binoculars, and chocolate bars appears to increase substantially as soon as that individual is given the object...
The endowment effect is one explanation for the systematic differences between buying and selling prices that have been observed so often in past work...
The results of the experimental demonstrations of the endowment effect hae direct implications for economic theory and economic predictions. Contrary to the assumptions of standard economic theory that preferences are independent of entitlements, the evidence presented here indicates that preferences depend on their reference positions."

l'effet de dotation

- propension à payer (*willingness to pay, WTP*) = prix (maximal) qu'un individu est prêt à payer pour *obtenir* un certain bien
- propension à accepter (*willingness to accept, WTA*) = prix (mninimal) qu'un individu est prêt à accepter pour céder un certain bien
- effet de dotation (ED): WTA > WTP

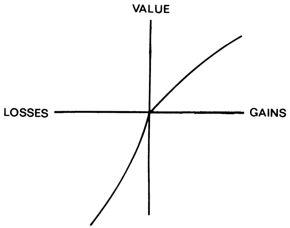
  ou

  effet de dotation'(ED'): la valeur que l'on accorde à un bien est plus élevée quand on le possède
  - (ED) et (ED') ne sont pas équivalents: (ED') est une explication possible de (ED) qui repose sur l'hypothèse que les WTA et WTP reflètent correctement les valeurs
  - on pourrait contester le passage de (ED) à (ED') en disant que, quand les interroge, les vendeurs ont tendance à sur-estimer les prix, tandis qu'inversement les acheteurs ont tendance à les sur-estimer.

explication de l'ED

- comment expliquer (ED) ou (ED') ?
- explication la plus populaire: (ED') s'expliquer par l'aversion pour la perte (*loss aversion*)

- idée:
- quand un bien est susceptible d'être acheté, il est évalué comme un gain.
- quand un bien est susceptible d'être vendu, il est évalué comme une perte.
- or, les individus accordent "plus de poids" aux pertes qu'aux gains



références

- Kahneman, D., Knetsch, J. & Thaler, R. (1990) “Experimental Tests of the Endowment Effect and The Coase Theorem”, *The Journal of Political Economy*, 98(6), pp. 1325-1348
- Knetsch, J. (1989) “The Endowment Effect and Evidence of Nonreversible Indifference Curve”, *American Economic Review*, pp. 1277-84

biais de status quo

Groupe 1

You are a reader of the financial pages but until recently have had few funds to invest. That is when you inherited a large sum of money from your great uncle. You are considering different portfolios. Your choices are:

a) Invest in moderate-risk Co. A. Over a year's time, the stock has .5 chance of increasing 30% in value, a .2 chance of being unchanged and a .3 chance of declining 20% in value.

b) Invest in high-risk Co. B. Over the years time, the stock has a .4 chance of doubling in value, a .3 chance of being unchanged and a .3 chance of declining 40% in value.

c) Invest in treasury bills. Over a year's time, these will wield a nearly certain return of 9%.

d) Invest in municipal bonds. Over a year's time, these will wield a tax-free return of 6%.

Groupe 2

You are a reader of the financial pages but until recently have had few funds to invest. That is when you inherited a large sum of money from your great uncle. A significant portion of this portfolio is invested in moderate-risk Company A. You are deliberating whether to leave the portfolio intact or to change it by investing in other securities. (The tax and broker commission consequences of any change are insignificant). Your choices are:

a) Retain the investment in moderate-risk Co. A. Over a year's time, the stock has .5 chance of increasing 30% in value, a .2 chance of being unchanged and a .3 chance of declining 20% in value.

b) Invest in high-risk Co. B. Over the years time, the stock has a .4 chance of doubling in value, a .3 chance of being unchanged and a .3 chance of declining 40% in value.

c) Invest in treasury bills. Over a year's time, these will wield a nearly certain return of 9%.

d) Invest in municipal bonds. Over a year's time, these will wield a tax-free return of 6%.

option par défault et status quo

- Résultats: les sujets ont une propension plus forte à choisir une option quand elle est l'option par défaut
- dans bcp de situations de décision, il y a une option "par défault" ou "status quo" = l'option qui est réalisée si l'agent ne fait rien.
- on appelle cette régularité comportementale le biais de status quo (BSQ) (Samuelson & Zeckhauser 1998)
- le (BSQ) a été observé sur le terrain également. Par exemple, on a montré que le choix de l'option par défaut a un impact important sur les taux de contribution au "401(k) plans" (épargne-retraite), voir Choi & al. (2004)

le don d'organes

- politique ♯1: consentement explicite = opt-in (par ex. carte de donneur d'organes).
  - exemples: USA, Danemark, Allemagne, RU, etc.
  - taux faibles (entre 5 % et 28 %)
- politique ♯2: consentement présumé = opt-out (mais non obligatoire).
  - exemples: Autriche, Belgique, France, etc.
  - taux très élevés (entre 85 % et 99 %).
- Johnson & Goldsten (2003) soumettent des choix hypothétiques et obtiennent

	opt-in	opt-out	no default
acceptent le don	42 %	82 %	79 %

BSQ, nudges et économie comportementale normative

- le BSQ est l'une des régularités comportementales les plus mobilisées par l'économie comportementale "normative" (ou "publique")
- en particulier, par les idées rassemblées sous le terme de nudge ou de "paternalisme libertarien" (Thaler & Sunstein 2008)

  "A nudge...is any aspect of the choice architecture that alters people's behavior in a predictable way without forbidding any options or significantly changing their economic incentives" (T&S 2008, p.6)

  "...a nudge is any factor that significantly alters the behavior of Humans, even though it would be ignored by Econs."(p.8)

explications du BSQ

♯1 explication informationnelle: souvent l'option par défaut est déterminée par une personne (ou un organisme) qui a des connaissances et une expérience que l'agent n'a pas. Lequel peut donc voir dans le fait qu'une option est considérée comme option par défaut une indication du fait que c'est une bonne option.

- ▷ la détermination de l'option par défaut n'est pas neutre du point de vue informationnel.
- ▷ cette explication est compatible avec les modèles standards de la théorie de la décision: il s'agit d'une révision des préférences de l'agent qui fait suite à une révision de ses croyances.
- ▷ on peut en principe tester/évaluer cette explication en faisant varier le degré d'expertise et/ou de bienveillance que l'agent attribue à la personne qui détermine l'option par défaut.

explications du BSQ

♯2 explication par l'aversion pour la perte

- toujours la même idée
- d'après Samuelson & Zeckhauser (1998), ce n'est pas assez général:

  "Our results show the presence of status quo bias even when there are no explicit gain/loss framing effects...

  Thus, we conclude that status quo bias is a general experimental finding - consistent with, but not solely prompted by, loss aversion."

références

- Choi, J., Laibson, D., Madrian, B. & Metrick, A. (2004) “For Better or for Worse: Default Effects and 401(k) Savings Behavior” in Wise? D. (ed.) ,Perspective on the Economics of Aging, pp. 81-121, Chicago: University of Chicago Press
- Samuelson, W. & Zeckhauser, R. (1998) “Status Quo Bias in Decision Making”, *Journal of Risk and Uncertainty*, 1, pp. 7-59
- Sunstein & Thaler (2003) “Libertarian Paternalism Is Not an Oxymoron”, *The University of Chicago Law Review*, 70(4), pp. 1159-1202
- Thaler & Sunstein (2008) *Nudge*, Yale UP

la théorie des jeux, 1

CO8 2013-2014

M. Cozic

1. Les jeux sous forme normale et l'équilibre de Nash

1.1. L'interaction stratégique et les jeux sous forme normale

les interactions stratégiques

- théorie des jeux = théorie générale des interactions stratégiques = actions individuelles sont déterminées en fonction des actions des autres agents
  - interdépendance stratégique = les conséquences de ce qu'un agent fait dépendent de ce que font les autres agents prenant part à l'interaction

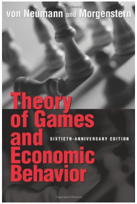


Figure: Von Neumann & Morgenstern (1944/1947)

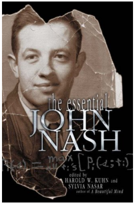


Figure: Nash (1951)

les interactions stratégiques

- exemples:
- 2 enfants jouant à pierre-feuille-ciseaux
- un goal qui doit décider où se jeter et un joueur de champ qui doit décider où tirer le pénalty
- 2 nations ennemies qui doivent décider si elles augmentent ou pas leur arsenal militaire
- 2 conducteurs dont les routes se croisent
- des entreprises, en petit nombre, produisant le même bien et devant décider de la quantité de ce bien qu'elles s'apprêtent à produire (oligopole de Cournot)
- des internautes qui enchérissent sur eBay

matching pennies

2 joueurs, chacun possède une pièce et il doit choisir secrètement l'un des deux côtés. Le joueur 1 gagne si les deux côtés sont les mêmes, le joueur 2 s'ils sont différents.

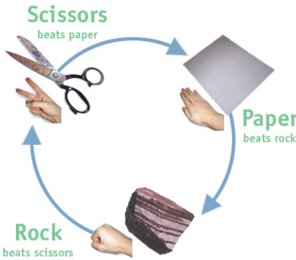
	F	P
F	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(1,-1)$

autre histoire pour la même représentation: le jeu du débarquement.
2 généraux ennemis doivent choisir entre deux endroits, l'un pour débarquer, l'autre pour empêcher le premier de débarquer. Si le défenseur choisit l'endroit choisi par l'attaquant, il gagne, sinon il perd.

pierre-feuille-ciseaux

- un jeu comme matching pennies, où les préférences des joueurs sont systématiquement opposées, s'appelle un jeu à somme nulle. Voici un autre exemple:

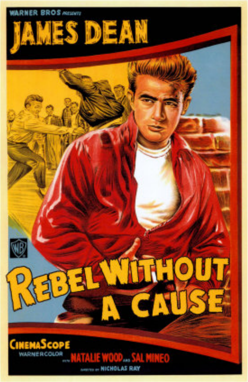
	F	P	C
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$



le jeu de la poule mouillée

Les deux joueurs roulent l'un vers l'autre au milieu de la route. Tous deux arrivent au point de non-retour et doivent décider s'ils cèdent C i.e. s'ils se rabattent sur leur voie, ou s'ils tiennent T i.e. restent au milieu de la route. Ils n'ont pas le temps de voir la décision de l'autre avant de prendre la leur.

http://www.youtube.com/watch?v=U1DEp8R9kwg&feature=related



le jeu de la poule mouillée

Les deux joueurs roulent l'un vers l'autre au milieu de la route. Tous deux arrivent au point de non-retour et doivent décider s'ils cèdent C i.e. s'ils se rabattent sur leur voie, ou s'ils tiennent T i.e. restent au milieu de la route. Ils n'ont pas le temps de voir la décision de l'autre avant de prendre la leur.
✓ si (T, T), l'issue est catastrophique pour tous les deux.
✓ si (T, C), c'est l'idéal pour le joueur 1 qui n'est pas une poule mouillée
✓ si (C, C), les deux sont des poules mouillées, mais ils sont sains et saufs !

	C	T
C	$(3,3)$	$(2,4)$
T	$(4,2)$	$(0,0)$

définition d'un jeu (sous forme stratégique)

- un jeu (sous forme stratégique) $G = \langle I, \{A_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I} \rangle$ est la donnée
- d'un ensemble de joueurs I
- d'un ensemble d'actions A_i pour chaque joueur i
- d'une fonction d'utilité u_i pour chaque joueur i qui évalue chaque profil d'actions possible $a \in A = A_1 \times ... \times A_I$

1.2. Domination et élimination itérée des stratégies dominées

le dilemme du prisonnier

2 joueurs soupçonnés d'avoir commis ensemble un crime majeur, arrêtés et interrogés séparément par les policiers qui ont assez d'éléments pour les convaincre d'un crime mineur. Chacun peut témoigner contre l'autre (T) ou ne pas le faire (C).
✓ si (C, C), alors 1 an de prison chacun
✓ si (T, T), alors 3 ans de prison chacun
✓ si (T, C) ou (C, T), celui qui trahit est libéré, celui qui ne trahit pas passe 4 ans en prison

	C	T
C	$(3, 3)$	$(0, 4)$
T	$(4, 0)$	$(1, 1)$

résoudre le dilemme du prisonnier

- quel comportement doit-on attendre de joueurs rationnels dans le dilemme ?
- raisonnement du joueur 1:
  - si 2 témoigne contre moi (joue T), alors j'ai intérêt à témoigner contre lui
  - si 2 ne témoigne pas contre moi (joue C), alors j'ai intérêt à témoigner contre lui
  conclusion: j'ai intérêt à témoigner contre lui, i.e. jouer T. Même raisonnement pour le joueur 2.

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(4,0)$	$(1,1)$

résoudre le dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(4,0)$	$(1,1)$

- T est une stratégie strictement dominante : une stratégie telle que, quelle que soit celle choisie par l'autre joueur, l'utilité qu'elle procure est strictement supérieure à celle que procurent les autres stratégies envisageables
- le principe de dominance est le principe qui dit de choisir les stratégies strictement dominantes
- (T, T) est l'issue à laquelle on aboutit si chaque joueur se conforme au principe de dominance

la domination stricte

Définitions

- La stratégie $a_i \in A_i$ domaine strictement $a'_i \in A_i$ si pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$
- $a_i \in A_i$ est strictement dominante si elle domine strictement toute $a'_i \in A_i$

rem 1: s'il existe une stratégie str. dominante, alors elle est unique.
rem 2: s'il existe une stratégie str. dominante pour lui, un joueur peut la trouver sans connaître les utilités de l'autre joueur
Définition

- Un profil de stratégie $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_I) \in A$ est un équilibre en stratégies str. dominantes si pour chaque joueur i, a_i est strictement dominante.

remarques sur le dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(4,0)$	$(1,1)$

- le Dilemme est sans dout le jeu le plus célèbre. Pas seulement parce qu'il illustre l'équilibre en stratégie dominante, mais parce que (i) il semble correspondre à de nombreuses situations sociales et (ii) l'issue recommandée par l'équilibre ne paraît pas collectivement rationnelle ou efficace.
- le concept de rationalité collective est partiellement représenté par celui de Pareto-domination

  Définition

  - Un profil de stratégie $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_I) \in A$ Pareto-domine autre autre profil $a' = (a'_1, ..., a'_i, ..., a'_I) \in A$ si pour tout joueur $i \in I$, $u_i(a) > u_i(a')$.

remarques sur le dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(4,0)$	$(1,1)$

- dans le Dilemme, (C, C) Pareto-domine (T, T). On en conclut qu'il y a conflit entre la rationalité individuelle (incarnée par le principe de dominance) et la rationalité collective (incarnée par le Principe de Pareto).
- pour certains, cela implique qu'il y a un problème avec le principe de dominance ; pour d'autres, simplement que rationalités individuelle et collective ne vont pas toujours de pair !

la domination faible

- le principe de dominance ne permet pas en général de résoudre un jeu: très souvent, il n'existe pas de stratégie dominante (et donc pas d'équilibre en stratégies str. dominantes) !
- c'est le cas du jeu de la poule mouillée

	C	T
C	$(3,3)$	$(2,4)$
T	$(4,2)$	$(0,0)$

- on peut étendre le concept aux stratégies qui sont au moins aussi bonnes que les autres et parfois strictement meilleures

  Définition

  La stratégie $a_i \in A_i$ domaine faiblement $a'_i \in A_i$ si

  - pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$
  - il existe un $a_{-i} \in A_{-i}$ t.q. $u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$

  $a_i \in A_i$ est faiblement dominante si elle domine faiblement toute $a'_i \in A_i$

la dominance faible

- exemple:

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(3,0)$	$(1,1)$

- dans cette variante du Dilemme, le joueur 1 n'a plus de stratégies (strictement) dominantes, mais T est malgré tout faiblement dominante
- exemple:

	b_1	b_2
a_1	$(0,1)$	$(4,2)$
a_2	$(3,0)$	$(2,1)$
a_3	$(1,0)$	$(3,0)$

- dans ce jeu, le joueur 2 a une stratégie (faiblement) dominante (laquelle ?), mais pas le joueur 1

enchères au second prix

- processus:
- chaque joueur i annonce un offre $o_i \in [0, +\infty]$
- chaque joueur évalue le bien aux enchères v_i
- l'objet est offert à celui qui offre le plus, mais il le paye au prix de la seconde offre: $u_i(o_1, ..., o_n)$ =
  - $v_i - max_{j \neq i} o_j$ si $o_i > max_{j \neq i} o_j$
  - $1/m \times (v_i - max_{j \neq i} o_j)$ si $o_i = max_{j \neq i} o_j$ et s'il y a m vainqueurs
  - 0 si $o_i < max_{j \neq i} o_j$

enchères au second prix

- annoncer son évaluation (i.e. $o_i = v_i$) est une stratégie faiblement dominante

  (a) pour tout $o_i \neq v_i$, v_i est au moins aussi bon que o_i.

- si $v_i < max_{j \neq i} o_j$. Avec $o_i < max_{j \neq i} o_j$, i obtient zéro, tandis que si $o_i \geq max_{j \neq i} o_j$, paiement négatif.
- si $v_i > max_{j \neq i} o_j$. Avec v_i ou quoique ce soit de strct. sup. à $max_{j \neq i} o_j$, i obtient $v_i - max_{j \neq i} o_j > 0$. En pariant $v_i = max_{j \neq i} o_j$, i devra partager et donc il obtiendra moins. Avec $v_i < max_{j \neq i} o_j$, il obtiendra zéro.
- si $v_i = max_{j \neq i} o_j$. Toute offre rapporte alors zéro.

  (b) pour tout $o_i \neq v_i$, il y a des o_{-i} telles que v_i est strict. meilleure que o_i.

  (i) si $o_i > v_i$, quand $max_{j \neq i} \in (v_i, o_i)$, v_i rapporte zéro, o_i donne un paiement négatif.

  (ii) si $o_i < v_i$, quand $max_{j \neq i} \in (o_i, v_i)$, v_i rapporte $v_i - max_{j \neq i} o_j$ et o_i zéro.

la dominance faible

- regardons l'un des jeux précédents une seconde fois le jeu précédent:

	b_1	b_2
a_1	$(0,1)$	$(4,2)$
a_2	$(3,0)$	$(2,1)$
a_3	$(1,0)$	$(3,0)$

- le joueur 1 peut compter sur le fait que le joueur 2 jouera b_2. Il peut alors réduire le jeu précédent au jeu suivant:

	b_2
a_1	$(4,2)$
a_2	$(2,1)$
a_3	$(3,0)$

- ...il aura alors une stratégie dominante: a_1.

l'élimination itérée

- dans l'exemple précédent, rôle essentiel des croyances du joueur 1 sur la rationalité du joueur 2 entendue comme le fait qu'il jouera une stratégie dominante
- on peut développer ces idées à partir du concept de stratégie dominée:

  Définition

  La stratégie $a_i \in A_i$ est strictement dominée s'il existe une stratégie $a_i' \in A_i$ qui la domine strictement.
- attention: dans un jeu, il se peut qu'un joueur ait des stratégies strictement dominées sans pour autant avoir de stratégies dominantes.
- exemple:

	b_1	b_2
a_1	$(0,1)$	$(0,2)$
a_2	$(3,0)$	$(2,1)$
a_3	$(1,0)$	$(3,0)$

l'élimination itérée des stratégies strictement dominées

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(4,3)$	$(5,1)$	$(6,2)$
a_2	$(2,1)$	$(8,4)$	$(3,6)$
a_3	$(3,0)$	$(9,6)$	$(4,8)$

- a_2 est strictement dominée par a_3 donc, sous l'hypothèse que le joueur 1 est rationnel, le joueur 2 peut réduire son incertitude à la question de savoir s'il jouera a_1 ou a_3
- b_2 est strictement dominée par b_3 donc, sous l'hypothèse que le joueur 2 est rationnel, le joueur 1 peut réduire son incertitude à la question de savoir s'il jouera b_1 ou b_3

l'élimination itérée des stratégies strictement dominées

- on peut donc réduire le jeu initial au jeu suivant:

	b_1	b_3
a_1	$(4,3)$	$(6,2)$
a_3	$(3,0)$	$(4,8)$

  - a_3 est strictement dominée par a_1 donc, sous l'hypothèse que le joueur 1 est rationnel et qu'il croit que le joueur 2 est également rationnel, le joueur 2 peut anticiper que le joueur 1 jouera a_1

- Le jeu est alors réduit à

	b_1	b_3
a_1	$(4,3)$	$(6,2)$

  - la stratégie b_3 devient alors dominée par b_1. On obtient donc comme profil de stratégies (a_1, b_1)

l'élimination itérée des stratégies strictement dominées

- on appelle ce raisonnement l'élimination itérée des stratégies strictement dominées (EISSD)
  ✓ les curieux peuvent aller voir la Définition dans l'Appendice.
- un équilibre par EISSD est un profil de stratégies tel que chaque stratégie survit à l'EISSD.
- un jeu G est résoluble par dominance s'il possède un unique équilibre par EISSD[1].
  c'est le cas dans l'exemple précédent

[1] Def. un peu plus générale: pour chaque joueur, les stratégies qui survivent sont équivalentes i.e. procurent la même utilité quelles que soient les stratégies survivantes des autres joueurs.

