la théorie des jeux, 2

M. Cozic

1. Les jeux sous forme normale et l'équilibre de Nash

1.3. L'équilibre de Nash

l'équilibre de Nash

- si l'on revient sur le dilemme du prisonnier, on peut remarquer une propriété des deux stratégies dominantes: chacune est une meilleure réponse à l'autre : aucun joueur n'a intérêt à changer d'action étant donné celle de l'autre
- équilibre de Nash (EqNash): un profil d'action est un EqNash ssi aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégies étant donné celles choisies par les autres

  Définition

  Un profil d'action a^* est un EqNash si pour tout $i \in I$ il n'existe pas d'action a_i tq

$$u_i(a^*) < u_i(a_i, a^*_{-i})$$

les meilleures réponses

- dans un EqNash, chaque joueur joue une meilleure réponse aux actions des autres. Formellement, la notion de meilleure réponse:

$$BR_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : \text{il n'existe pas } a_i' \text{ t.q. } u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(a_i', a_{-i})\}$$

- quand $|I| = 2$ (forme bimatricielle), on peut repérer

  - dans chaque colonne, les meilleures réponses du joueur 1

  - dans chaque ligne, les meilleures réponses du joueur 2

- les EqNash correspondent aux cellules repérées pour les deux joueurs

les meilleures réponses, exemples

- Dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(3, 3)$	$(0, \mathbf{4})$
T	$(\mathbf{4}, 0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$

- Jeu de la poule mouillée

	C	T
C	$(3, 3)$	$(\mathbf{2}, \mathbf{4})$
T	$(\mathbf{4}, \mathbf{2})$	$(0, 0)$

- on peut vérifier qu'un couple (a, b) est un EqNash ainsi: on vérifie que le joueur 1 n'a pas intérêt à changer de cellule *dans la colonne* et que le joueur 2 n'a pas intérêt à changer de cellule *dans la ligne*

- exercice (Osborne, 2003): trouvez les EqNashs de

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(2,2)$	$(1,3)$	$(0,1)$
a_2	$(3,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$
a_3	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$

- Proposition
  a^* est un EqNash ssi pour tout joueur i, $a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*)$

propriétés de l'EqNash

- quelques propriétés de l'EqNash:
  - si G est résoluble par EISSD et si a^* est sa solution, alors a^* est l'unique EqNash de G
  - si G est un équilibre en stratégies faiblement dominantes ou résoluble par EISFD et si a^* est sa solution, alors a^* est *un* EqNash (mais n'est pas nécessairement unique).
  - un EqNash peut contenir des stratégies faiblement dominées !

	b_1	b_2
a_1	$(1, 1)$	$(2, 0)$
a_2	$(0, 2)$	$(2, 2)$

  (a_2, b_2) est un EqNash, mais b_2 est faiblement dominée par b_1.

- un EqNash a^* ne peut pas être faiblement dominé si c'est un EqNash strict i.e. pour tout i, $a_i \neq a_i^*$, $u_i(a_i^*, a_{-i}^*) > u_i(a_i, a_{-i}^*)$.

existence de l'EqNash

- *matching pennies*

	F	P
F	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

$\Rightarrow$ pas d'EqNash

- *prima facie*, l'EqNash ne peut donc être une solution universelle...
- ...mais la situation change radicalement si l'on autorise les stratégies mixtes

les stratégies mixtes

- une stratégie mixte pour le joueur i est une distribution de probabilité sur les stratégies (dites pures) de i.

  Définition

  Soit un jeu G. L'ensemble des stratégies mixtes du joueur i est l'ensemble $\Delta(A_i)$ des distributions de probabilité sur A_i.

  On note de manière générique α_i une stratégie mixte du joueur i et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ un profil de stratégies mixtes.

- comment interpréter une stratégie mixte?

  Dans le contexte que nous privilégions, l'interprétation la plus simple est de voir une stratégie mixte comme un choix délibérément aléatoire.

  - exemples: bluff dans un jeu de carte, contrôle aléatoire par un inspecteur ou surveillant, etc.

les stratégies mixtes

- comment évaluer une stratégie mixte ?
  réponse standard: en utilisant l'espérance d'utilité
  exemple: l'utilité pour le joueur 1 de

$$(1/2, a_1; 1/2, a_2)$$

  quand le joueur 2 choisit b_1 est

$$1/2 \cdot u_1(a_1, b_1) + 1/2 \cdot u_1(a_1, b_1)$$

les stratégies mixtes

- Un profil de stratégies mixtes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ induit une probabilité $\alpha(a)$ pour chaque profil de stratégies pures $a = (a_1, ..., a_I)$:

$$\alpha(a_1, ..., a_I) = \prod_{i \in I} \alpha_i(a_i)$$

  L'hypothèse implicite est donc que les stratégies des différents joueurs sont indépendantes (au sens des probabilités) les unes des autres.

- l'espérance d'utilité pour le joueur i du profil α est

$$U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} \alpha(a) \cdot u_i(a)$$

- attention: les fonctions d'utilité u_i changent désormais d'interprétation, ce sont des utilités vNM. On suppose donc que les joueurs obéissent aux axiomes de vNM.

domination et stratégies mixtes

- quand on étend le concept de domination aux stratégies mixtes...

  Définitions

  La stratégie mixte $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ domine strictement $a'_i \in A_i$ si pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$,

  $$U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$$

  Une stratégie est strictement dominée s'il existe une stratégie mixte qui la domine strictement.