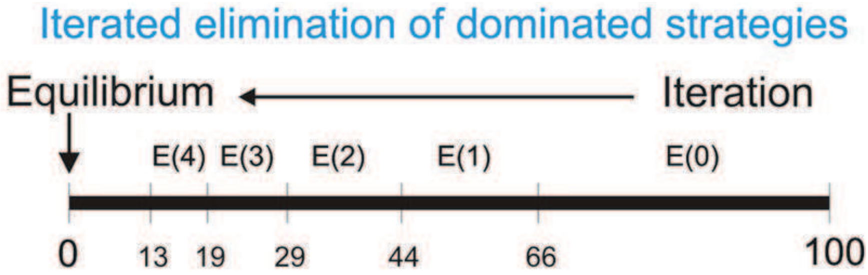
le jeu du concours de beauté

- choisissez un nbre entre 0 et 100 ; le gagnant sera celui dont le nombre est le plus proche des 2/3 de la moyenne Quel nbre x_i doit choisir le joueur i ?
  - étape 1: la $2/3$-moyenne est dans $[0, 200/3]$ donc les $x_i \in]200/3, 100]$ sont faiblement dominés dans le jeu initial $G^0 = G$: ils ne rapportent jamais plus et parfois strictement moins que $x_i = 200/3$.
- le processus d'élimination itérée des stratégies faiblement dominées (EISFD) peut être poursuivi:
  - étape 2: la $2/3$-moyenne des x_i dans le jeu réduit G^1 est ds $[0, 400/9]$ donc les $x_i \in]400/9, 200/3]$ dans le jeu réduit sont faiblement dominés donc sont éliminés.

  ...

  $\Rightarrow$ l'unique équilibre par EISFD est le profil $(0, ..., 0)$.

le jeu du concours de beauté



le jeu du concours de beauté

- particularité du profil $(0, ..., 0)$: un joueur *i* n'a pas intérêt à dévier étant donné le choix des autres.
- nous reviendrons très vite sur cette propriété

sur l’origine de “concours de beauté”

- Keynes *Théorie générale de l’emploi, de l’intérêt et de la monnaie* (1936) compare les marchés financiers au jeu du concours de beauté:

“Ou encore, pour varier légèrement la métaphore, la technique du placement peut être comparée à ces concours organisés par les journaux où les participants ont à choisir les six plus jolis visages parmi une centaine de photographies, le prix étant attribué à celui dont les préférences s’approchent le plus de la sélection moyenne opérée par l’ensemble des concurrents. Chaque concurrent doit donc choisir non les visages qu’il juge lui-même les plus jolis, mais ceux qu’il estime les plus propres à obtenir le suffrage des autres concurrents, lesquels examinent tous le problème sous le même angle.”

sur l'origine de “concours de beauté”

- Keynes *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie* (1936) compare les marchés financiers au jeu du concours de beauté:

Il ne s'agit pas pour chacun de choisir les visages qui, autant qu'il en peut juger, sont réellement les plus jolis ni même ceux que l'opinion moyenne considérera réellement comme tels. Au troisième degré où nous sommes déjà rendus, on emploie ses facultés à découvrir l'idée que l'opinion moyenne se fera à l'avance de son propre jugement. Et il y a des personnes, croyons-nous, qui vont jusqu'au quatrième ou au cinquième degré ou plus loin encore.

hypothèses sur la rationalité et EISSD

- dans le jeu

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(4, 3)$	$(5, 1)$	$(6, 2)$
a_2	$(2, 1)$	$(8, 4)$	$(3, 6)$
a_3	$(3, 0)$	$(9, 6)$	$(4, 8)$

pour aboutir à (a_1, b_1), nous n'avons

- pas seulement supposé que les joueurs étaient rationnels (et qu'ils connaissaient le jeu) ;

- pas non plus seulement supposé qu'ils croyaient que l'autre était rationnel (et connaissait le jeu).

$\Rightarrow$ on est monté dans la hiérarchie des croyances en la rationalité de l'autre autant de fois que l'on a éliminé de stratégies dominées.

hypothèses sur la rationalité et EISSD

- pour être certain que le raisonnement soit toujours justifié, il faut supposer ce qu'on appelle la connaissance commune dans la rationalité (et dans la structure du jeu):
  - chacun est rationnel,
  - chacun sait que l'autre est rationnel,
  - chacun sait que chacun sait que l'autre est rationnel, etc.
- la théorie épistémiques des jeux est la branche qui caractérise de manière précise les hypothèses sur les croyances des agents qui conduisent aux différents équilibres.

hypothèses sur la rationalité et EISSD

- question: en quel sens supposer qu'un joueur est rationnel nous garantit qu'il ne jouera pas une stratégie strictement dominée ?
- imaginons que le joueur i ait des croyances sur l'action que j va jouer. Quelles que soient ses croyances, i a intérêt à *ne pas jouer* une stratégie strictement dominée
    - on peut rendre cela plus précis: imaginons que i ait une distribution de probabilité $P(.)$ sur A_j. Alors quelle que soit $P(.)$, l'espérance d'utilité d'une action strictement dominée est strictement moins bonne que l'EU de celle qui la domine.

hypothèses sur la rationalité et EISFD

- les choses sont un peu différentes avec la dominance faible et l'EISFD
- exemple:

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(3,0)$	$(1,1)$

  si le joueur i est persuadé que le joueur 2 jouera C, alors il n'a plus intérêt à ne pas jouer C (la stratégie faiblement dominée) !

  - en termes d'EU: si le joueur 1 accorde une probabilité nulle au fait que le joueur 2 joue T, alors $EU(C) = EU(T)$.

- idée: ce qui garantit l'élimination par un joueur d'une stratégie faiblement dominée, c'est le fait qu'il soit rationnel et prudent au sens où il n'accorde pas de probabilité nulle à certaines actions de l'adversaire

d'autres complications pour l'EISFD

- exemple (Heifetz, 2012):

	b_1	b_2
a_1	$(0,0)$	$(1,0)$
a_2	$(0,1)$	$(0,0)$

- a_2 est faiblement dominée par a_1 et b_2 par b_1. L'EISFD conduit donc à (a_1, b_1).
- mais si on commence par éliminer b_2, alors a_1 ne domine plus (même faiblement) dans le jeu résiduel

	b_1
a_1	$(0,0)$
a_2	$(0,1)$

$\Rightarrow$ manque de robustesse de l'EISFD à l'ordre d'élimination

récapitulatif

- avec l'élimination itérée des stratégies strictement dominées, on arrive à en dire "plus" sur l'issue d'une interaction stratégique entre joueurs rationnels
- on ne considère plus simplement des joueurs rationnels, mais des joueurs qui en outre ont connaissance commune de la rationalité de chacun et de la structure du jeu
- problème: il y a de nombreux jeux où il n'existe pas ou peu de stratégies qui sont éliminées par le raisonnement (et encore plus de jeux qui ne sont pas résolubles par dominance)

la théorie des jeux, 2

CO8 2013-2014

M. Cozic

1. Les jeux sous forme normale et l'équilibre de Nash

1.3. L'équilibre de Nash

l'équilibre de Nash

- si l'on revient sur le dilemme du prisonnier, on peut remarquer une propriété des deux stratégies dominantes: chacune est une meilleure réponse à l'autre : aucun joueur n'a intérêt à changer d'action étant donné celle de l'autre

l'équilibre de Nash

- si l'on revient sur le dilemme du prisonnier, on peut remarquer une propriété des deux stratégies dominantes: chacune est une meilleure réponse à l'autre : aucun joueur n'a intérêt à changer d'action étant donné celle de l'autre
- équilibre de Nash (EqNash): un profil d'action est un EqNash ssi aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégies étant donné celles choisies par les autres

l'équilibre de Nash

- si l'on revient sur le dilemme du prisonnier, on peut remarquer une propriété des deux stratégies dominantes: chacune est une meilleure réponse à l'autre : aucun joueur n'a intérêt à changer d'action étant donné celle de l'autre
- équilibre de Nash (EqNash): un profil d'action est un EqNash ssi aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégies étant donné celles choisies par les autres
  Définition
  Un profil d'action a^* est un EqNash si pour tout $i \in I$ il n'existe pas d'action a_i tq
  $$u_i(a^*) < u_i(a_i, a^*_{-i})$$

les meilleures réponses

- dans un EqNash, chaque joueur joue une meilleure réponse aux actions des autres. Formellement,

$$BR_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : \text{il n'existe pas } a_i' \text{ t.q. } u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(a_i', a_{-i})\}$$

- quand $|I| = 2$ (forme bimatricielle), on peut repérer
  - dans chaque colonne, les meilleures réponses du joueur 1
  - dans chaque ligne, les meilleures réponses du joueur 2

les meilleures réponses

- dans un EqNash, chaque joueur joue une meilleure réponse aux actions des autres. Formellement,

$$BR_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : \text{il n'existe pas } a'_i \text{ t.q. } u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(a'_i, a_{-i})\}$$

- quand $|I| = 2$ (forme bimatricielle), on peut repérer
  - dans chaque colonne, les meilleures réponses du joueur 1
  - dans chaque ligne, les meilleures réponses du joueur 2
- les EqNash correspondent aux cellules repérées pour les deux joueurs

les meilleures réponses, exemples

- Dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,\mathbf{4})$
T	$(\mathbf{4},0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$

les meilleures réponses, exemples

- Dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(3, 3)$	$(0, \mathbf{4})$
T	$(\mathbf{4}, 0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$

- Jeu de la poule mouillée

	C	T
C	$(3, 3)$	$(\mathbf{2}, \mathbf{4})$
T	$(\mathbf{4}, \mathbf{2})$	$(0, 0)$

les meilleures réponses, exemples

- Dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,\mathbf{4})$
T	$(\mathbf{4},0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$

- Jeu de la poule mouillée

	C	T
C	$(3,3)$	$(\mathbf{2},\mathbf{4})$
T	$(\mathbf{4},\mathbf{2})$	$(0,0)$

- on peut vérifier qu'un couple (a,b) est un EqNash ainsi: on vérifie que le joueur 1 n'a pas intérêt à changer de cellule *dans la colonne* et que le joueur 2 n'a pas intérêt à changer de cellule *dans la ligne*

- exercice (Osborne, 2003): trouvez les EqNashs de

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(2,2)$	$(1,3)$	$(0,1)$
a_2	$(3,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$
a_3	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$

- exercice (Osborne, 2003): trouvez les EqNashs de

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(2,2)$	$(1,3)$	$(0,1)$
a_2	$(3,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$
a_3	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$

- **Proposition**
  a^* est un EqNash ssi pour tout joueur i, $a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*)$

propriétés de l'EqNash

- quelques propriétés de l'EqNash:

propriétés de l'EqNash

- quelques propriétés de l'EqNash:
- si G est résoluble par EISSD et si a^* est sa solution, alors a^* est l'unique EqNash de G

propriétés de l'EqNash

- quelques propriétés de l'EqNash:
- si G est résoluble par EISSD et si a^* est sa solution, alors a^* est l'unique EqNash de G
- si G est un équilibre en stratégies faiblement dominantes ou résoluble par EISFD et si a^* est sa solution, alors a^* est *un* EqNash (mais n'est pas nécessairement unique).

propriétés de l'EqNash

- quelques propriétés de l'EqNash:

- si G est résoluble par EISSD et si a^* est sa solution, alors a^* est l'unique EqNash de G
- si G est un équilibre en stratégies faiblement dominantes ou résoluble par EISFD et si a^* est sa solution, alors a^* est *un* EqNash (mais n'est pas nécessairement unique).
- un EqNash peut contenir des stratégies faiblement dominées !

	b_1	b_2
a_1	$(1,1)$	$(2,0)$
a_2	$(0,2)$	$(2,2)$

propriétés de l'EqNash

- quelques propriétés de l'EqNash:
  - si G est résoluble par EISSD et si a^* est sa solution, alors a^* est l'unique EqNash de G
  - si G est un équilibre en stratégies faiblement dominantes ou résoluble par EISFD et si a^* est sa solution, alors a^* est *un* EqNash (mais n'est pas nécessairement unique).
  - un EqNash peut contenir des stratégies faiblement dominées !

	b_1	b_2
a_1	$(1,1)$	$(2,0)$
a_2	$(0,2)$	$(2,2)$

(a_2, b_2) est un EqNash, mais b_2 est faiblement dominée par b_1.

- un EqNash a^* ne peut pas être faiblement dominé si c'est un EqNash strict i.e. pour tout i, $a_i \neq a_i^*$, $u_i(a_i^*, a_{-i}^*) > u_i(a_i, a_{-i}^*)$.

existence de l'EqNash

- *matching pennies*

	F	P
F	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(1,-1)$

existence de l'EqNash

▷ *matching pennies*

	F	P
F	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(1,-1)$

$\Rightarrow$ pas d'EqNash

existence de l'EqNash

- *matching pennies*

	F	P
F	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

$\Rightarrow$ pas d'EqNash

- *prima facie*, l'EqNash ne peut donc être une solution universelle...

existence de l'EqNash

▷ *matching pennies*

	F	P
F	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

$\Rightarrow$ pas d'EqNash

- *prima facie*, l'EqNash ne peut donc être une solution universelle...
- ...mais la situation change radicalement si l'on autorise les stratégies mixtes

les stratégies mixtes

- une stratégie mixte pour le joueur i est une distribution de probabilité sur les stratégies (dites pures) de i.

  Définition

  Soit un jeu G. L'ensemble des stratégies mixtes du joueur i est l'ensemble $\Delta(A_i)$ des distributions de probabilité sur A_i.

  On note de manière générique α_i une stratégie mixte du joueur i et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ un profil de stratégies mixtes.

les stratégies mixtes

- une stratégie mixte pour le joueur i est une distribution de probabilité sur les stratégies (dites pures) de i.

  Définition

  Soit un jeu G. L'ensemble des stratégies mixtes du joueur i est l'ensemble $\Delta(A_i)$ des distributions de probabilité sur A_i.

  On note de manière générique α_i une stratégie mixte du joueur i et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ un profil de stratégies mixtes.

- comment interpréter une stratégie mixte?

les stratégies mixtes

- une stratégie mixte pour le joueur i est une distribution de probabilité sur les stratégies (dites pures) de i.

  Définition

  Soit un jeu G. L'ensemble des stratégies mixtes du joueur i est l'ensemble $\Delta(A_i)$ des distributions de probabilité sur A_i.

  On note de manière générique α_i une stratégie mixte du joueur i et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ un profil de stratégies mixtes.

- comment interpréter une stratégie mixte?

  Dans le contexte que nous privilégions, l'interprétation la plus simple est de voir une stratégie mixte comme un choix délibérément aléatoire.

- exemples: bluff dans un jeu de carte, contrôle aléatoire par un inspecteur ou surveillant, etc.

les stratégies mixtes

- comment évaluer une stratégie mixte ?
  réponse standard: en utilisant l'espérance d'utilité
  exemple: l'utilité pour le joueur 1 de

  $$(1/2, a_1; 1/2, a_2)$$

  quand le joueur 2 choisit b_1 est

  $$1/2 \cdot u_1(a_1, b_1) + 1/2 \cdot u_1(a_1, b_1)$$

les stratégies mixtes

- Un profil de stratégies mixtes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ induit une probabilité $\alpha(a)$ pour chaque profil de stratégies pures $a = (a_1, ..., a_I)$:

$$\alpha(a_1, ..., a_I) = \prod_{i \in I} \alpha_i(a_i)$$

  L'hypothèse implicite est donc que les stratégies des différents joueurs sont indépendantes les unes des autres.

- l'espérance d'utilité pour i du profil α est

$$U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} \alpha(a) \cdot u_i(a)$$

les stratégies mixtes

- Un profil de stratégies mixtes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ induit une probabilité $\alpha(a)$ pour chaque profil de stratégies pures $a = (a_1, ..., a_I)$:

$$\alpha(a_1, ..., a_I) = \prod_{i \in I} \alpha_i(a_i)$$

  L'hypothèse implicite est donc que les stratégies des différents joueurs sont indépendantes les unes des autres.

- l'espérance d'utilité pour i du profil α est

$$U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} \alpha(a) \cdot u_i(a)$$

- attention: les fonctions d'utilité u_i changent désormais d'interprétation, ce sont des utilités vNM.

domination et stratégies mixtes

- quand on étend le concept de domination aux stratégies mixtes...

  Définitions

  La stratégie mixte $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ domine strictement $a'_i \in A_i$ si pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$,

  $$U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$$

  Une stratégie est strictement dominée s'il existe une stratégie mixte qui la domine strictement.

domination et stratégies mixtes

- quand on étend le concept de domination aux stratégies mixtes...

  Définitions

  La stratégie mixte $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ domine strictement $a'_i \in A_i$ si pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$,

  $$U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$$

  Une stratégie est strictement dominée s'il existe une stratégie mixte qui la domine strictement.

- ...on obtient des différences non-triviales: a_1 est strict. dominée par $(1/2, a_2; 1/2, a_3)$

	b_1	b_2
a_1	1	1
a_2	4	0
a_3	0	3

EqNash et stratégies mixtes

Définitions

L'extension mixte d'un jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est le jeu $(I, (\Delta(A_i)_{i \in I}), (U_i)_{i \in I})$.

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes (EqNash mixte) du jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est un équilibre de Nash de son extension mixte.

EqNash et stratégies mixtes

Définitions

L'extension mixte d'un jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est le jeu $(I, (\Delta(A_i)_{i \in I}), (U_i)_{i \in I})$.

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes (EqNash mixte) du jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est un équilibre de Nash de son extension mixte.

Les EqNash de G (quand ils existent) sont préservés quand on passe à l'extension mixte (heureusement !):

Proposition

Tout EqNash en stratégie pure d'un jeu G est un EqNash mixte (dégénéré) de son extension mixte.

EqNash et stratégies mixtes

Définitions

L'extension mixte d'un jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est le jeu $(I, (\Delta(A_i)_{i \in I}), (U_i)_{i \in I})$.

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes (EqNash mixte) du jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est un équilibre de Nash de son extension mixte.

Les EqNash de G (quand ils existent) sont préservés quand on passe à l'extension mixte (heureusement !):

Proposition

Tout EqNash en stratégie pure d'un jeu G est un EqNash mixte (dégénéré) de son extension mixte.

Théorème (Nash, 1951)

Tout jeu fini a un EqNash mixte. (suit du thm du point fixe de Kakutani)

EqNash mixte, exemple

	G	D
G	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
D	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

EqNash mixte, exemple

	G	*D*
G	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
D	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

$\alpha = (1/2, 1/2)$ et $\beta = (1/2, 1/2)$ forment un équilibre en stratégies mixtes.

EqNash mixte, exemple

	G	D
G	$(1,-1)$	$(-1,1)$
D	$(-1,1)$	$(1,-1)$

$\alpha = (1/2, 1/2)$ et $\beta = (1/2, 1/2)$ forment un équilibre en stratégies mixtes.

✓ aucune stratégie mixte α' ne fait mieux contre β: quel que soit $\alpha'(G)$,
$U_1(\alpha', \beta)$
$=$
$[1/2 \cdot \alpha'(G) \cdot 1 + 1/2 \cdot \alpha'(G) \cdot -1] + [1/2 \cdot (1 - \alpha'(G)) \cdot -1 + 1/2 \cdot (1 - \alpha'(G)) \cdot 1]$
$= 0$

support des stratégies mixtes et meilleures réponses

- Définition. Soit α_i une stratégie mixte du joueur *i*. La stratégie *pure* $a_i \in A_i$ est dans le support de α_i si $\alpha_i(a_i) > 0$.

support des stratégies mixtes et meilleures réponses

- Définition. Soit α_i une stratégie mixte du joueur *i*. La stratégie *pure* $a_i \in A_i$ est dans le support de α_i si $\alpha_i(a_i) > 0$.

- dans *matching pennies*, les deux stratégies pures du joueur 1 sont dans le support de la stratégie mixte d'EqNash.

  ♢ chacune de ces deux stratégies pures sont des meilleures réponses à la stratégie mixte d'EqNash du joueur 2.

  ♢ c'est tout à fait général: si $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ est une meilleure réponse à α_{-i}, alors toute stratégie pure dans le support de α_i est une meilleure réponse à α_{-i}.

support des stratégies mixtes et meilleures réponses

- Définition. Soit α_i une stratégie mixte du joueur i. La stratégie *pure* $a_i \in A_i$ est dans le support de α_i si $\alpha_i(a_i) > 0$.
  - dans *matching pennies*, les deux stratégies pures du joueur 1 sont dans le support de la stratégie mixte d'EqNash.

    ♢ chacune de ces deux stratégies pures sont des meilleures réponses à la stratégie mixte d'EqNash du joueur 2.

    ♢ c'est tout à fait général: si $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ est une meilleure réponse à α_{-i}, alors toute stratégie pure dans le support de α_i est une meilleure réponse à α_{-i}.
- Proposition

  Soit un jeu fini G. α^* est un EqNash en stratégie mixte de G ssi pour tout joueur i, toute stratégie pure dans α_i^* est une meilleure réponse à α_{-i}^*.

correspondances de meilleure réponse

Matching Pennies
Soit x proba. pour que le joueur 2, anti-coordinateur, joue F; y = proba. pour que le joueur 1, coordinateur, joue F.

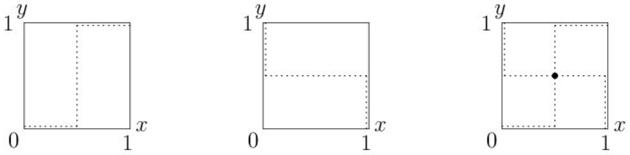


Figure: de Wikipedia

Fig. gauche: meilleures réponses du joueur 1 ; fig. centrale; meilleures réponses du joueur 2 ; fig. droite: EqNash
L'EqNash mixte est repéré par l'intersection des deux courbes de meilleure réponse.

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- si un joueur rationnel croit que l'autre joueur va choisir une action qui appartient à un EqNash, alors il n'aura pas intérêt à choisir autre chose que l'action qui appartient également à l'équilibre

  $\Rightarrow$ on est conduit à l'EqNash si l'on suppose (1) que chaque joueur anticipe correctement l'action des autres, et (2) agit correctement compte tenu de cette anticipation.

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- si un joueur rationnel croit que l'autre joueur va choisir une action qui appartient à un EqNash, alors il n'aura pas intérêt à choisir autre chose que l'action qui appartient également à l'équilibre

  $\Rightarrow$ on est conduit à l'EqNash si l'on suppose (1) que chaque joueur anticipe correctement l'action des autres, et (2) agit correctement compte tenu de cette anticipation.

- mais pourquoi devrait-il croire cela ? et donc pourquoi des joueurs rationnels devraient jouer un EqNash ?

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- si un joueur rationnel croit que l'autre joueur va choisir une action qui appartient à un EqNash, alors il n'aura pas intérêt à choisir autre chose que l'action qui appartient également à l'équilibre

  $\Rightarrow$ on est conduit à l'EqNash si l'on suppose (1) que chaque joueur anticipe correctement l'action des autres, et (2) agit correctement compte tenu de cette anticipation.

- mais pourquoi devrait-il croire cela ? et donc pourquoi des joueurs rationnels devraient jouer un EqNash ?

(arg1) Soit T une théorie décrivant l'issue rationnelle d'une interaction stratégique. T ne doit pas être auto-réfutante au sens suivant: si un joueur connaît T (et notamment ce que dit T à propos du jeu G qui l'intéresse), alors ce joueur ne doit pas avoir intérêt à *dévier* par rapport à T. Supposons que T isole un unique profil d'actions a dans G. Alors aucun joueur ne doit avoir intérêt à dévier (unilatéralement) par rapport à a. a est donc un EqNash.

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- "Les équilibres de Nash sont des prédictions "cohérentes" sur la façon dont le jeu sera joué, au sens où, si tous les joueurs prédisent qu'un certain équilibre de Nash surviendra, alors aucun joueur n'a intérêt à dévier de l'équilibre."(Fudenberg & Tirole 1991)
- "One way to motivate the definition of a Nash equilibrium is to argue that if game theory is to provide a unique solution to a game-theoretic problem then the solution must be a Nash equilibrium, in the following sense. Suppose that game theory makes a unique prediction about the strategy each player will choose. In order for this prediction to be correct, it is necessary that each player be willing to choose the strategy predicted by the theory. Thus, each player's predicted strategy must be that player's best response to the predicted strategies of the other players. Such a prediction could be called *strategically stable* or *self-enforcing*, because no single player wants to deviate from his or her predicted strategy." (Gibbons 1992, p.8)

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- objection: l'argument suppose que la théorie T isole un unique profil d'actions. Mais on a vu que bien souvent il existait *plusieurs* équilibres de Nash. Dans ce cas, l'argument ne fonctionne plus.

(arg2) argument de l'accord préalable **self-enforcing**.

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- objection: l'argument suppose que la théorie T isole un unique profil d'actions. Mais on a vu que bien souvent il existait *plusieurs* équilibres de Nash. Dans ce cas, l'argument ne fonctionne plus.

(arg2) argument de l'accord préalable **self-enforcing**.

- "la" théorie des jeux à laquelle nous nous intéressons est ce qu'on appelle la théorie des jeux non-coopérative. Les joueurs ne peuvent pas établir d'accords *contraignants* (*binding*). Mais ils peuvent se mettre d'accord tout en gardant la liberté de ne pas respecter l'accord au moment de choisir.

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- objection: l'argument suppose que la théorie T isole un unique profil d'actions. Mais on a vu que bien souvent il existait *plusieurs* équilibres de Nash. Dans ce cas, l'argument ne fonctionne plus.

(arg2) argument de l'accord préalable **self-enforcing**.

- "la" théorie des jeux à laquelle nous nous intéressons est ce qu'on appelle la théorie des jeux non-coopérative. Les joueurs ne peuvent pas établir d'accords *contraignants* (*binding*). Mais ils peuvent se mettre d'accord tout en gardant la liberté de ne pas respecter l'accord au moment de choisir.
- l'argument est alors le suivant: si les joueurs se mettent d'accord sur un profil a, alors ce profil sera respecté ssi c'est un équilibre de Nash. L'idée est simple : puisque l'accord n'est pas contraignant, le respect de l'accord repose sur le fait que les joueurs n'ont pas intérêt à dévier de l'accord.

la guerre des sexes

Le joueur 1 et la joueuse 2 doivent coordonner leur sortie : match de boxe ou ballet classique. Ce qu'ils préfèrent avant tout, c'est de passer la soirée ensemble. Mais le joueur 1 préfère la passer au match de boxe tandis que la joueuse 2 préfère la passer au ballet.

la guerre des sexes

Le joueur 1 et la joueuse 2 doivent coordonner leur sortie : match de boxe ou ballet classique. Ce qu'ils préfèrent avant tout, c'est de passer la soirée ensemble. Mais le joueur 1 préfère la passer au match de boxe tandis que la joueuse 2 préfère la passer au ballet.

	boxe	ballet
boxe	(2,1)	(0,0)
ballet	(0,0)	(1,2)

multiplicité de l'EqNash

- dans la Guerre des Sexes,

	boxe	ballet
boxe	(2,1)	(0,0)
ballet	(0,0)	(1,2)

  on a deux EqNash purs. Et il est clair que les joueurs ne voient pas les deux équilibres de la même façon !
- problème: si chaque joueur joue l'action de l'EqNash qu'il préfère, alors on n'obtient pas d'EqNash (boxe, ballet). Les EqNash ne sont pas (nécessairement) interchangeables.
- quand ils ne le sont pas (comme dans la Guerre des Sexes), il y a besoin de coordination

correspondances de meilleure réponse

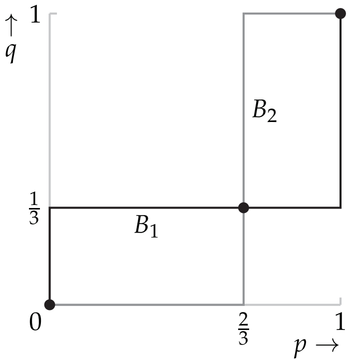


Figure: de Osborne (2003)

p (resp. q) = proba. assignée par 1 (resp. 2) à (*boxe*). 3 EqNashs: les deux purs et celui où 1 joue *boxe* avec proba. 2/3 et 2 le joue avec proba. 1/3.

le problème de la sélection

- le problème de la sélection consiste à savoir comment restreindre l'ensemble des EqNashs. Le problème est aigü quand les EqNashs ne sont pas interchangeables.
- idée naturelle: quand il y a des EqNashs qui en Pareto-dominent d'autres, on écarte ceux qui sont Pareto-dominés.
- exemple: jeu de coordination avec deux EqNashs, l'un Pareto-dominant l'autre:

	b_1	b_2
a_1	(2,2)	(0,0)
a_2	(0,0)	(1,1)

la Chasse au Cerf

- Rousseau, *Discours sur l'origine de l'inégalité*

  "S'agissait-il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela fidèlement garder son poste; mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivît sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie il se souciât for peu de faire manquer la leur à ses compagnons."

	cerf	lièvre
cerf	$(4, 4)$	$(0, 2)$
lièvre	$(2, 0)$	$(2, 2)$

la Chasse au Cerf

- Rousseau, *Discours sur l'origine de l'inégalité*

  "S'agissait-il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela fidèlement garder son poste; mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivît sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie il se souciât for peu de faire manquer la leur à ses compagnons."

	cerf	lièvre
cerf	$(4,4)$	$(0,2)$
lièvre	$(2,0)$	$(2,2)$

$(\textit{cerf}, \textit{cerf})$ Pareto-domine (*lièvre, lièvre*) mais (*lièvre, lièvre*) peut apparaître plus prudent.

difficultés de l'équilibre de Nash

- D. Kreps (1991/1999),

  "Lorsqu'on applique le critère de dominance simple, on fait l'hypothèse implicite que les individus ne choisissent pas des stratégies dominées; quand on élimine celles-ci par itération, on fait l'hypothèse implicite que chaque joueur agit en supposant que les autres ne choisissent pas leurs stratégies dominées, et ainsi de suite. Pour autant que ces hypothèses soient correctes, le critère consistant à éliminer les stratégies dominées - y compris par itération - fournit un moyen très clair et direct de faire des prédictions.

difficultés de l'équilibre de Nash

- D. Kreps (1991/1999)

  "Avec l'équilibre de Nash, la "logique" est beaucoup moins claire. Il est vrai que dans certains cas, chaque participant voit de façon assez évidente quel doit être son choix et celui des autres. Dans de tels cas, les choix "évidents" qui s'imposent ainsi à tous constituent nécessairement un équilibre de Nash...A moins qu'un jeu ait une façon de jouer qui semble évidente, il n'y a pas de raison d'accorder une place particulière à la notion d'équilibre de Nash.
  ...les grandes difficultés que rencontre la théorie des jeux proviennent de ce que l'on ne voit pas clairement (pour ne pas dire plus) quand et pourquoi l'analyse par équilibre est pertinente, si elle l'est."

1.4. appendices

l'EISSD et l'équilibre en EISSD

Définition

Soit un jeu $G = \langle I, \{A_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I} \rangle$. L'ensemble des stratégies du joueur i qui survivent à l'EISSD est l'ensemble A_i^∞ défini ainsi:

- $A_i^0 = A_i$ et D_i^0 est l'ensemble des stratégies str. dominées de i dans $G^0 = G$.
- $A_i^{n+1} = A_i^n - D_i^n$ et D_i^{n+1} est l'ensemble des stratégies stri. dominées de i dans le jeu G^{n+1} qui est la restriction de G aux stratégies A_j^{n+1} pour tout $j \in I$.

$A_i^\infty = \bigcap_{n \in N} A_i^n$

Un équilibre par EISSD est un profil de stratégies $a \in A$ tel que pour chaque joueur $i \in I$, $a_i \in A_i^\infty$.

références

- Giraud, G. (2000) *La théorie des jeux*, Flammarion
- Osborne, M. (2003), *An Introduction to Game Theory*, OUP
- Osborne, M. & Rubinstein, A. (1994) *À Course in Game Theory*, MIT Press
- Fudenberg & Tirole (1991), *Game Theory*, MIT Press

CO8 - Cours de Mikael COZIC

Séance donnée par Vincent ELI

12 mai 2014

Nous commençons par décrire des jeux dotés d'une structure séquentielle et analysons ce qui les distingue des jeux sous 'forme stratégique' (ou 'normale'). Nous définissons formellement ces jeux sous 'forme extensive', puis tentons de les résoudre en les associant à des jeux sous forme normale, pour pouvoir utiliser le concept d'équilibre le plus généralement applicable introduit jusque là : 'l'équilibre de Nash'. Si cette approche permet de résoudre de tels jeux, nous verrons qu'elle a certaines limites qui motivent que l'on cherche, dans le cas des jeux sous forme extensive, à 'raffiner' l'équilibre de Nash en 'équilibre de Nash parfait en sous-jeux'.

1 Les jeux sous forme extensive :

1.1 Une structure séquentielle :

Certaines situations stratégiques possèdent une structure séquentielle (ou temporelle). La réflexion stratégique des joueurs s'en ressent, ce que les solutions proposées pour les jeux doivent prendre en compte.

Explicitons cela en prenant un exemple, le jeu classique de la bataille des sexes (BoS) :

		Fan de Stravinsky	
		B	S
Fan de Bach	B	$2, 1$	$0, 0$
	S	$-1, -1$	$1, 2$

FIGURE 1 – BoS simultané

Il y a deux équilibres de Nash dans ce jeu : (B,S) et (S,B). Dans cette version du jeu, les deux joueurs choisissent de manière simultanée. Cela peut vouloir dire qu'il décident au même moment. Même si les décisions étaient espacées temporellement, cela voudrait dire qu'aucun des deux joueurs n'a la possibilité d'observer le choix de l'autre avant de prendre sa décision, ce qui est le point important.

Supposons maintenant que cela ne soit plus le cas et que, par exemple, le joueur 2 (le fan de Stravinsky), puisse observer d'une manière ou d'une autre la décision du joueur 1 (il peut par exemple voir le billet que le joueur 1 a acheté, lui demander ce qu'il a acheté, etc.). Supposons également que ce fait est 'connaissance commune', c'est-à-dire notamment qu'ex ante, 2 sait qu'il observera ce que 1 aura joué, 1 sait que 2 sait qu'il observera ce que 1 aura joué, et ainsi de suite.
La réflexion stratégique des deux joueurs doit s'en ressentir, de telle sorte que nos analyses passées des jeux ne sont plus applicables. En effet, par exemple, désormais lorsque 1 envisage la situation, il sait que s'il choisit d'aller voir Bach, il peut compter sur le fait que le joueur 2 aura observé son choix et qu'il sera dans l'intérêt du joueur 2 d'également aller voir Bach. Dans ce cas particulier, par rapport au jeu simultané, le jeu séquentiel donne ici une sorte d'avantage au joueur 1, lui permettant d'imposer ses choix.

Des phénomènes différents émergent lorsqu'une interaction se déroule séquentiellement. Il semble donc pertinent de développer une théorie qui permette d'en rendre compte.

1.2 La représentation en arbre :

Le jeu séquentiel de la Bataille des Sexes peut être représenté sous la forme d'un 'arbre', comme dans la figure 2. Formellement, un arbre est un graphe connecté qui ne possède pas de cycle.

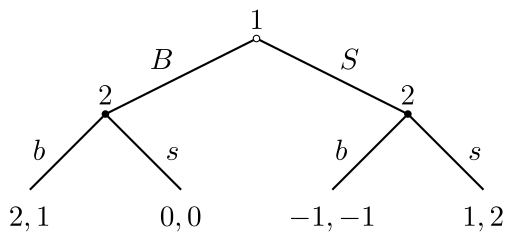


FIGURE 2 – BoS sequentiel

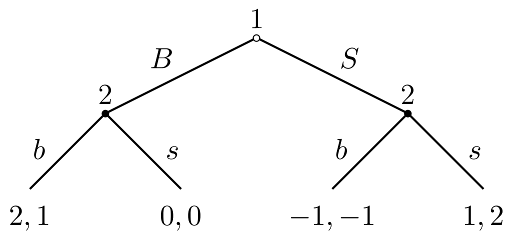
1.3 Ce qui ne change pas :

La dimension séquentielle est la seule nouvelle dimension que nous introduisons dans la théorie des jeux. Nous nous plaçons toujours dans des situations où la seule incertitude des joueurs est l'incertitude proprement 'stratégique' portant sur les décisions des autres joueurs. En particulier, nous travaillons toujours sous 'connaissance commune' du jeu, 'connaissance commune' de la rationalité des joueurs'. Par ailleurs, nous supposons toujours qu'une condition d''information parfaite' des joueurs est satisfaite ; dans ce cours, 'jeu sous forme extensive' n'est qu'une abréviation pour 'jeu sous forme extensive dans une condition d'information parfaite des joueurs'.

1.4 La définition formelle par les histoires :

Plutôt que de définir directement un jeu séquentiel comme un arbre, nous présentons une définition plus intuitive qui part de l'ensemble des 'histoires' possibles du jeu.

Reprenons notre exemple sous forme d'arbre, afin d'introduire cette définition alternative.



Les noeuds terminaux de l'arbre représentent des 'issues' possibles du jeu, et il est possible d'associer à chacune d'entre elles une 'histoire terminale' du jeu. Dans notre exemple, il y **4 histoires terminales** :
- (2,1) correspond à l'histoire terminale **(B,**b**)**
- (0,0) correspond à l'histoire terminale **(B,**s**)**
- (-1,-1) correspond à l'histoire terminale **(S,**b**)**
- (1,2) correspond à l'histoire terminale **(S,**s**)**

De manière plus générale, **toute suite finie [1] d'actions définit une 'histoire'**.

Pour l'instant, nous n'avons détaillé que les histoires terminales de ce jeu, on peut également y ajouter **3 '(sous-)histoires'**, :
- **B** qui est une sous-histoire de (B,b) et de (B,s),
- **S** qui est une sous-histoire de (S,b) et de (S,s),
- $\emptyset$ qui correspond à l''histoire vide', celle du début du jeu.

On a donc un ensemble H d'histoires pour le jeu :
H= { $\emptyset$; (B) ; (S) ; (B,b) ; (B,s) ; (S,b) ; (S,s) }

Pour avoir une définition complète du jeu, il reste à préciser :
- **l'ensemble des joueurs** N=$\{1, 2\}$,

1. La théorie générale intègre également les suites infinies d'actions.

– **une fonction P(.) qui indique le joueur qui doit jouer** après chaque histoire non terminale,
P(∅)=1, P(B)=2 et P(S)=2,
– **des préférences $\succeq_i$ ou des utilités** u_i pour chaque joueur, définies sur l'ensemble des histoires terminales.
Ainsi, dans notre cas, on a (par défaut, ce sont des utilités ordinales) :
u_1((B,b))=2 , u_1((B,s))=0, u_2((B,b))=1, et u_2((B,s))=0
ou de manière équivalente, en préférences :
(B,b)$\succeq_1$(B,s) et (B,b)$\succeq_2$(B,s).

Nous pouvons maintenant donner la formalisation complète d'un jeu extensif.

Définition 1 *Un* ***jeu sous forme extensive*** *est caractérisé par :*
– *un ensemble d'individus N,*
– *un ensemble d'histoires H composé de suites (finies) $\{h_t\}$ qui vérifient les 2 propriétés suivantes :*
   - La suite vide ∅ est un élément de H,
   - Si $\{h_t\}_{t=1}^{T} \in H$, alors pour tout $T' < T$ on a $\{h_t\}_{t=1}^{T'} \in H$,
– *une fonction P(.) qui à chaque histoire non-terminale[2] z associe un élément $i \in N$,*
– *des relations de préférence $\succeq_i$ ou fonctions d'utilités u_i pour chaque joueur sur l'ensemble des histoires terminales[3],*

1.5 Le concept de stratégie :

Pour un joueur, avoir une stratégie consiste à déterminer ex ante une action (parmi ses actions possibles) pour chaque histoire où il pourrait être amené à jouer. En d'autres termes, avant que le jeu ne se déroule séquentiellement, chaque joueur doit déterminer ce qu'il ferait dans tous les déroulements possibles du jeu qui lui donneraient la main.

Définition 2 ***La stratégie du joueur i*** *est une fonction s_i qui associe une action permise par le jeu à chaque histoire $h \in H$ qui vérifie $P(h) = i$. Par action permise par le jeu, on entend, une action qui complète l'histoire h=$\{h_t\}_{t=1}^{T}$ en une histoire de H, soit une action de l'ensemble A(h)=$\{h_{T+1}$ t.q. $\{h_t\}_{t=1}^{T+1} \in H$ }*

Il faut bien mesurer que le joueur i doit donc spécifier ex ante ce qu'il ferait pour toutes les histoires possibles du jeu. C'est-à-dire qu'il doit indiquer l'action qu'il accomplirait pour différentes histoires qui ne dépendent

2. Formellement, on définit un ensemble Z d'histoires terminales composé de toute suite$\{h_t\}_{t=1}^{T} \in$ H pour laquelle on ne peut trouver de h_{T+1} tel que $\{h_t\}_{t=1}^{T+1} \in$ H. La fonction P est alors rigoureusement définie sur $H \setminus Z$ et prend ses valeurs dans N.

3. $\succeq_i \subseteq Z \times Z$

que des actions des autres joueurs $-i$ (il s'agit dans ce cas de faire un plan d'action contingent : "si le joueur 2 faisait a, je ferais ... s'il faisait b, je ferais ...."). Mais il doit aussi indiquer ce qu'il ferait pour des histoires qui ont pour caractéristique d'être incompatibles avec les actions que sa stratégie aura préalablement prescrites. Dans la théorie des jeux sous forme extensive, le concept de 'stratégie' n'est pas notre concept intuitif de 'stratégie'; c'est un objet plus complexe.

Illustrons cela par un exemple.

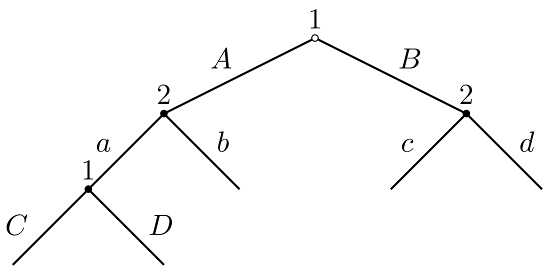


Figure 3 – Voici un jeu extensif à deux joueurs, aux utilités quelconques

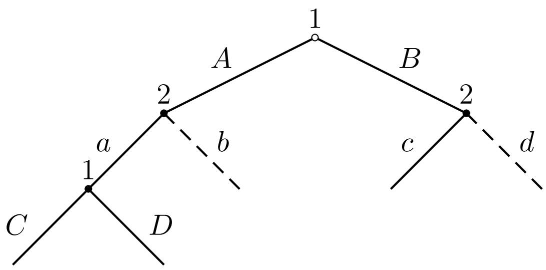


Figure 4 – Pour le joueur 2, spécifier une stratégie revient à faire un plan contingent d'action

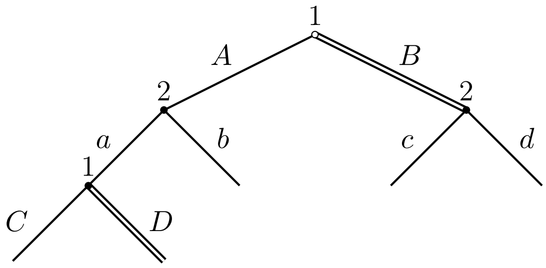


FIGURE 5 – La stratégie du joueur 1 doit spécifier des actions pour des histoires potentiellement incompatibles avec ses actions précédentes

En effet, ici le joueur 1 doit spécifier ce qu'il ferait pour l'histoire $\emptyset$ - par exemple, il peut choisir $s_1(\emptyset)$=B - mais il lui faudra également spécifier son action pour l'histoire (A,a) car P((A,a)) =1. Or, cette histoire est a priori exclue par le fait d'avoir choisi B et le joueur sait que s'il suit sa stratégie, il ne se retrouvera jamais à ce noeud. Néanmoins, le concept de stratégie de la théorie des jeux sous forme extensive demande au joueur 1 de spécifier tout de même ce qu'il ferait à ce noeud - par exemple, s_1((A,a))=D.

1.6 Des stratégies aux issues du jeu :

Quand chaque joueur a choisi une stratégie s_i, un profil joint de stratégies est déterminé. Pour un jeu à deux joueurs, ce sera un vecteur s=(s_1,s_2). La donnée d'un tel profil de stratégies s détermine une unique issue au jeu, c'est à dire : une histoire terminale ; un chemin de l'arbre ; des utilités pour chaque joueur (il suffit de partir de l'histoire vide et à chaque étape d'implémenter pour le joueur qui a la main l'action que sa stratégie associe à l'histoire de l'étape précédente).

Par exemple, en reprenant le jeu précédent et les stratégies des deux joueurs, on obtient le chemin suivant :

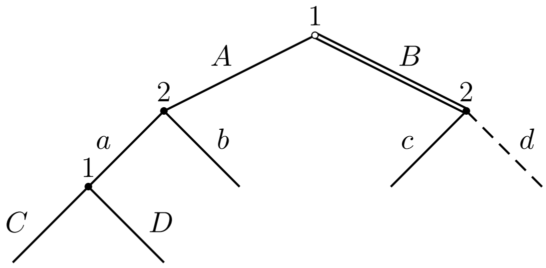


FIGURE 6 – L'histoire terminale déterminée par le profil de stratégies des figures 4 et 5 est (B,d)

Or les utilités ou les préférences sont définies sur les histoires terminales. Il est donc possible d'associer à chaque profil de stratégie s des utilités. Autrement dit, pour chaque joueur, il est possible de déterminer des préférences sur l'ensemble des profils de stratégies.

2 Les concepts d'équilibre :

Nous sommes désormais en mesure d'analyser les équilibres des jeux sous forme extensive.

2.1 L'équilibre de Nash :

DÉFINITION 3 *Un* ***equilibre de Nash*** *d'un jeu sous forme extensive est un profil s^* de stratégies tel que :*

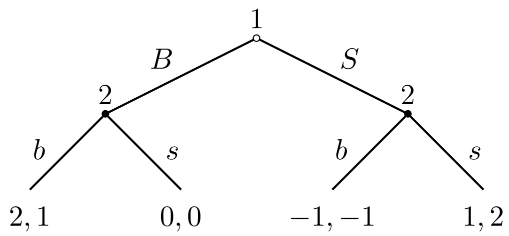
$$\forall i \in N, \forall s_i : u_i(s^*) = u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

ou de manière équivalente :

$$\forall i \in N, \forall s_i : s* = (s_i^*, s_{-i}^*) \succeq_i (s_i, s_{-i}^*)$$

Cette définition suggère que l'on peut voir le jeu sous 'forme extensive' comme un méta-jeu sous 'forme normale', dans lequel le concept d'équilibre n'est plus appliqué aux actions directement, mais aux stratégies, qui, elles, sont déterminées par les joueurs de manière simultanée. Il est donc possible de voir ce jeu comme un jeu sous forme normale avec pour chaque joueur un ensemble d'action identique à l'ensemble de ses stratégies possibles.

Reprenons le jeu BoS pour déterminer les équilibres de Nash.



Le joueur 1 peut choisir entre deux stratégies :
- (B) qui correspond à $s_1(\emptyset)$=B,
- (S) qui correspond à $s_1(\emptyset)$=S.

Le joueur 2 peut choisir entre quatre stratégies :
- (b,b) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=b et $s_2((\mathrm{S}))$=b
- (b,s) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=b et $s_2((\mathrm{S}))$=s
- (s,b) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=s et $s_2((\mathrm{S}))$=b
- (s,s) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=s et $s_2((\mathrm{S}))$=s

On peut donc représenter ce jeu sous la 'forme normale' suivante :

		Fan de Stravinsky			
		(b, b)	(b, s)	(s, b)	(s, s)
Fan de Bach	(B)	$2, 1$	$2, 1$	$0, 0$	$0, 0$
	(S)	$-1, -1$	$1, 2$	$-1, -1$	$1, 2$

FIGURE 7 – BoS séquentiel sous forme normale

Ce jeu a trois équilibres de Nash, c'est-à-dire trois profils de stratégies :
- ((B),(b,s))
- ((B),(b,b))
- ((S),(s,s))

2.2 Limites des équilibres de Nash de la forme normale associée :

Regardons ce à quoi ces profils de stratégies correspondent dans l'arbre du jeu.

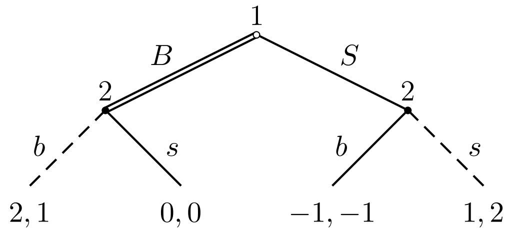


FIGURE 8 – L'équilibre de Nash (B,(b,s))

Cet équilibre semble correspondre au sens commun. À la seconde étape, quel que soit le choix du joueur 1 (B ou S), le joueur 2 a intérêt à suivre ce choix étant données les utilités du jeu. Le joueur 1, sachant cela, compare alors les deux histoires terminales (B,b) et (S,s). Il prend l'action (B) qui lui permet d'atteindre l'histoire terminale qu'il préfère (B,b).

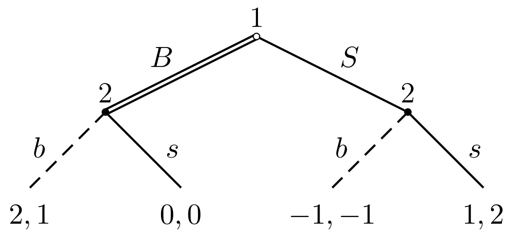


FIGURE 9 – L'équilibre de Nash (B,(b,b))

Même si cet équilibre ressemble au précédent, car il arrive à la même histoire terminale (B,b), il y a quelque chose d'étrange s'agissant de sa justification rationnelle. En effet, ici le joueur 2 choisit une stratégie (b,b) qui lui fait jouer de manière rationnelle b si 1 joue B. Mais, de manière étrange, le joueur 2 s'engage ex ante à jouer b, même si le joueur 1 choisissait S. Cela semble 'non crédible', car si le joueur 1 jouait réellement S, le joueur 2 aurait alors tout intérêt à choisir s, ce qui lui permettrait d'aboutir à l'histoire terminale (S,s) qui est l'issue du jeu la plus favorable pour lui. Quoi qu'il en soit, cela n'a pas d'incidence sur l'issue du jeu. Le joueur 1 compare les deux histoires terminales engendrées par ses actions permises, ainsi que par la stratégie de 2 supposée fixe. Le joueur 1 préfère l'histoire (B,b) à (S,b), et choisit donc l'action B.

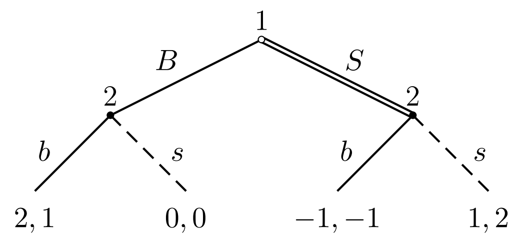


Figure 10 – L'équilibre de Nash (S,(s,s))

Cet équilibre est le plus problématique des trois. En effet, ici comme dans l'équilibre précédent, il y a quelque chose de non crédible dans la stratégie choisie ex ante par le joueur 2 et, contrairement à l'exemple précédent, cette stratégie va venir modifier le choix du joueur 1 et donc changer l'issue du jeu. Le joueur 2 s'engage à jouer s quel que soit le choix du joueur 1. Cela semble rationnel si le joueur 1 a joué S. Mais si ce dernier choisit B, il semble qu'une fois à la seconde étape, le joueur 2 aura intérêt à ne pas suivre sa stratégie et à plutôt jouer b, sinon il choisirait contre sa propre préférence. Du point de vue du joueur 1, tout se passe comme s'il y avait une forme de 'menace (non crédible)' de la part du joueur 2, pour inciter le joueur 1 à ne pas jouer B. Le joueur 1 compare (B,s) et (S,s), et choisit l'action S car il préfère cette dernière issue.

Les deux derniers équilibres - et en particulier le dernier - illustrent le fait que le concept d'équilibre de Nash ne peut être importé mécaniquement de la forme normale associée à un jeu séquentiel, sous peine de déboucher sur des équilibres improbables quand on tient compte de la structure séquentielle du jeu. Cela tient à ce que le passage sous forme matricielle stratégique fait perdre des informations qui étaient contenues dans l'arbre (ou dans la structure en histoires). Cette constatation a amené les théoriciens des jeux (Kuhn, 1953) à développer un raffinement de l'équilibre de Nash adapté pour les jeux sous forme extensive : l''équilibre parfait en sous-jeux' ('subgame perfect equilibrium').

2.3 L'équilibre parfait en sous-jeux et la 'backward induction' :

En fait, dans nos analyses des trois équilibres de Nash du jeu, nous avons déjà introduit le concept qui va nous servir à raffiner convenablement pour nos besoins l'équilibre de Nash : les 'sous-jeux'.

En effet, le problème avec l'équilibre de Nash originel est qu'il ne tient pas compte de la structure séquentielle du jeu : il considère que les joueurs choisissent une stratégie une fois pour toute au début du jeu. Mais, dans un jeu séquentiel, pour qu'une stratégie soit robuste ou crédible, il est nécessaire qu'elle soit rationnelle ou optimale non seulement au début du jeu, mais aussi après chaque histoire potentielle.
Ce qui rend les deux équilibres précédents non robustes, c'est que l'on peut trouver un sous-jeu (c'est à dire, ce qui reste à jouer après une sous-histoire non terminale du jeu) dans lequel la stratégie d'un joueur spécifie des actions qui ne sont pas pour lui rationnelles dans ce sous-jeu. En effet, si l'on se retrouvait réellement à l'un des noeuds en question (par exemple, pour l'équilibre (S,(s,s)) pour le sous-jeu après l'histoire (B)), le joueur (2) aurait tout intérêt à ne pas implémenter sa stratégie ($s_2((B)) = s$), i.e. à dévier de l'équilibre (pour jouer b à la place). En fait, l'équilibre de Nash originel n'impose la rationalité des actions que pour les étapes qui peuvent être réellement atteintes par les stratégies des joueurs (c'est à dire, sur le chemin qui mène à l'issue déterminée par le profil de stratégie). Renforçant les réquisits sur l'existence d'une solution, la notion d'équilibre parfait en sous-jeux impose cette contrainte pour toutes les histoires potentielles du jeu.

Définition 4 *Un* ***équilibre parfait en sous-jeux*** *d'un jeu sous forme extensive est un profil s^* de stratégies tel que :*

$\forall i \in N, \forall$ *h tel que* $P(h) = i$

$$\forall s_i : u_i(s^*|h) = u_i((s_i^*, s_{-i}^*)|h) \geq u_i((s_i, s_{-i}^*)|h)$$

où $u_i((s_i \ , \ s_{-i})|h)$ est l'utilité pour le joueur i associé à l'issue du jeu à laquelle on arrive en partant de h et en suivant les actions spécifiées par le profil de stratégies (s_i, s_{-i}).

Pour trouver les équilibres parfait en sous-jeux il y a deux approches. 1) Comme nous l'avons fait, il est possible de commencer par déterminer les équilibres de Nash et ensuite d'identifier ceux qui satisfont les contraintes supplémentaires de l'équilibre parfait en sous-jeux. 2) Un autre approche plus directe consiste à utiliser le principe d''induction inverse' ou 'rétrograde' ('backward induction'). Il s'agit de partir de la fin du jeu et d'appliquer à chaque étape et à chaque branche le principe de rationalité (en se fondant sur CKR et CKG).

Illustrons le principe de l'induction inverse sur le BoS séquentiel :

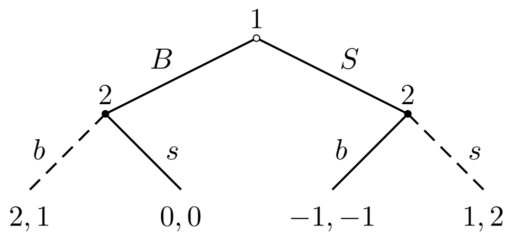


Figure 11 – L'induction rétrograde appliquée à l'avant-dernière étape

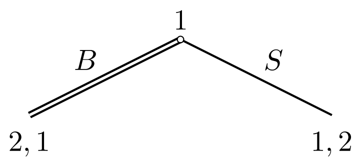


Figure 12 – L'induction rétrograde débouche donc sur l'équilibre (B,(b,s))

Le théorème suivant est dû à Kuhn (1953) :

Théorème 1 *Tout jeu fini sous forme extensive possède au moins un équilibre parfait en sous-jeux (résultat de l'induction rétrograde). Si, de plus, aucun joueur n'est indifférent entre aucune histoire terminale, alors cet équilibre est unique.*

Données empiriques pour la théorie des jeux.

CO8
Jean Baccelli

19 mai 2014

- Quelques données empiriques sur différents cas d'interaction. On suivra ici l'ordre d'intro. des concepts de la partie théorique du cours.
- La synthèse de Camerer, 2003, quoique déjà un peu ancienne, fait toujours autorité. Elle contient plus de détails sur tout ce qui suit.
- Point général sur lequel on insistera constamment : la fausse simplicité qu'il y a à tirer des leçons (en particulier négatives) sur la théorie des jeux à partir de telles ou telles données empiriques.

1. Jeux sous forme stratégique.
   1.1 Jeux solubles par élimination itérative des stratégies dominées - la connaissance commune de rationalité.
   1.2 Jeux sans équilibre de Nash en stratégies pures et avec un équilibre de Nash en stratégies mixtes unique - la randomisation.
2. Jeux sous forme extensive.
   2.1 Induction rétrograde - la connaissance commune de rationalité.
   2.2 Négociation, ultimatum et dictature - les préférences sociales.

Jeux solubles par élimination itérative des stratégies - la connaissance commune de rationalité.

- Cf. le "jeu du concours de beauté" - déjà présenté dans ce cours.
- N joueurs et $\forall i \in N$, $S_i = [0, 100]$. Le joueur j dont le nombre x_j le plus proche du nombre cible $p \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{N} s_i$ gagne un prix, les autres ne gagnent rien. S'il y a *ex-aequo*, le prix est divisé en conséquence.
- Avec $0 \leq p < 1$, l'unique NE de ce jeu est $s^* = (0, ..., 0)$. On peut essayer de fonder épistémiquement cet EN en ref. à l'élimination itérative des stratégies *faiblement* dominées (qui, par contraste avec celle des stratégies strictement dominées, peut avoir des propriétés indésirables - mais celles-ci ne sont en l'occurrence pas pertinentes).

- Ex. avec $p = \frac{2}{3}$. Dans G^0, pour chaque joueur, tout $t_i^0 \in]\frac{2}{3}100, 100]$ est faiblement dominé par $s_i^0 = \frac{2}{3}100$. Des joueurs rationnels devraient (par hyp.) se concentrer sur $S_i^1 = [0, \frac{2}{3}100]$. Dans G^1, pour chaque joueur, tout $t_i^1 \in]\frac{4}{9}100, \frac{2}{3}100]$ est faiblement dominé par $s_i^1 = \frac{4}{9}100$. Sous connaissance commune du jeu et de la rationalité, des joueurs rationnels devraient se concentrer sur $S_i^1 = [0, \frac{4}{9}100]$. Etc.

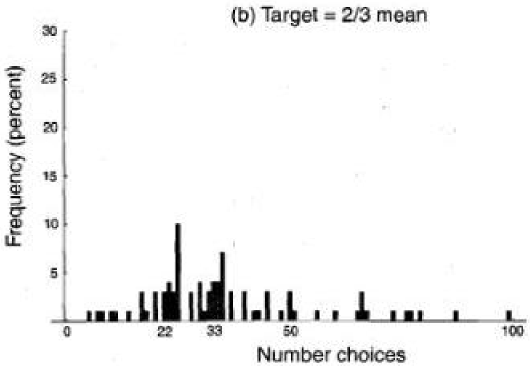
- L'itération *infinie* de telles éliminations converge vers $s^* = (0, ..., 0)$. C'est la seule solution rationnelle pour des agents rationnels, ayant une connaissance commune du jeu et de la rationalité d'ordre *infini*.

- Est ainsi concernée la connaissance de la rationalité des autres joueurs et la connaissance de la connaissance par les autres joueurs de votre propre rationalité $\Rightarrow$ hypothèses sur la rationalité des sujets / leurs croyances au sujet des autres et de leurs croyances à leur sujet.

- Si vous savez que tous les autres joueurs sont parfaitement rationnels et qu'ils savent que vous êtes parfaitement rationnel, etc., vous avez intérêt à jouer 0. Si vous savez qu'ils ne sont qu'imparfaitement rationnels et / ou qu'ils ne savent pas que vous êtes parfaitement rationnels, etc., vous avez intérêt à *ne pas* jouer 0. Votre intérêt est d'être un cran en avance sur les autres joueurs - pas moins, pas plus.

- Le nombre x_i que vous jouez indique votre rationalité, vos capacités cognitives, etc - mais également celles que vous attribuez aux autres. " (...) an interesting question - and a fundamentally empirical one" (Camerer, 2003, p. 258).

- Nagel, 1995 avec des groupes d'une quinzaine d'étudiants allemands. Le nombre donné moyen est proche de 35 et de nombreux sujets donnent ou 33 ou 22. Ses données dans Camerer, 2003, p. 212 :



- L'hypothèse qui colle le mieux (détaillée dans Camerer, 2003, p. 211). Le choix des sujets de "niveau 0" s'apparente à une variable aléatoire de loi uniforme. Les sujets de "niveau 1" pensent que les autres sujets sont de niveau 0 et optimisent en conséquence : $R_i(x_{-i}) = \frac{2}{3}50$. Les sujets de "niveau 2" pensent que les autres sujets sont de niveau 1 et optimisent en conséquence : $R_i(x_{-i}) = \frac{2}{3}[\frac{2}{3}50]$. Etc.

Table 5.7. Estimated fractions ω_k of level-k types in beauty contest games

Estimate	Nagel (1995) $p = 1/2$	Nagel (1995) $p = 2/3$
ω_0	0.16 (0.24)	0.28 (0.13)
ω_1	0.38 (0.30)	0.34 (0.44)
ω_2	0.47 (0.41)	0.37 (0.39)
ω_3	0.00 (0.06)	0.00 (0.03)

Note: Numbers in parentheses indicate Nagel's original estimates.

- La conclusion que les sujets suivent *spontanément* 1, 2, max. 3 étapes du processus d'élimination itérative des stratégies dominées a été répliquée dans de nombreuses conditions (cf. par ex. la revue dans Camerer, 2003, 5.2 - cf. d'autres détails, y compris historiques sur l'origine méconnue du jeu, dans un post d'Al Roth de 2009).

- On a fait varier : la valeur de p ($p < 1$, $p > 1$, etc.) ; la cible statistique (moyenne, médiane, maximum, etc.) ; les sujets (étudiants en psychologie, lecteurs de journaux économiques, gestionnaires de portefeuilles, etc.) - avec des résultats essentiellement identiques.

- Mais, autre aspect important des données du concours de beauté : *avec l'expérience du jeu*, les réponses tendent vite (à la baisse, pour $p = \frac{2}{3}$) vers les valeurs en NE (cf. Nagel, 1995, Fig. 4, 4 périodes).

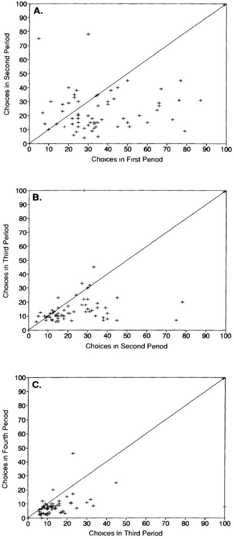


FIGURE 4. OBSERVATIONS OVER TIME FOR SESSIONS 4–7 ($p = {}^2/_3$): A) TRANSITION FROM FIRST TO SECOND PERIOD; B) TRANSITION FROM SECOND TO THIRD PERIOD; C) TRANSITION FROM THIRD TO FOURTH PERIOD

Jeux sans équilibre de Nash en stratégies pures et avec un équilibre de Nash en stratégies mixtes unique - la randomisation.

		Joueur 2	
		1	2
Joueur 1	1	$x, 0$	$0, 1$
	2	$0, 1$	$1, 0$

- Ce sont des variations sur “Matching Pennies”. Pour $x > 0$, le jeu n'a aucun NE en stratégies pures et un NE unique en stratégies mixtes.
- Protocole de Ochs, 1995 pour évaluer les prédictions du MSNE. Dans ce cas, des mécanismes objectifs de randomisation sont fournis - ce qui n'est pas le cas en général (or, on randomise $+ / -$ bien).

- On assigne aux sujets le rôle de J1/ J2. Pour chaque jeu, on leur dit qu'il sera joué 10 fois de suite, et on leur demande de spécifier une stratégie pour l'ensemble de la série. Une stratégie assigne alors une action pour chacun des 10 jeux - exemple : $(1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1)$. On joue une série. Puis on présente à chaque joueur ses gains et la fréquence relative des actions choisies par l'autre joueur dans la série.

- On s'assure de ce que tout est compris et connaissance commune - et l'on recommence.

Figure: Camerer, 2003, p. 140 (données de Ochs, 1995).

Row choice	Column choice 1	Column choice 2	MSE probability	Actual frequency
Game 1				
1	1,0	0,1	0.500	0.500
2	0,1	1,0	0.500	0.500
MSE probability	0.500	0.500		
Actual frequency	0.480	0.520		
Game 2				
1	9,0	0,1	0.500	0.600
2	0,1	1,0	0.500	0.400
MSE probability	0.100	0.900		
Actual frequency	0.300	0.700		
Game 3				
1	4,0	0,1	0.500	0.540
2	0,1	1,0	0.500	0.460
MSE probability	0.200	0.800		
Actual frequency	0.340	0.560		

- Les fréquences agrégées sont assez proches des prédictions du MSNE mais les déviations restent statistiquement significatives.

- Une des prédictions les moins immédiatement transparentes : la variation de x dans $(x, 0)$ dans la case $(1, 1)$ ne devrait ici faire changer les conditions d'équilibre *que* pour le J2 (cf. la Caractérisation Fondamentale des MSNE, TD n° 11) : $p_2^*(1) = \frac{1}{x+1}$.

- Cela n'est pas radicalement infirmé : d'un jeu à l'autre, $p_1(1)$ varie seulement de 0.5 à 0.6 tandis que $p_2(1)$ varie de 0.48 à 0.30. Cependant, les J1 accroissent leur $p_1(1)$ avec l'accroissement de x, ce qui n'est pas prédit par le MSNE - il devrait rester ici à $p_1(1) = \frac{1}{2}$.

- Difficultés à faire parler des données de terrain / jeux particuliers (expliciter l'espace des stratégies, les utilités des diff. issues, etc.).

- Cela dit, certaines “field data” au sujet des prédictions du MSNE. En général, aucun mécanisme objectif de randomisation n'est disponible.

- Walker & Wooders, 2001 à propos des services des joueurs de tennis. Chiappori *et al.* , 2002, Palacios-Huerta, 2003 à propos des penalty. Si les prédictions du MSNE sont justes, alors à l'équilibre servir - tirer - à G. ou à D. doit donner en moyenne à autant de points - de buts (cf. la Caractérisation Fondamentale des MSNE, TD n° 11). L'hypothèse n'est pas infirmée par ces données de tennis / football.

- Graphique de Camerer avec l'essentiel des données du chapitre 3 :

Figure: Camerer, 2003, p. 121 (MAD = .057, R^2 = .84).

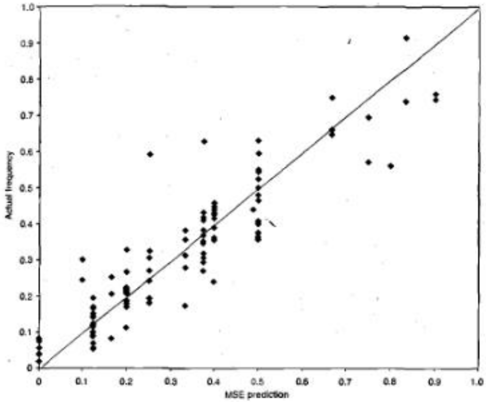


Figure 3.1. Frequencies of different strategy choices predicted by mixed-strategy equilibrium and actual frequencies.

- Appréciation d'ensemble de Camerer, 2003 (p. 148) : "aggregate frequencies of play are surprisingly close to the MSE predictions in magnitude, but the deviations are large enough to be statistically significant. (...) MSE does well in two important senses. First, the MSE predictions are precise and counterintuitive. (...) Second, deviations are damning only if they suggest a better alternative theory. However, it is hard to think of a radical alternative."

Induction rétrograde

- la connaissance commune de rationalité.

Figure: Palacios-Huerta & Volij, 2009, p. 1620 (même jeu en fait que McKelvey & Palfrey, 1992, p. 806, à la différence que les montants ont été ici décuplés).

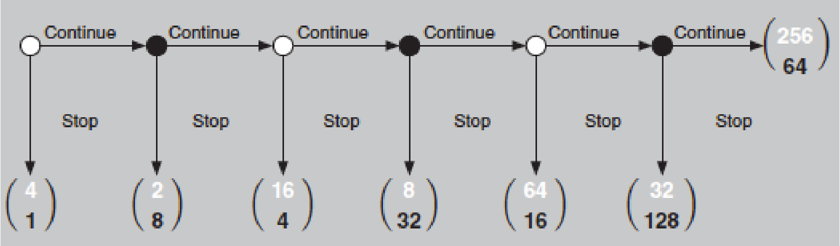


FIGURE 1. A CENTIPEDE GAME

- Variante du jeu du "mille-pattes", déjà vu. Le seul SPNE, que délivre l'induction rétrograde, est $((S, S, S), (S, S, S))$ = seules stratégies rationnelles sous connaissance commune du jeu et de la rationalité.

- Les sujets sont des étudiants de Caltech / Pasadena Comm. College. Chaque sujet joue 10 fois le jeu i.e. une fois avec chacun des autres membres de son groupe. (NB, f_7 cor. au cas $((C, C, C), (C, C, C))$.)

Figure: McKelvey & Palfrey, 1992, p. 808.

TABLE IIA

PROPORTION OF OBSERVATIONS AT EACH TERMINAL NODE

	Session		N	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
	5	(CIT)	100	.02	.09	.39	.28	.20	.01	.01
Six	6	(PCC)	81	.00	.02	.04	.46	.35	.11	.02
Move	7	(PCC)	100	.00	.07	.14	.43	.23	.12	.01
	Total	5–7	281	.007	.064	.199	.384	.253	.078	.014

- Quasiment personne ne joue le SPNE. L'écrasante majorité des sujets stoppent entre la 3° et la 5° période, ce qui correspond à de 1 à 3 étapes dans le processus de résolution par ind. rétrograde.

- Ces données imposent de considérer les mêmes hypothèses que pour le concours de beauté : les sujets sont-ils parfaitement rationnels, croient-ils que les autres le sont, que les autres croient qu'ils le sont, etc. ? Q° prenant un relief particulier avec la structure temporelle.

- Mais les caractéristiques particulières de ce jeu, données par les utilités, imposent de considérer d'autres questions encore : y a-t-il là anticipation de coopération pour s'éloigner d'issues pareto-dominées / exploitation égoïste de la rationalité limitée des autres ?

- Deux autres ensemble de données sur les jeux du mille-pattes qui font progresser notre compréhension de ces deux groupes de pbs..
- Fey *et al.* , 1996, pour des jeux du mille-pattes toujours joués par des étudiants - mais des jeux du mille-pattes à somme constante.
- Palacios-Huerta & Volij, 2009, pour des jeux du mille-pattes comme nous avons vus ici - mais joués entre joueurs d'échec professionnels, entre étudiants, entre joueurs d'échec professionnels et étudiants, etc.

Figure: Palacios-Huerta & Volij, 2009, p. 1620 et Fey *et al.* , 1996, p. 271.

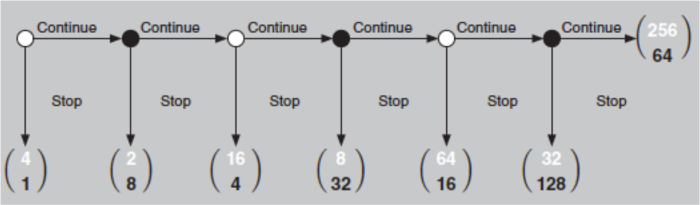


FIGURE 1. A CENTIPEDE GAME

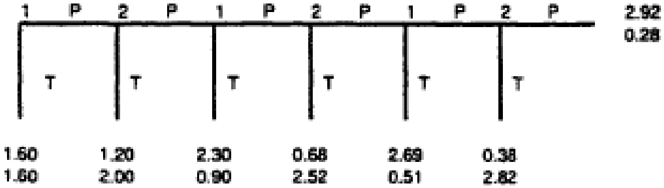


Fig. 2. A six-move constant-sum centipede game

- Ici l'hypothèse collective, coopérative, altruiste, etc. est hors-sujet - par connaissance commune du jeu, cela est connaissance commune.

- On peut s'attendre à ce que la prédiction du SPNE fonctionne alors mieux. Si tel était le cas, cela pourrait indiquer qu'est à l'oeuvre, dans l'appréhension la plus répandue des jeux du mille-pattes plus complexes comme plus haut, une telle hypothèse coopérative, etc.

Figure: McKelvey & Palfrey, 1992, p. 808 puis Fey *et al.* , 1996, p. 273.

TABLE IIA

PROPORTION OF OBSERVATIONS AT EACH TERMINAL NODE

	Session		N	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
	5	(CIT)	100	.02	.09	.39	.28	.20	.01	.01
Six Move	6	(PCC)	81	.00	.02	.04	.46	.35	.11	.02
	7	(PCC)	100	.00	.07	.14	.43	.23	.12	.01
	Total	5–7	281	.007	.064	.199	.384	.253	.078	.014

Table 2. Proportions of matches ending at each outcome

Exp. #	Number of Passes* 0	1	2	3	4	5	6
7	.62	.31	.07	0	0	0	0
CIT-6	(62)	(31)	(7)	0	0	0	0
8	.77	.23	0	0	0	0	0
UI-6	(77)	(23)	0	0	0	0	0
9	.33	.48	.15	.02	.01	0	0
PCC-6	(27)	(39)	(12)	(2)	(1)	0	0
Pooled	.59	.33	.07	.007	.003	0	0
6 move	(166)	(93)	(19)	(2)	(1)	0	0

* The number in parentheses is the number of observations at that node in the game tree.

- Même si les gains sont assez différents suivant les cas, on doit contraster, suivant la variante du jeu, la probabilité que le jeu s'arrête au premier ou au deuxième noeud : $0,071$ vs. $0,92$.

- Cela suggère qu'il peut y avoir à l'oeuvre, dans l'appréhension des jeux du mille-pattes avec des issues pareto-dominées, une croyance même minime que l'autre joueur va tenter la coopération un temps. Grâce à des concepts de théorie des jeux plus avancés que ceux vus ici, on peut formaliser ainsi que les issues empiriquement relevées peuvent être d'équilibre (cf. par exemple Kreps, 1990, p. 77-82).

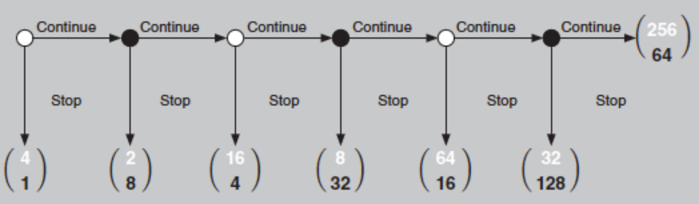


Figure 1. A Centipede Game

- Jeu d'abord joué par des joueurs d'échec de très haut niveau en dehors du laboratoire, en marge de tournois internationaux. Ils n'ont pas d'information sur leurs adversaire, hors qu'ils sont également là en marge du tournoi (cf. Palacios-Huerta & Volij, 2009, p. 1625).

- Jeu ensuite joué en laboratoire entre étudiants, entre joueurs d'échec de haut niveau, puis entre ces différents groupes - mais alors, toujours sous connaissance commune du type de l'adversaire.

Figure: Palacios-Huerta & Volij, 2009, p. 1626.

Table 1—College Students: Proportion of Observations at Each Terminal Node

	N	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
Panel A: UPV college students								
	40	0.075	0.150	0.350	0.300	0.100	0.025	0.000
Panel B: McKelvey and Palfrey (1992) students								
Repetitions 1–5	145	0.000	0.055	0.172	0.331	0.331	0.090	0.021
Repetitions 6–10	136	0.015	0.074	0.228	0.441	0.169	0.066	0.007
Total	281	0.007	0.064	0.199	0.384	0.253	0.078	0.014

Note: The McKelvey and Palfrey students played ten repetitions of a six-node centipede game with about one-tenth lower stakes than the game played by the Universidad del País Vasco (UPV) students, who played it just once.

Table 2—Chess Players: Proportion of Observations at Each Terminal Node

Player 1	N	ELO range	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
Grandmasters	26	2,378–2,671	1.00	—	—	—	—	—	—
International Masters	29	2,183–2,521	0.76	0.17	0.07	—	—	—	—
Federation Masters	15	2,153–2,441	0.73	0.20	0.07	—	—	—	—
Other chess players	141	2,001–2,392	0.61	0.26	0.10	0.03	0.01	—	—
All pairs	211	2,001–2,671	0.687	0.208	0.080	0.018	0.004	—	—

- La différence spectaculaire entre les deux groupes de sujets pris en bloc, ie. entre les étudiants et les joueurs d'échec (NB : Zermelo, 1913 est souvent cité dans la pré-histoire de la théorie des jeux).

- Les différences incroyablement nettes, au sein des joueurs d'échecs, entre les différents joueurs suivant leur niveau officiel : lien monotone entre le rang et la probabilité de jouer le SPNE - jusqu'à 1.

Figure: Palacios-Huerta & Volij, 2009, p. 1632 (probabilités cumulatives).

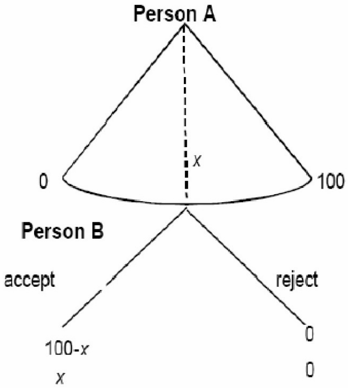
	Games	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
Panel B: Implied stop probability p_i								
I. Students versus students	"1–5"	0.01	0.06	0.40	0.64	0.85	1.00	—
		100	99	93	56	20	3	0
	"6–10"	0.05	0.28	0.46	0.64	0.76	0.66	1.00
		100	95	68	37	13	3	1
II. Students versus chess players	"1–5"	0.13	0.47	0.46	0.68	1.00	—	—
		100	87	46	25	8	0	0
	"6–10"	0.47	0.60	0.95	1.00	—	—	—
		100	53	21	1	0	0	0
III. Chess players versus students	"1–5"	0.15	0.38	0.45	0.58	1	—	—
		100	85	53	29	12	0	0
	"6–10"	0.60	0.58	0.88	1.00	—	—	—
		100	40	17	2	0	0	0
IV. Chess players versus chess players	"1–5"	0.45	0.64	0.90	1.00	—	—	—
		100	55	20	2	0	0	0
	"6–10"	1.00	—	—	—	—	—	—
		100	0	0	0	0	0	0

Note: In panel B, the number of players making a decision at each node is indicated below the implied stop probabilities.

- La différence de comportement suivant le type de l'adversaire (comparer par ex. point par point IV à III pour la série 1-5).
- La rapidité de l'apprentissage avec l'expérience d'une série (comparer par ex. point par point les séries 1-5 et 6-10 pour II).
- Le fait que le SPNE, sous l'interprétation usuelle d'état stable, est bien joué, quand les conditions dites sont réunies (cf. IV, série 6-10).

Négociation, ultimatum et dictature - les préférences sociales.

- Dans le "jeu de l'ultimatum", une somme d'argent, par ex. 100 €, est à répartir. Le premier joueur (joueur A), le "proposant", propose au second joueur (joueur B), le "répondant", une fraction x de la somme. Le répondant peut accepter ou rejeter la proposition - s'il la rejette, les deux joueurs ne reçoivent rien. Une représentation :



- Sous connaissance commune du jeu et de la rationalité, le SPNE délivré par l'induction rétrograde est le couple : ($\epsilon > 0$, accepter).

- C'est la prédiction de la théorie sous ces conditions *et* la supposition que (pour chaque joueur mais en particulier pour le répondant, étant donné la structure du jeu) le seul maximand est les gains individuels.

- Les premiers résultats empiriques concernant ce jeu ont été donnés dans Güth *et al.* , 1982, avec un ensemble d'étudiants allemands. Ceux-ci sont aléatoirement : divisés par type (JA et JB) ; appariés. Nombreuses autres données (cf. Camerer, 2003, p. 50-55) - avec svt pour souci d'assurer que pour chaque paire de joueurs, 1 interaction.

- Les proposants proposent en moyenne 40% de la somme à partager, le plus souvent 50%. Il y a des rejets, en particulier, les offres de moins de 20% sont rejetées par les répondants plus d'une fois sur deux.

- Les résultats sont robustes. La variation des sommes, des conditions d'anonymat, du nombre de jeux par paires ont peu ou pas d'impact. Qqs. variations culturelles (cf. Henrich *et al.* , 2001 : les Indiens Machiguenga sont les plus proches de la prédiction de la théorie, avec moyenne à 26%, mode à 15% - et quasiment aucun rejet (1)).

- Ces données seules ne permettent pas de trancher entre plusieurs interprétations rivales. En particulier, les proposants offrent-ils 40% en moyenne parce que 1/ ils ont une préférence pour les répartitions équitables, justes, une disposition à l'altruisme *ou / et* 2/ ils anticipent que les répondants peuvent se venger d'offres qu'ils estimeront inaceptables et font une offre haute pour éviter cela ?

- Sujet dit des "préférence sociales". Appellation pas transparente, mais qui se comprend si l'on considère par ex. : a/ l'hypothèse altruiste ; b/ l'hypothèse suivant laquelle les répondants rejettent certaines offres car elles leur paraissent injustes. Cela ajouterait de nouveaux arguments aux fonctions d'utilité, au-delà des seuls gains individuels.

- 1° question expérimentalement explorable, du côté des JA : les proposants généreux sont-ils mûs par l'altruisme / par la peur du rejet ?
- Cf. le "jeu [sic] du dictateur", d'abord introduit dans Forsythe *et al.* , 1994. Une somme est à répartir en deux ; un joueur, le "dictateur", décide d'une répartition, sur laquelle l'autre joueur, en spectateur, n'a aucune influence. Si les proposants de l'UG ne sont mûs que par l'altruisme, les résultats du DG devraient rester identiques à pcdmt..
- En moyenne (cf. Camerer, 2003, p. 57-58 pour plus de données), les dictateurs allouent 20% de la somme aux autres joueurs. Même en admettant que cela force une interprétation altruiste, il faudra dire qu'il y a autre chose à l'oeuvre que l'altruisme dans les 40% de l'UG.

- 2° question expérimentalement explorable, du côté des JB : les répondants rejetant des offres font-ils preuve de réciprocité négative à l'égard de JA pingres et / ou d'aversion pour l'inégalité en général ?

- Question éclairée par des variations structurelles sur UG, comme :

- Celles revues dans Huck, 1999 montrent qu'un répondant rejette moins quand il ignore la somme à partager - et donc aussi dans quelle mesure la part qu'on lui en propose est juste, inégalitaire, etc.

- Celles inaugurées par Blount, 1995 montrent qu'un répondant rejette moins quand il sait que le partage proposé est généré aléatoirement par une machine, donc ne provient pas d'une intention égoïste de JA.

- Certains modèles de théorie des jeux, plus complexes que ceux que nous avons vus dans ce cours mais encore parcimonieux, articulent toutes ces idées et prédisent des résultats à l'équilibre plus proches des données (les plus cités : Rabin, 1993 et Fehr & Schmidt, 1999).

Blount, Sally. 1995. When Social Outcomes Aren't Fair : The Effect of Causal Attributions on Preferences. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 63(2), 131–144.

Camerer, Colin. 2003. *Behavioral Game Theory : Experiments in Strategic Interaction*. Princeton University Press.

Chiappori, Pierre-André, Levitt, Steven, & Groseclose, Timothy. 2002. Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous : The Case of Penalty Kicks in Soccer. *American Economic Review*, 1138–1151.

Fehr, Ernst, & Schmidt, Klaus. 1999. A Theory of Fairness, Competition, and Cooperation. *The Quarterly Journal of Economics*, 114(3), 817–868.

Fey, Mark, McKelvey, Richard, & Palfrey, Thomas. 1996. An Experimental Study of Constant-Sum Centipede Games. *International Journal of Game Theory*, 25(3), 269–287.

Forsythe, Robert, Horowitz, Joel, Savin, Nathan, & Sefton, Martin. 1994. Fairness in Simple Bargaining Experiments. *Games and Economic Behavior*, 6(3), 347–369.

Güth, Werner, Schmittberger, Rolf, & Schwarze, Bernd. 1982. An Experimental Analysis of Ultimatum Bargaining. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 3(4), 367–388.

Henrich, Joseph, Boyd, Robert, Bowles, Samuel, Camerer, Colin, Fehr, Ernst, Gintis, Herbert, & McElreath, Richard. 2001. Cooperation, Reciprocity and Punishment in Fifteen Small-Scale Societies. *American Economic Review*, 91(2), 73–78.

Huck, Steffen. 1999. Responder Behavior in Ultimatum Offer Games with Incomplete Information. *Journal of Economic Psychology*, 20(2), 183–206.

Kreps, David. 1990. *Game Theory and Economic Modelling*. Clarendon Press Oxford.

McKelvey, Richard, & Palfrey, Thomas. 1992. An Experimental Study of the Centipede Game. *Econometrica*, 803–836.

Nagel, Rosemarie. 1995. Unraveling in Guessing Games : An Experimental Study. *American Economic Review*, 85(5), 1313–1326.

Ochs, Jack. 1995. Games with Unique, Mixed Strategy Equilibria : An Experimental Study. *Games and Economic Behavior*, 10(1), 202–217.

Palacios-Huerta, Ignacio. 2003. Professionals Play Minimax. *The Review of Economic Studies*, 70(2), 395–415.

Palacios-Huerta, Ignacio, & Volij, Oscar. 2009. Field Centipedes. *The American Economic Review*, 99(4), 1619–1635.

Rabin, Matthew. 1993. Incorporating Fairness into Game Theory and Economics. *Advances in Behavioral Economics*, 297.

Walker, Mark, & Wooders, John. 2001. Minimax Play at Wimbledon. *American Economic Review*, 1521–1538.

Zermelo, Ernst. 1913. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Pages 501–504*

Cogmaster CO8

TD n° 1 - jean.baccelli@ens.fr

11 février 2014

Une relation binaire R dans un ensemble X est un sous-ensemble de son produit cartésien $X \times X$. On supposera ici $X = \{a, ..., z\}$ fini, et on l'appellera "l'ensemble d'options". On s'intéressera à une "relation de préférence" R dans X : $R \subseteq \{(a, a), (a, b), ..., (a, z), (b, a), (b, b), ..., (b, z), ..., (z, z)\}$.

Définition 1 complétude : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est complète si $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$.*

Définition 2 réflexivité : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est réflexive si $\forall x \in X : xRx$.*

Exercice 1 *Prouvez que la complétude implique la réflexivité. Montrez par l'exemple que la réflexivité n'implique pas la complétude - prenez $X = \{x, y\}$.*

Définition 3 transitivité : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est transitive si $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow yRz$.*

Exercice 2 *Montrez par l'exemple que la complétude et la transitivité sont logiquement indépendantes - prenez $X = \{x, y, z\}$.*

Définition 4 symétrie : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est symétrique si $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$.*

Définition 5 indifférence, 1 : *soit $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ une relation réflexive de "préférence large". L'"indifférence", notée $\sim$, est le sous-ensemble symétrique de $\succcurlyeq$: $\sim \subseteq \succcurlyeq$, $\sim = \{(x, y) \in X \times X \mid x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x\}$.*

Exercice 3 *Soit $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ une relation de préférence complète et transitive. Vérifiez que l'indifférence associée forme alors une relation d'équivalence - ie une relation symétrique, réflexive, transitive - et qu'elle n'est jamais vide.*

Définition 6 asymétrie : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est asymétrique si* $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg yRx$.

Définition 7 préférence stricte : *soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation réflexive de "préférence large". La "préférence stricte", notée* $\succ$, *est le sous-ensemble asymétrique de* $\succcurlyeq$: $\succ \subseteq \succcurlyeq$, $\succ = \{(x, y) \in X \times X \mid x \succcurlyeq y \wedge \neg y \succcurlyeq x\}$.

Définition 8 irréflexivité : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est irréflexive si* $\forall x \in X : \neg xRx$.

Exercice 4 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète et transitive. Prouvez que la préférence stricte associée est irréflexive. Est-elle complète ? Prouvez au passage qu'une relation transitive et irréflexive est asymétrique.*

Définition 9 transitivité négative : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est négativement transitive si* $\forall x, y, z \in X : \neg xRy \wedge \neg yRz \Rightarrow \neg xRz$.

Exercice 5 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence réflexive. Prouvez que si* $\succcurlyeq$ *est transitive, la préférence stricte associée est transitive, et que si* $\succcurlyeq$ *est aussi complète, la préférence stricte associée est négativement transitive.*

Cogmaster CO8

TD n° 2 - jean.baccelli@ens.fr

18 février 2014

On change aujourd'hui, pour l'essentiel, de relation primitive : au lieu de partir d'une relation de "préférence large", on partira d'une relation de "préférence stricte" $\succ$, $\succ \subseteq X \times X$, qui par définition sera toujours asymétrique.

Exercice 1 *Soit* $\succ \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de préférence. Prouvez que si* $\succ$ *est négativement transitive, alors elle est aussi transitive. Montrez par l'exemple que l'asymétrie et la transitivité n'impliquent pas la transitivité négative - prenez* $X = \{w, x, y, z\}$

Exercice 2 *Montrez par l'exemple que l'asymétrie et la transitivité négative sont logiquement indépendantes - prenez* $X = \{x, y, z\}$.

Définition 1 indifférence, 2 : *soit* $\succ \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de "préférence stricte". L'"indifférence", notée* $\sim$, *est le sous-ensemble d'incomplétude de* $\succ$ *dans* $X \times X$: $\sim = \{(x, y) \in X \times X \mid \neg x \succ y \wedge \neg y \succ x\}$.

Exercice 3 *Soit* $\succ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence asymétrique et négativement transitive. Vérifiez que l'indifférence associée est une relation d'équivalence, qui n'est pas vide. Comment interpréter cette indifférence, 2 ?*

Définition 2 préférence large : *soit* $\succ \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de "préférence stricte". La "préférence large", notée* $\succcurlyeq$, *correspond au sous-ensemble de* $X \times X$ *défini ainsi :* $\succcurlyeq = \{(x, y) \in X \times X \mid x \succ y \vee x \sim y\}$.

Exercice 4 *Soit* $\succ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence asymétrique. Prouvez que la relation de préférence large associée ne peut pas être incomplète - quelle propriété au juste avez-vous utilisée à cette fin ? Prouvez que si* $\succ$ *est asymétrique et négativement transitive, alors* $\succcurlyeq$ *est une relation transitive.*

Exercice 5 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation primitive de "préférence large" réflexive, et* $\sim_1$ *la relation d'indifférence associée à* $\succcurlyeq$ *suivant la définition 1. Soit* $\succ \subseteq X \times X$ *la relation de "préférence stricte" asymétrique associée à* $\succcurlyeq$*, et* $\sim_2$ *la relation d'indifférence qui est associée à* $\succ$ *suivant la définition 2. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète,* $\sim_1 \neq \sim_2$ *- prenez* $X = \{x, y\}$*. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète,* $\sim_2$ *peut être intransitive - prenez* $X = \{x, y, z\}$*. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète, même quand* $\sim_1$ *et* $\sim_2$ *sont toutes les deux transitives, il se peut que* $\sim_1 \neq \sim_2$ *- prenez* $X = \{w, x, y, z\}$*.*

Cogmaster CO8

TD n° 3 - jean.baccelli@ens.fr

25 février 2014

Exercice 1 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète,* $\succ$ *son sous-ensemble asymétrique,* $\sim$ *son sous-ensemble symétrique. Soit* $u : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité qui représente* $\succcurlyeq$ *de l'une des trois manières suivantes :*
i) $\forall x, y \in X : x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ *;*
ii) $\forall x, y \in X : x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$ *;*
ii) $\forall x, y \in X : x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$*.*
Montrez que (i) $\Leftrightarrow$ *(ii), que (i)* $\Rightarrow$ *(iii), mais que (iii)* $\not\Rightarrow$ *(i) - pour prouver ce dernier point, prenez* $X = \{w, x, y, z\}$ *et une relation de préférence* $\succcurlyeq$ *définie de la manière suivante :* $w \sim x$*,* $y \sim z$*,* $w \succ y$*,* $w \succ z$*,* $x \succ y$*,* $x \succ z$*.*

Définition 1 croissance stricte : *une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante si* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$*.*

Exercice 2 *Soit* X *un ensemble. Soit* $u_1 : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité, qui représente une relation de préférence* $\succcurlyeq_1 \subseteq X \times X$ *au sens i) de l'exercice 1. Soit* $u_2 : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité, qui représente une relation de préférence* $\succcurlyeq_2 \subseteq X \times X$ *au sens i) de l'exercice 1. Prouvez que s'il n'existe pas une fonction strictement croissante* φ *telle que* $u_2 = \varphi \circ u_1$*, alors* $\succcurlyeq_2 \neq \succcurlyeq_1$*.*

Définition 2 anti-symétrie : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est anti-symétrique si* $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$*.*

Définition 3 ordre total : *on appelle ordre total une relation binaire qui est complète, transitive et anti-symétrique.*

Exercice 3 *Soit* X *un ensemble d'options. Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète et transitive,* $\succ$ *son sous-ensemble asymétrique,* $\sim$ *son sous-ensemble symétrique.* $\forall x \in X$*, soit* $I(x) = \{z \in X \mid x \sim z\}$*, l'ensemble d'indifférence de l'option* x *selon* $\succcurlyeq$*. Soit* $\mathbb{I} = \{I(x)\}$*,* $x \in X$*, l'ensemble des ensembles d'indifférence dans* X *selon* $\succcurlyeq$*. Prouvez que* $\mathbb{I}$ *forme une partition de* X *i.e. essentiellement que i)* $\forall x \in X$*,* $I(x) \neq \varnothing$ *et que ii)* $\forall x, y \in X$*, ou bien* $I(x) = I(y)$ *ou bien* $I(x) \cap I(y) = \varnothing$*. Puis, soit la relation de préférence annexe* $\succcurlyeq' \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ *définie de la manière suivante :* $\forall a, b \in \mathbb{I}$*,* $a \succcurlyeq' b \Leftrightarrow \exists x \in a, y \in b$ *tels que* $x \succcurlyeq y$*. Démontrez que* $\succcurlyeq'$ *est un ordre total.*

Exercice 4 *Soit X un ensemble fini d'options et $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ un ordre total. $\forall x \in X$, soit $M(x) = \{z \in X \mid x \succ z\}$. Prouvez que $x \succ y \Leftrightarrow M(y) \subset M(x)$. Vérifiez que par conséquent, la fonction $u : X \to \mathbb{R}$, $\forall x \in X$ $u(x) = \#M(x)$, est une fonction d'utilité qui représente $\succcurlyeq$ aux sens i) et ii) de l'exercice 1.*

Cogmaster CO8

TD n° 4 - jean.baccelli@ens.fr

4 mars 2014

Soit $X = \{x, ..., z\}$ un ensemble. Soit $\Delta(X) = \{p : X \to [0,1] \mid \sum_{x \in X} p(x) = 1\}$. $\Delta(X)$ sera appelé l'ensemble des options pour un décideur dans le risque. Chaque option $p \in \Delta(X)$ peut être décrite comme un vecteur de probabilité $(p_1, x_1 ; ... ; p_n, x_n) \in [0,1]^n \times X$, avec $\forall i \in \{1, ..., n\}, p_i \geq 0$ et $\sum_{i \in \{1,...,n\}} p_i = 1$. Un décideur se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque si ses préférences $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ permettent de définir une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ telle que $\forall p, q \in \Delta(X)$, avec $p = (p_1, x_1 ; ... ; p_n, x_n)$, $q = (q_1, y_1 ; ... ; q_n, y_n)$:

$$p \succcurlyeq q \quad \Leftrightarrow \sum_{i \in \{1,...,n\}} p_i u(x_i) \;\; \geq \sum_{i \in \{1,...,n\}} q_i u(y_i). \tag{1}$$

Exercice 1 *Soit $X = \{0, ..., 100\}$ et un décideur dont on sait qu'il se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque, avec $u(0) = 0$ et $u(100) = 100$. Supposant que pour ce décideur $(1, 60) \sim (\frac{7}{10}, 100 ; \frac{3}{10}, 0)$, déterminez $u(60)$. Quelle serait alors sa préférence entre $(\frac{7}{10}, 60 ; \frac{3}{10}, 0)$ et $(\frac{49}{100}, 100 ; \frac{51}{100}, 0)$?*

Exercice 2 *Soit $X = \{0, ..., 100\}$, et un décideur qui a les préférences : $(\frac{90}{100}, 50 ; \frac{10}{100}, 0) \succ (\frac{45}{100}, 100 ; \frac{55}{100}, 0)$ et $(\frac{1}{100}, 100 ; \frac{99}{100}, 0) \succ (\frac{2}{100}, 50 ; \frac{98}{100}, 0)$. Montrez algébriquement que ce décideur ne peut pas se conformer au modèle de l'utilité espérée dans le risque.*

Exercice 3 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$. *Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *:* $p = (\frac{9}{10}, 49\,; \frac{1}{10}, 16)$, $q = (\frac{7}{10}, 81\,; \frac{3}{10}, 16)$, $r = (\frac{9}{10}, 100\,; \frac{1}{10}, 0)$ *et* $s = (\frac{1}{10}, 100\,; \frac{9}{10}, 81)$. *Déterminez la préférence entre* p *et* q *d'une part, entre* r *et* s *d'autre part, pour un décideur qui se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque avec* $\forall x \in X$, *a/* $u(x) = x$, *b/* $u(x) = \frac{1}{2}x - 7$, *c/* $u(x) = \sqrt{x}$. *Commentez. Revenant à (1), précisez quelle moitié du théorème d'unicité attaché au théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern vous pouvez prouver algébriquement immédiatement, et quelle moitié resterait à prouver.*

Exercice 4 *Soit* $X = \{x, y, z\}$. *Dans ce cas, chaque* $p \in \Delta(X)$ *a la forme* $p = (p_x, x\,; p_y, y\,; p_z, z)$. *Montrez que* $\forall p \in \Delta(X)$, *vous pouvez exprimer* p_y *en fonction de* p_x *et* p_z *ie que chaque* p *est caractérisé par un couple* (p_x, p_z). *On peut alors représenter chaque* $p \in \Delta(X)$ *comme un point dans un "triangle de Marschak - Machina" : par exemple, on prendra un triangle rectangle isocèle avec* y *à l'angle droit,* x *au sommet nord,* z *au sommet est. Soit un décideur qui se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque, dont on supposera aussi que* $\delta_x \succ \delta_y \succ \delta_z$ *[rappel :* $\delta_x \equiv (1, x\,; 0, y\,; 0, z)$*]. Montrez qu'alors, un ensemble d'indifférence du décideur apparaît comme une droite dans le triangle de Marschak - Machina, et que les différents ensemble d'indifférence du décideur apparaissent comme des droites parallèles. Pour cela, déterminez l'égalité caractéristique, dans le modèle de l'utilité espérée, d'un ensemble d'indifférence et tirez-en une expression, pour chaque ensemble d'indifférence* $I(p) = \{q \in \Delta(X) \mid p \sim q\}$, *de* q_x *en fonction de* q_z.

Cogmaster CO8

TD n° 5 & 6 - jean.baccelli@ens.fr

18 & 25 mars 2014

Étant donné X un ensemble de résultats, soit $\Delta(X)$ l'ensemble des options d'un décideur dans le risque. Étant donné $p, q \in \Delta(X)$, on notera ici $p\alpha q$ l'élément $r \in \Delta(X)$ tel que $r = \alpha p \oplus (1-\alpha)q$. Soit $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$. On rappellera ici les axiomes du théorème de von Neumann - Morgenstern :

VNM 1 $\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X})$ *:* $p \succcurlyeq q$ *ou* $q \succcurlyeq p$ *;*
$\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$ *:* $p \succcurlyeq q$ *et* $q \succcurlyeq r \Rightarrow p \succcurlyeq r$*.*

VNM 2 $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$ *tels que* $p \succ q$ *et* $q \succ r$ *:* $\exists \alpha, \beta \in]0,1[$ *tels que* $p\alpha r \succ q$ *et* $q \succ r\beta p$*.*

VNM 3 $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in]0,1[$ *:* $p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$*.*

Exercice 1 *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3, alors elles respectent aussi les deux propriétés suivantes :*
i) $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha, \beta \in]0,1[$ *:* $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\beta r \succcurlyeq q\beta r$ *;*
ii) $\forall p, q, r, s \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in]0,1[$ *:* $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\alpha s \succcurlyeq q\alpha s$*.*
Soit $X = \{0, ..., 100\}$*. Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *tels que* $p = (\frac{90}{100}, 50\ ; \frac{10}{100}, 0)$, $q = (\frac{45}{100}, 100\ ; \frac{55}{100}, 0)$, $r = (\frac{2}{100}, 50\ ; \frac{98}{100}, 0)$, $s = (\frac{1}{100}, 100\ ; \frac{99}{100}, 0)$ *; montrez que les préférences* $p \succ q$, $s \succ r$ *sont incompatibles avec l'équivalence i). Soit* $p', q', r', s' \in \Delta(X)$ *tels que* $p' = (\frac{50}{100}, 20; \frac{50}{100}, 0)$, $q' = (\frac{10}{100}, 100; \frac{39}{100}, 20; \frac{51}{100}, 0)$, $r' = (\frac{11}{100}, 20\ ; \frac{89}{100}, 0)$, $s' = (\frac{10}{100}, 100\ ; \frac{90}{100}, 0)$ *; montrez que les préférences* $p' \succ q'$, $s' \succ r'$ *sont incompatibles avec l'équivalence ii).*

Exercice 2 *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3 (et VNM 1), alors elles respectent aussi les deux propriétés suivantes :*
i) $\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in]0,1[$ *:* $p \succcurlyeq q \Rightarrow p \succcurlyeq p\alpha q \succcurlyeq q$ *;*
ii) $\forall p, q, r, s \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in]0,1[$ *:* $p \succcurlyeq q, r \succcurlyeq s \Rightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha s$.

Exercice 3 *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3 (et VNM 1), alors elles respectent aussi la propriété suivante :*

$$\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X}) \text{ tels que } p \succ q,\ \forall \alpha, \beta \in [0,1] : \alpha > \beta \Leftrightarrow p\alpha q \succ p\beta q.$$

Pour le sens $\Rightarrow$*, considérez successivement les quatre cas possibles, à savoir : 1.1* $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *; 1.2,* $\alpha = 1$, $\beta > 0$ *; 2.1,* $\alpha < 1$, $\beta = 0$ *; 2.2* $\alpha < 1$, $\beta > 0$*. Pour le sens* $\Leftarrow$*, raisonnez par l'absurde en utilisant le sens* $\Rightarrow$ *déjà prouvé.*

Exercice 4 *Soit* $\Delta(X)$ *un ensemble d'options et* $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence. Supposons qu'il existe une option* $\succcurlyeq$*-maximale, notée* p^**, et une option* $\succcurlyeq$*-minimale, notée* p_**. Supposons encore que* $p^* \succ p_*$*, ce qui constitue une hypothèse de non-trivialité. Supposons enfin que* $\forall p \in \Delta(X)$*, il existe* $\alpha_p \in [0,1]$ *tel que* $p \sim p^*\alpha_p p_*$*. Vous aidant de l'exercice précédent, prouvez que si* $\succcurlyeq$ *respecte VNM 3 (et VNM 1), alors ce nombre* α_p *est unique.*

Exercice 5 *Soit* $\Delta(X)$ *un ensemble d'options et* $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence qui respecte VNM 1 - VNM 3. Supposons à nouveau qu'il existe une option maximale* p^**, une option minimale* p_* *et que* $p^* \succ p_*$*. VNM 1 - VNM 3 impliquent notamment le lemme suivant :* $\forall p \in \Delta(X)$*,* $\exists! \alpha_p \in [0,1]$ *tel que* $p \sim p^*\alpha_p p_*$*. Par ailleurs, le théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern établit qu'une relation de préférence respecte VNM 1 - VNM 3 si et seulement s'il existe une fonction d'utilité* $u : X \to \mathbb{R}$ *qui la représente selon le modèle de l'utilité espérée, et l'on vérifie que tel est le cas si et seulement si il existe une fonction d'utilité* $v : \Delta(X) \to \mathbb{R}$ *qui représente la relation de préférence en respectant la propriété suivante :* $\forall p, q \in \Delta(X)$*,* $\forall \alpha \in [0,1]$*,* $v(\alpha p \oplus (1-\alpha)q) = \alpha v(p) + (1-\alpha)v(q)$*. Utilisant cette propriété et ce lemme, prouvez la moitié encore à prouver du théorème d'unicité lié au théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern.*

Cogmaster CO8

TD n° 6 - jean.baccelli@ens.fr

25 mars 2014

Exercice 1 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$. *Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *les loteries* $p = (1, 75)$, $q = (\frac{80}{100}, 100\ ; \frac{20}{100}, 0)$, $r = (\frac{25}{100}, 75\ ; \frac{75}{100}, 0)$, $s = (\frac{20}{100}, 100\ ; \frac{80}{100}, 0)$. *Démontrez que les préférences* $p \succ q$, $r \prec s$ *ne respectent pas l'axiome VNM 3. Puis, soit* $p', q', r', s' \in \Delta(X)$ *les loteries* $p' = (1, 95)$, $q' = (\frac{33}{100}, 100; \frac{66}{100}, 95; \frac{1}{100}, 0)$, $r' = (\frac{34}{100}, 95\ ; \frac{66}{100}, 0)$, $s' = (\frac{33}{100}, 100\ ; \frac{67}{100}, 0)$. *Démontrez que les préférences* $p' \succ q'$, $s' \succ r'$ *ne respectent pas l'axiome VNM 3.*

Exercice 2 *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3 (et VNM 1), alors elles respectent aussi la propriété suivante :*

$$\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X}) \text{ tels que } p \succ q,\ \forall \alpha, \beta \in [0, 1] : \alpha > \beta \Leftrightarrow p\alpha q \succ p\beta q.$$

Pour le sens $\Rightarrow$, *considérez successivement les quatre cas possibles, à savoir : 1.1* $\alpha = 1$, $\beta = 0$; *1.2,* $\alpha = 1$, $\beta > 0$; *2.1,* $\alpha < 1$, $\beta = 0$; *2.2* $\alpha < 1$, $\beta > 0$. *Pour le sens* $\Leftarrow$, *raisonnez par l'absurde en utilisant le sens* $\Rightarrow$ *déjà prouvé.*

Exercice 3 *Soit* $\Delta(X)$ *un ensemble d'options et* $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence. Supposons qu'il existe une option* $\succcurlyeq$*-maximale, notée* p^*, *et une option* $\succcurlyeq$*-minimale, notée* p_*. *Supposons encore que* $p^* \succ p_*$, *ce qui constitue une hypothèse de non-trivialité. Supposons enfin que* $\forall p \in \Delta(X)$, *il existe* $\alpha_p \in [0, 1]$ *tel que* $p \sim p^* \alpha_p p_*$. *Vous aidant de l'exercice précédent, prouvez que si* $\succcurlyeq$ *respecte VNM 3 (et VNM 1), alors ce nombre* α_p *est unique.*

Exercice 4 *Soit* $\Delta(X)$ *un ensemble d'options et* $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence qui respecte VNM 1 - VNM 3. Supposons à nouveau qu'il existe une option maximale* p^**, une option minimale* p_* *et que* $p^* \succ p_*$*. VNM 1 - VNM 3 impliquent notamment le lemme suivant :* $\forall p \in \Delta(X)$*,* $\exists! \alpha_p \in [0,1]$ *tel que* $p \sim p^* \alpha_p p_*$*. Par ailleurs, le théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern établit qu'une relation de préférence respecte VNM 1 - VNM 3 si et seulement s'il existe une fonction d'utilité* $u : X \to \mathbb{R}$ *qui la représente selon le modèle de l'utilité espérée, et l'on vérifie que tel est le cas si et seulement si il existe une fonction d'utilité* $v : \Delta(X) \to \mathbb{R}$ *qui représente la relation de préférence en respectant la propriété suivante :* $\forall p, q \in \Delta(X)$*,* $\forall \alpha \in [0,1]$*,* $v(\alpha p \oplus (1-\alpha) q) = \alpha v(p) + (1-\alpha) v(q)$*. Utilisant cette propriété et ce lemme, prouvez la moitié encore à prouver du théorème d'unicité lié au théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern.*

Cogmaster CO8

TD n° 7 - jean.baccelli@ens.fr

1er avril 2014

Soit $X = [m, M] \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. X est un ensemble convexe, c'est-à-dire : $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in X$. Cette définition se généralise : $\forall (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i = 1$, $\forall x_1, ..., x_n \in X$, $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i x_i \in X$. L'ensemble des options sera toujours défini comme $\Delta(X)$.
Pour chaque loterie p, on notera $EG(p)$ son espérance : $EG(p) = \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} p_i x_i$.

Définition 1 attitudes par rapport au risque : *les préférences d'un décideur manifestent de "l'aversion pour le risque" (respectivement : du "goût pour le risque", de la "neutralité par rapport au risque") si elles vérifient que* $\forall p \in \Delta(X)$, $EG(p) \succcurlyeq p$ *(respectivement :* $EG(p) \preccurlyeq p$, $EG(p) \sim p$*).*

Définition 2 équivalent certain : *un résultat $x \in X$ est un "équivalent certain" d'une loterie $p \in \Delta(X)$ pour un décideur s'il est le cas que $x \sim p$. Quand il en existera, on notera $EC(p)$ un équivalent certain d'une loterie p.*

Définition 3 prime de risque : *quand une loterie $p \in \Delta(X)$ a un équivalent certain unique pour un décideur, la "prime de risque" $\Pi(p)$ que ce décideur attache à cette loterie se définit de la manière suivante :* $\Pi(p) = EG(p) - EC(p)$.

Définition 4 croissance : *la préférence d'un décideur dans un ensemble numérique est dite "croissante" si elle vérifie que $\forall x, y \in X$, $x > y \Rightarrow x \succ y$.*

Exercice 1 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence transitive, complète et croissante. Prouvez qu'alors, pour chaque loterie* $p \in \Delta(X)$*, s'il existe un équivalent certain* $EC(p) \in X$*, cet équivalent certain est unique. Puis supposez que pour chaque loterie* $p \in \Delta(X)$*, il existe bien un équivalent certain* $EC(p) \in X$*. Prouvez qu'alors, les préférences d'un décideur manifestent de l'aversion pour le risque (respectivement : du goût pour le risque, de la neutralité par rapport au risque) si et seulement si :* $\forall p \in \Delta(X)$, $\Pi(p) \geq 0$ *(respectivement :* $\Pi(p) \leq 0$*,* $\Pi(p) = 0$*).*

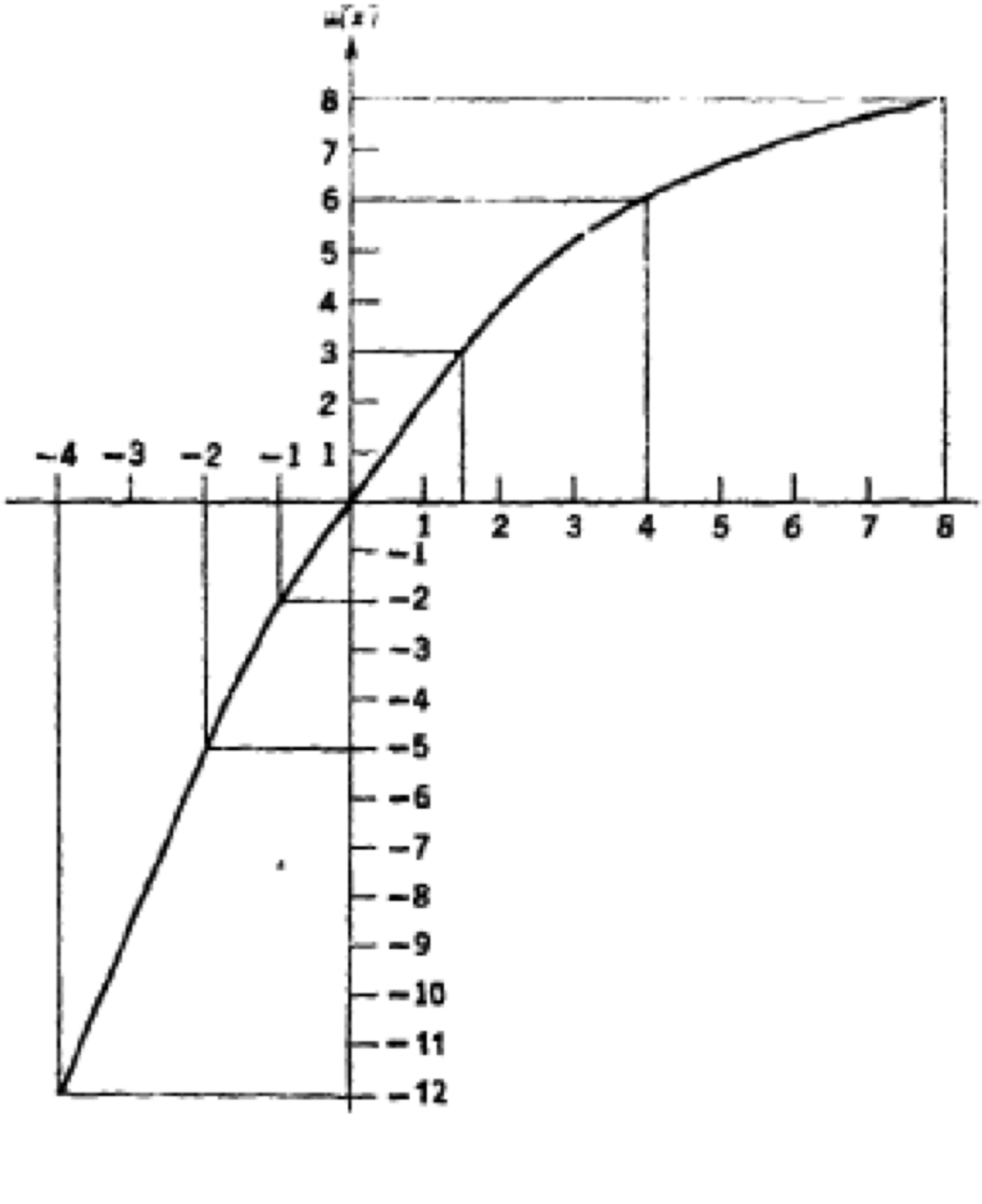
Étant donné X un ensemble convexe, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite concave (respectivement : convexe, linéaire) si elle vérifie que $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0,1] : f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ (respectivement : ... $\leq$ ..., ... = ...). Cette caractérisation se généralise (c'est "l'inégalité de Jensen") : une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite concave (respectivement : convexe, linéaire) si elle vérifie que $\forall(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i = 1$, $\forall x_1, ..., x_n \in X, f[\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i x_i] \geq \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i [f(x_i)]$ (respectivement : ... $\leq$ ..., ... = ...). Cette caractérisation justifie le théorème suivant. Dans le modèle de l'utilité espérée, les préférences d'un décideur manifestent de l'aversion pour le risque (respectivement : du goût pour le risque, de la neutralité par rapport au risque) si et seulement si elles sont représentées par une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ qui est concave (respectivement : convexe, linéaire). Quand les préférences d'un décideur se laisseront représenter par une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ suivant le modèle de l'utilité espérée, on notera $EU(p)$ l'espérance d'utilité de chaque loterie p : $EU(p) = \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} p_i u(x_i)$.

Exercice 2 *Soit* $X = [0, 100]$*. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 16; \frac{1}{2}, 4)$*. Soit* j, k, l *trois décideurs dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentées par les fonctions* $u_j(x) = x^{\frac{1}{2}}$*,* $u_k(x) = x$*,* $u_l(x) = x^2$*. Déterminez* $EG(p)$ *puis,* $\forall i \in \{j, k, l\}$*,* $EU_i(p)$*,* $EC_i(p)$*,* $\Pi_i(p)$*.*

Exercice 3 *Soit* $X = [0, 100]$. *Soit* p *et* j, k, l *comme dans l'exercice précédent, et soit* $q = (\frac{1}{4}, 25; \frac{1}{4}, 8; \frac{1}{4}, 7; \frac{1}{4}, 0)$. *Quelles seront les préférences de* j, k, l *entre* p *et* q *? Déterminez* $EG(q)$ *- comparez le résultat à* $EG(p)$ *et discutez.*

Exercice 4 *Interprétons désormais chaque résultat* $x \in X$ *comme un gain qui vient s'ajouter à un niveau de richesse préexistant du décideur* $w \in W$. *Dans ce cas, il faut relativiser à un niveau de richesse* w *tous les concepts précédents : dès lors, on parlera dorénavant de* $EU(w, p)$, $EC(w, p)$, $\Pi(w, p)$. *Soit* $X = [-6, 25]$, $W = [6, 25]$. *Soit la loterie* $p = (\frac{1}{2}, w + 6; \frac{1}{2}, w - 6)$. *Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = 6$, $w_2 = 10$, $w_3 = 19$. *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par la fonction* $u(w + x) = (w + x)^{\frac{1}{2}}$. *Déterminez* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*

Exercice 5 *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par une fonction dont le graphe est donné dans la figure ci-après. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 4; \frac{1}{2}, 0)$. *Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = -4$, $w_2 = 0$, $w_3 = 4$. *Déterminez grâce au graphe* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*

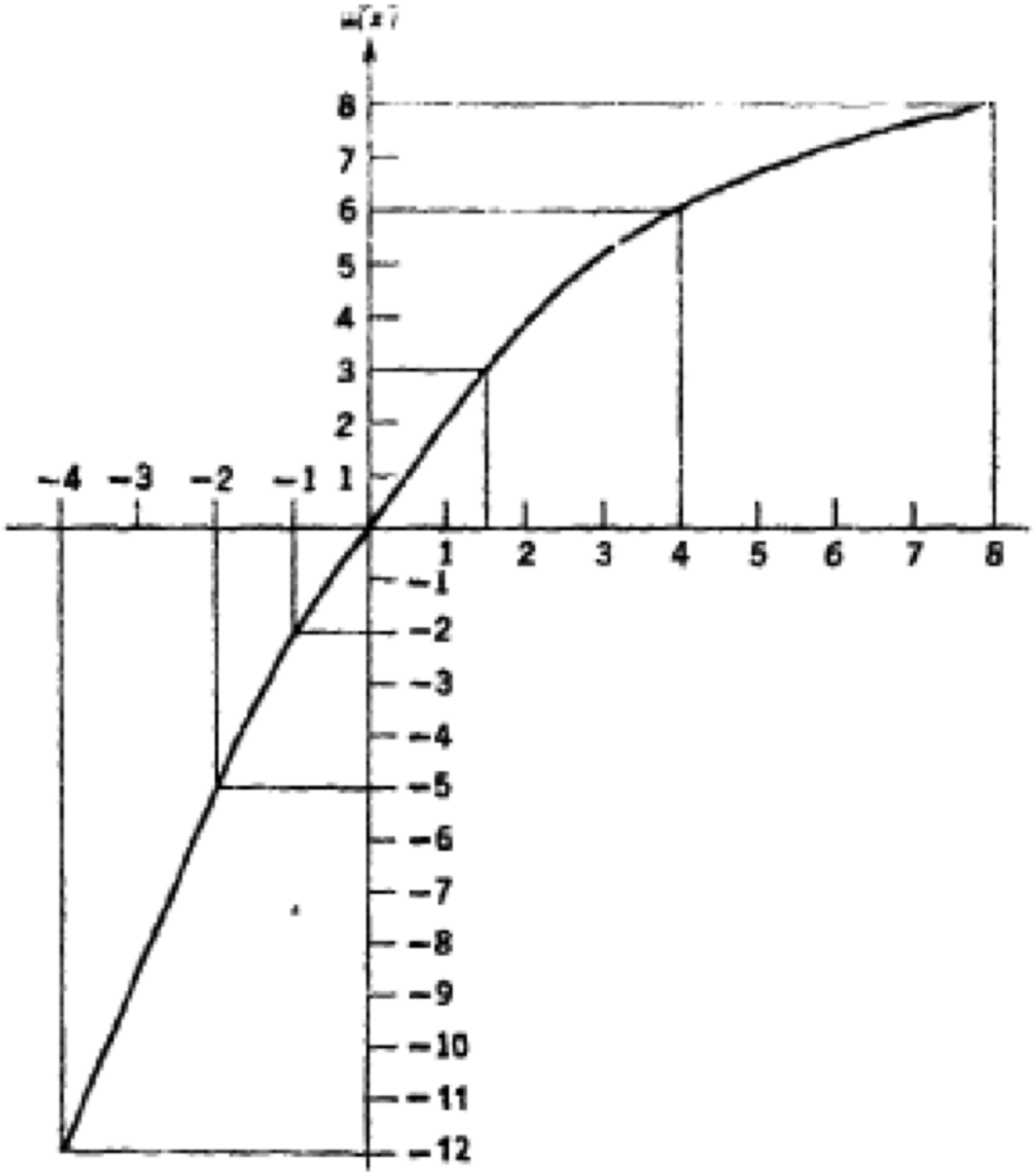

u(x)
8
7
6
5
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7 8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12

Cogmaster CO8

TD n° 8 - jean.baccelli@ens.fr

8 avril 2014

Exercice 1 *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par une fonction dont le graphe est donné dans la figure ci-après. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 4; \frac{1}{2}, 0)$. *Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = -4$, $w_2 = 0$, $w_3 = 4$. *Déterminez grâce au graphe* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*


u(x)
8
7
6
5
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7 8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12

Soit $X = \{x, ..., z\}$ un ensemble de résultats, actions ou conséquences. Soit $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T\}$ un ensemble de périodes ou de points temporels. Soit $\succcurlyeq$ une relation de préférence dans un ensemble d'options de la forme $(x_0, ..., x_t, ..., x_T)$, la t-ième place dans la série correspondant à la période t. Les deux modèles les plus discutés dans la théorie du choix intertemporel sont le modèle dit de l'"actualisation exponentielle" (représentation (1)) et le modèle dit de l'"actualisation quasi-hyperbolique" (représentation (2)).

$$V_0(x_0, ..., x_T) = u(x_0) + \sum_{t=1}^{t=T} \delta^t.u(x_t), \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{1}$$

$$V_0(x_0, ..., x_T) = u(x_0) + \beta[\sum_{t=1}^{t=T} \delta^t.u(x_t)], \qquad \delta, \beta \in [0, 1]. \tag{2}$$

Exercice 2 *Soit i et j deux agents face à la même décision : ils doivent décider si c'est le lendemain, ou le surlendemain, ... , qu'ils feront du sport. Ils éprouvent le même "coût" immédiat à faire du sport, u(sport)=* -4*, et le même "bénéfice" décalé à en avoir fait la veille, u(sport à* $t-1$*)=* $+10$*. En outre, l'inaction n'induit pour eux ni coût immédiat, ni bénéfice décalé - on fixera u(inaction)=* 0*. L'agent i se conforme au modèle* (1) *avec* $\delta = \frac{3}{5}$*. L'agent j se conforme au modèle* (2) *avec* $\delta = \frac{3}{5} = \beta$*. Suivant ces données, i et j prévoiront-ils de faire du sport le lendemain, ou le surlendemain ? Et une fois le jour venu, qu'est-ce que i et j choisiront de faire ? Commentez.*

Exercice 3 *Soit i, j et k trois cueilleurs nomades face à la même décision. À deux reprises, ils ont le choix entre cueillir les fruits disponibles autour d'eux ou bien marcher jusqu'à un autre endroit où les fruits sont meilleurs. S'ils restent à l'endroit initial, ils pourront cueillir des pommes. S'ils marchent sur les deux périodes jusqu'à l'endroit le plus lointain, ils pourront cueillir des mangues. S'ils marchent à la première période et se reposent à la seconde, ils pourront cueillir des poires. En revanche, s'ils se reposent à la première période et marchent à la seconde, ils pourront cueillir des oranges.*

Dans tous les cas, ils dégusteront leurs fruits dans une troisième période, à la fin du jour. Les trois cueilleurs éprouvent le même coût immédiat à la marche, u(marche)= -10. En outre, ils ont les mêmes goûts en matière de fruit : u(mangue)= 30, u(poire)= 16, u(orange)= 8, u(pomme)= -14. L'agent i se conforme au modèle (1) avec $\delta = 1$. Les agents j et k se conforment au modèle (2) avec $\delta = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$. Mais alors que j est "naïf", k est "lucide" au sens (stipulatif) suivant : en se décidant ex ante, il ne considère que les plans d'action dont il anticipe qu'il pourra bien les suivre. Quels fruits i, j et k mangeront-ils à la fin de leur journée ? Commentez.

Exercice 4 *Soit i, j et k trois cueilleurs sédentaires face à la même décision. Sur quatre périodes, ils ont le choix entre cueillir les fruits sur les arbres autour d'eux, ou les laisser mûrir encore pour qu'ils deviennent meilleurs. Dans tous les cas, ils dégusteront leurs fruits dans une cinquième période. L'acte de cueillir n'a pour aucun d'entre eux une utilité négative ou positive. Les cueilleurs ont les mêmes goûts en matière de fruits (dénotant par "$*$" les degrés de maturité) : $u(*) = 3$, $u(**) = 5$, $u(***) = 8$, $u(****) = 13$. Les décideurs sont les mêmes que ceux de l'exercice précédent. Combien mûrs seront les fruits qu'i, j et k mangeront à la fin de leur journée ? Commentez.*

Cogmaster CO8

TD n° 9 - jean.baccelli@ens.fr

29 avril 2014

Définition 1 dominance stricte *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n ; u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu sous forme stratégique. Pour le joueur* i*, une stratégie* $s_i \in S_i$ *est strictement dominée dans le jeu* G *par une stratégie* $t_i \in S_i$*, ce que l'on notera* $s_i \prec_i t_i$*, si* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})$*. On dit d'un jeu* G *qu'il est résoluble par la dominance stricte si (sous connaissance commune du jeu et de la rationalité des joueurs) on peut par élimination itérative des stratégies strictement dominées parvenir à un jeu réduit* G^ω *dans lequel chaque joueur i est indifférent entre chacune de ses stratégies* $s_i^\omega \in S_i^\omega$ *qu'il a dans ce jeu réduit - le cas d'un profil de stratégies* $s^* \in S$ *unique étant un cas particulier.*

Exercice 1 *Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte. Pour justifier épistémiquement vos réponses, vous a-t-il été nécessaire de faire référence à la connaissance commune du jeu et de la rationalité des joueurs ?*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$2, 1$	$4, 2$
	B	$1, 1$	$0, 3$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$1, 1$	$1, 0$
	B	$2, 3$	$4, 2$

Exercice 2 *Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte.*

Joueur 2

Joueur 1		X	Y	Z
	A	$7, 0$	$0, 5$	$0, 3$
	B	$5, 0$	$2, 2$	$5, 0$
	C	$0, 7$	$0, 5$	$7, 3$

Joueur 2

Joueur 1		V	W	X	Y	Z
	A	$4, -1$	$3, 0$	$-3, 1$	$-1, 4$	$-2, 0$
	B	$-1, 1$	$2, 2$	$2, 3$	$-1, 0$	$2, 5$
	C	$2, 1$	$-1, -1$	$0, 4$	$4, -1$	$0, 2$
	D	$1, 6$	$-3, 0$	$-1, 4$	$1, 1$	$-1, 4$
	E	$0, 0$	$1, 4$	$-3, 1$	$-2, 3$	$-1, -1$

Exercice 3 *Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte.*

		Joueur 2		
		X	Y	Z
	A	$1,1$	$3,0$	$1,1$
Joueur 1	B	$0,-2$	$1,3$	$0,4$
	C	$-1,4$	$4,5$	$0,6$

		Joueur 2			
		W	X	Y	Z
	A	$2,0$	$2,0$	$2,0$	$2,0$
Joueur 1	B	$4,2$	$4,3$	$3,0$	$3,0$
	C	$1,1$	$5,2$	$1,1$	$5,1$
	D	$1,1$	$5,2$	$1,1$	$5,1$

Exercice 4 *Soit $G = \langle S_i, S_j \,;\, u_i, u_j \rangle$ le jeu caractérisé de la manière suivante. Les joueurs i et j sélectionnent simultanément une date pour se rencontrer, avec $S_i = S_j = \{1, 2, 3, 4\}$. Les utilités du jeu sont les suivantes :* $u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} 2 - (s_i - s_j)^2 & si\ s_i < s_j \\ -(s_i - s_j)^2 & si\ s_i \geq s_j \end{cases}$, $u_j(s_i, s_j) = \begin{cases} 2 - (s_i - s_j)^2 & si\ s_j < s_i \\ -(s_i - s_j)^2 & si\ s_j \geq s_i \end{cases}$.
Présentez G sous la forme sous laquelle les jeux précédents ont été présentés. Résolvez G par la dominance stricte.

Définition 2 dominance faible *Soit $G = \langle S_1, ..., S_n \,;\, u_1, ..., u_n \rangle$ un jeu sous forme stratégique. Pour le joueur i, une stratégie $s_i \in S_i$ est faiblement dominée dans le jeu G par une stratégie $t_i \in S_i$, ce que l'on notera $s_i \preccurlyeq_i t_i$, si $\forall s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i})$ et $\exists t_{-i} \in S_{-i}$ telle que $u_i(s_i, t_{-i}) < u_i(t_i, t_{-i})$.*

Définition 3 équilibre de nash *Soit $G = \langle S_1, ..., S_n \,;\, u_1, ..., u_n \rangle$ un jeu sous forme stratégique. Un profil de stratégies $s^* \in S$ est un équilibre de Nash (désormais EN) si $\forall i \in N$, $\forall t_i \in S_i$, $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(t_i, s_{-i}^*)$.*

Exercice 5 *Essayez de résoudre les deux jeux suivants par la dominance stricte. Par ailleurs, s'ils existent, identifiez-en les EN. Sur la base de vos réponses, des exercices précédents et des définitions, précisez si, quand il existe un EN pour un jeu G : 1/ l'EN peut être constitué de stratégies strictement dominées ; 2/ l'EN peut être constitué de stratégies faiblement dominées ; 3/ l'EN doit correspondre à la solution de G par la dominance stricte.*

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	$2,1$	$0,4$	$4,0$
	B	$0,1$	$1,0$	$1,4$
	C	$1,1$	$3,1$	$2,0$

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	$1,1$	$0,1$	$0,0$
	B	$1,0$	$2,1$	$1,2$
	C	$0,0$	$1,1$	$2,0$

Cogmaster CO8

TD n° 10 - jean.baccelli@ens.fr

6 mai 2014

Exercice 1 *Déterminez les EN (équilibres de Nash, toujours implicitement en "stratégies pures" pour la séance d'aujourd'hui) des trois jeux suivants.*

Joueur 2

Joueur 1		Y	Z
	A	$2,0$	$0,8$
	B	$3,3$	$2,2$

Joueur 2

Joueur 1		Y	Z
	A	$3,5$	$0,4$
	B	$1,0$	$5,6$

Joueur 2

Joueur 1		X	Y	Z
	A	$0,2$	$2,2$	$2,3$
	B	$4,4$	$3,3$	$1,2$
	C	$3,2$	$1,3$	$0,2$

Exercice 2 *Soit* $G = \langle S_i, S_j\ ;\ u_i, u_j \rangle$ *le jeu caractérisé de la manière suivante. Deux voyageurs ont perdu un même objet lors d'un déplacement et doivent en déclarer le prix à leur assurance. On prendra* $S_i = S_j = \{2,3,4,5\}$*. Leur compagnie d'assurance a mis en place ce mécanisme d'indemnisation :* $u_i(s_i,s_j) = \begin{cases} s_i & si\ s_i = s_j \\ s_j - 2 & si\ s_j < s_i \\ s_i + 2 & si\ s_i < s_j \end{cases}$, $u_j(s_i,s_j) = \begin{cases} s_j & si\ s_j = s_i \\ s_i - 2 & si\ s_i < s_j \\ s_j + 2 & si\ s_j < s_i \end{cases}$ *. Présentez G sous la forme sous laquelle les jeux précédents ont été présentés. Déterminez-en l'EN, s'il existe. Discutez.*

Définition 1 correspondance de meilleure réponse *La "correspondance individuelle de meilleure réponse" du joueur i aux stratégies des joueurs* $j \neq i$, $R_i : S_{-i} \to S_i$, *est définie de la manière suivante :* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$, $R_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid \forall t_i \in S_i, u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(t_i, s_{-i})\}$. *La "correspondance jointe de meilleure réponse",* $R : S \to S$, *est définie de la manière suivante :* $\forall s \in S$, $R(s) = \prod_{i \in N} R_i(s_{-i})$. *Il suit de la définition d'un équilibre de Nash que* $s^* \in S$ *est un EN pour un jeu G si et seulement si* s^* *est un point fixe de la correspondance jointe de meilleure réponse, c'est-à-dire si* $s^* \in R(s^*)$. *Il suit également de ces caractérisations que quand on peut tracer un graphe pour les correspondances individuelles de meilleure réponse, l'ensemble des EN s'identifie à l'ensemble des intersections entre ces graphes individuels.*

Exercice 3 *Soit* $G_1 = \langle S_1, S_2 \,;\, u_1, u_2 \rangle$ *le jeu caractérisé par* $S_1 = S_2 = [0,1]$, $u_1(s_1, s_2) = s_1(1-2s_2)$ *et* $u_2(s_1, s_2) = s_2(2s_1-1)$. *Soit* $G_2 = \langle S_1, S_2 \,;\, u_1, u_2 \rangle$ *le jeu caractérisé par* $S_1 = S_2 = [0,1]$, $u_1(s_1, s_2) = s_1(2-3s_2)$ *ainsi que* $u_2(s_1, s_2) = s_2(4s_1-3)$. *Dans chaque cas : 1/ définissez les correspondances individuelles de meilleure réponse 2/ tracez les graphes de ces correspondances individuelles 3/ relevez, le cas échéant, les intersections des graphes.*

Exercice 4 *Les deux jeux suivants ont-ils des EN ?*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,2$	$1,5$
	B	$2,3$	$3,1$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,-3$	$0,0$
	B	$-1,1$	$2,-2$

Cogmaster CO8

TD n° 11 - jean.baccelli@ens.fr

13 mai 2014

Définition 1 extension mixte *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n\ ;\ u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu sous forme stratégique avec* S_i *fini,* $\forall i \in N$*. On définira ici l'"extension mixte"* G^m *de* G*,* $G^m = \langle \Delta_1, ..., \Delta_n\ ;\ v_1, ..., v_n \rangle$*, de la manière suivante :* $\forall i \in N$*,* $\Delta_i = \Delta(S_i)$ *et* $\forall \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Delta = \prod_{j \in N} \Delta_j$*,* $v_i(\sigma) = \sum_{s \in S} [\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j)] u_i(s)$*.*

Exercice 1 *Considérez l'extension mixte des trois jeux suivants. Quand cela vous sera possible, procédez à l'élimination itérative des stratégies pures strictement dominées par des stratégies pures ou par des stratégies mixtes.*

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	$1,1$	$0,4$	$2,2$
	B	$2,4$	$2,1$	$1,2$
	C	$1,0$	$0,1$	$0,2$

		Joueur 2			
		W	X	Y	Z
Joueur 1	A	$3,1$	$1,0$	$0,2$	$1,1$
	B	$1,0$	$0,10$	$1,0$	$0,10$
	C	$2,1$	$1,0$	$0,0$	$0,0$
	D	$0,0$	$\frac{1}{2},0$	$3,1$	$0,0$

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	$2,1$	$4,\frac{1}{2}$	$0,0$
	B	$\frac{1}{2},0$	$1,1$	$\frac{1}{2},0$
	C	$0,0$	$0,\frac{1}{2}$	$1,2$

Exercice 2 *Les jeux suivants possèdent-ils des EN en stratégies pures ? Considérez-en les extensions mixtes. Grâce à une matrice auxiliaire de probabilités jointes, identifiez les EN en stratégies mixtes de ces jeux en 1/ définissant les correspondances individuelles de meilleure réponse 2/ traçant les graphes des correspondances individuelles 3/ relevant les intersections des graphes.*

Joueur 2

Joueur 1		Y	Z
	A	$0,0$	$6,1$
	B	$1,6$	$3,3$

Joueur 2

Joueur 1		Y	Z
	A	$3,2$	$1,5$
	B	$2,3$	$3,1$

Joueur 2

Joueur 1		Y	Z
	A	$3,-3$	$0,0$
	B	$-1,1$	$2,-2$

Proposition 1 caractérisation fondamentale *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n \; ; \; u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu fini et* $G^m\langle \Delta_1, ..., \Delta_n \; ; \; v_1, ..., v_n \rangle$ *son extension mixte. Un profil de stratégies mixtes* σ^* *est un EN pour* G^m *si et seulement si* $\forall i \in N$, $\forall s_i, t_i, r_i \in S_i$:
i) $\sigma_i^*(s_i) > 0$, $\sigma_i^*(t_i) > 0 \Rightarrow v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(t_i, \sigma_{-i}^*)$,
ii) $\sigma_i^*(s_i) > 0$, $\sigma_i^*(r_i) = 0 \Rightarrow v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(r_i, \sigma_{-i}^*)$.

Exercice 3 *Utilisant la caractérisation fondamentale, déterminez les EN en stratégies mixtes des trois jeux suivants. Dans le dernier cas, vérifiez votre résultat en utilisant plus patiemment la méthode utilisée dans l'exercice 2. Comparez. Qu'est-ce qui distingue ce troisième jeu des deux précédents ?*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$2, -2$	$0, 0$
	B	$-6, 6$	$4, -4$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$1, 2$	$3, 1$
	B	$2, 1$	$1, 3$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$1, 1$	$0, 1$
	B	$0, 2$	$1, 3$

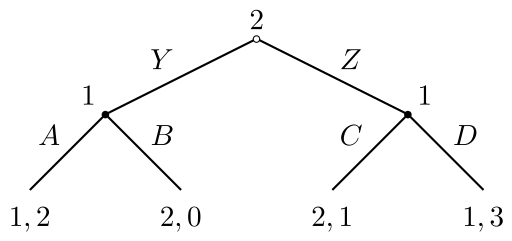
Cogmaster CO8

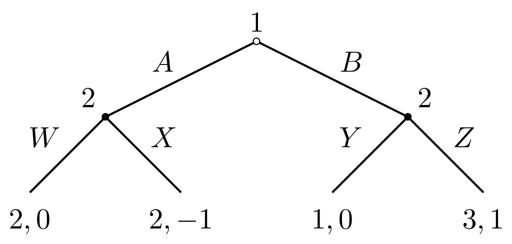
TD n° 12 - jean.baccelli@ens.fr

20 mai 2014

Exercice 1 *Deux armées veulent prendre possession d'une île, à laquelle chacune peut accéder par un pont qui lui est propre. L'une des armées prend l'initiative, franchit le pont qui lui est propre, et occupe l'île. L'autre armée hésite à faire de même pour tenter de prendre l'île. En cas d'attaque, l'armée déjà en place hésiterait entre combattre ou battre en retraite par le pont déjà franchi. Chaque armée préfère occuper l'île à la laisser à l'armée adverse, mais l'affrontement est pour chacune la pire des éventualités. Modélisez la situation comme un jeu sous forme extensive. Trouvez d'éventuels EN du jeu sous forme stratégique associé. Trouvez d'éventuels EN parfaits en sous-jeux du jeu sous forme extensive. Discutez ce qui se passerait si préalablement à l'interaction décrite, l'armée ayant pris possession de l'île avait l'opportunité de brûler le pont pouvant éventuellement lui permettre de battre en retraite.*

Exercice 2 *Associez un jeu sous forme stratégique à chacun des jeux sous forme extensive suivants. Trouvez d'éventuels EN de ces jeux associés. Comparez à d'éventuels EN parfaits en sous-jeux des jeux sous forme extensive.*



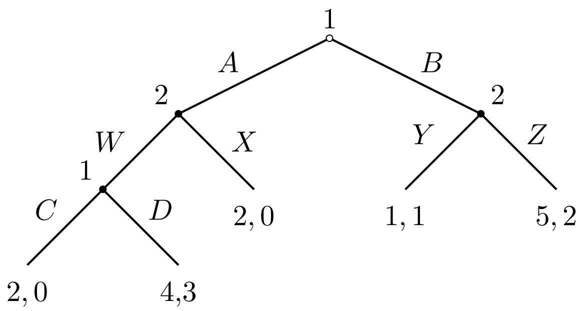


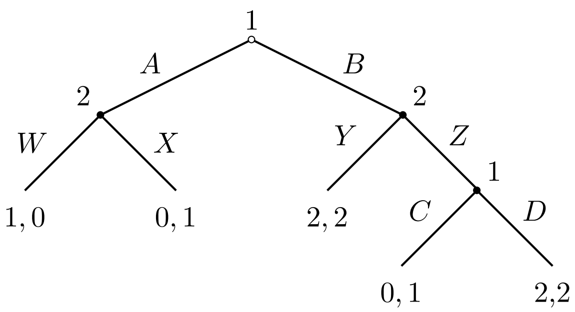
Exercice 3 *Associez un jeu sous forme extensive à chacun des jeux sous forme stratégique suivants : dans le premier cas, faîtes du joueur 1 le meneur, dans le second cas, faîtes du joueur 2 le meneur. Trouvez d'éventuels EN parfaits en sous-jeux de ces jeux associés. Comparez à d'éventuels EN des jeux sous forme stratégique.*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,5$	$0,4$
	B	$1,0$	$5,6$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,2$	$1,5$
	B	$2,3$	$3,1$

Exercice 4 *Associez un jeu sous forme stratégique à chacun des jeux sous forme extensive suivants. Trouvez d'éventuels EN de ces jeux associés. Comparez à d'éventuels EN parfaits en sous-jeux des jeux sous forme extensive.*




1
A
B
2
2
W
X
Y
Z
1
1, 0
0, 1
2, 2
C
D
0, 1
2,2