- ...on obtient des différences non-triviales: a_1 est strict. dominée par $(1/2, a_2; 1/2, a_3)$

	b_1	b_2
a_1	1	1
a_2	4	0
a_3	0	3

EqNash et stratégies mixtes

Définitions

L'extension mixte d'un jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est le jeu $(I, (\Delta(A_i)_{i \in I}), (U_i)_{i \in I})$.

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes (EqNash mixte) du jeu $G = (I, (A_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$ est un équilibre de Nash de son extension mixte.

Les EqNash de G (quand ils existent) sont préservés quand on passe à l'extension mixte (heureusement !):

Proposition

Tout EqNash en stratégie pure d'un jeu G est un EqNash mixte (dégénéré) de son extension mixte.

Théorème (Nash, 1951)

Tout jeu fini a un EqNash mixte. (suit du thm du point fixe de Kakutani)

EqNash mixte, exemple

	G	D
G	$(1,-1)$	$(-1,1)$
D	$(-1,1)$	$(1,-1)$

$\alpha = (1/2, 1/2)$ et $\beta = (1/2, 1/2)$ forment un équilibre en stratégies mixtes.

✓ aucune stratégie mixte α' ne fait mieux contre β: quel que soit $\alpha'(G)$,
$U_1(\alpha', \beta)$
$=$
$[1/2 \cdot \alpha'(G) \cdot 1 + 1/2 \cdot \alpha'(G) \cdot -1] + [1/2 \cdot (1 - \alpha'(G)) \cdot -1 + 1/2 \cdot (1 - \alpha'(G)) \cdot 1]$
$= 0$

support des stratégies mixtes et meilleures réponses

- Définition. Soit α_i une stratégie mixte du joueur i. La stratégie *pure* $a_i \in A_i$ est dans le support de α_i si $\alpha_i(a_i) > 0$.
- dans *matching pennies*, les deux stratégies pures du joueur 1 sont dans le support de la stratégie mixte d'EqNash.

  ♢ chacune de ces deux stratégies pures sont des meilleures réponses à la stratégie mixte d'EqNash du joueur 2.

  ♢ c'est tout à fait général: si $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ est une meilleure réponse à α_{-i}, alors toute stratégie pure dans le support de α_i est une meilleure réponse à α_{-i}.
- Proposition

  Soit un jeu fini G. α^* est un EqNash en stratégie mixte de G ssi pour tout joueur i, toute stratégie pure dans α_i^* est une meilleure réponse à α^*_{-i}.

correspondances de meilleure réponse

Matching Pennies
Soit x proba. pour que le joueur 2, anti-coordinateur, joue F; y = proba. pour que le joueur 1, coordinateur, joue F.

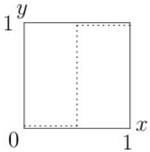

Figure: de Wikipedia

Fig. gauche: meilleures réponses du joueur 1 ; fig. centrale; meilleures réponses du joueur 2 ; fig. droite: EqNash
L'EqNash mixte est repéré par l'intersection des deux courbes de meilleure réponse.

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- si un joueur rationnel croit que l'autre joueur va choisir une action qui appartient à un EqNash, alors il n'aura pas intérêt à choisir autre chose que l'action qui appartient également à l'équilibre

  $\Rightarrow$ on est conduit à l'EqNash si l'on suppose (1) que chaque joueur anticipe correctement l'action des autres, et (2) agit correctement compte tenu de cette anticipation.

- mais pourquoi devrait-il croire cela ? et donc pourquoi des joueurs rationnels devraient jouer un EqNash ?

(arg1) Soit T une théorie décrivant l'issue rationnelle d'une interaction stratégique. T ne doit pas être auto-réfutante au sens suivant: si un joueur connaît T (et notamment ce que dit T à propos du jeu G qui l'intéresse), alors ce joueur ne doit pas avoir intérêt à *dévier* par rapport à T. Supposons que T isole un unique profil d'actions a dans G. Alors aucun joueur ne doit avoir intérêt à dévier (unilatéralement) par rapport à a. a est donc un EqNash.

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- "Les équilibres de Nash sont des prédictions "cohérentes" sur la façon dont le jeu sera joué, au sens où, si tous les joueurs prédisent qu'un certain équilibre de Nash surviendra, alors aucun joueur n'a intérêt à dévier de l'équilibre."(Fudenberg & Tirole 1991)
- "One way to motivate the definition of a Nash equilibrium is to argue that if game theory is to provide a unique solution to a game-theoretic problem then the solution must be a Nash equilibrium, in the following sense. Suppose that game theory makes a unique prediction about the strategy each player will choose. In order for this prediction to be correct, it is necessary that each player be willing to choose the strategy predicted by the theory. Thus, each player's predicted strategy must be that player's best response to the predicted strategies of the other players. Such a prediction could be called *strategically stable* or *self-enforcing*, because no single player wants to deviate from his or her predicted strategy." (Gibbons 1992, p.8)

pourquoi jouer un équilibre de Nash ?

- objection: l'argument suppose que la théorie T isole un unique profil d'actions. Mais on a vu que bien souvent il existait *plusieurs* équilibres de Nash. Dans ce cas, l'argument ne fonctionne plus.

(arg2) argument de l'accord préalable **self-enforcing**.

  - "la" théorie des jeux à laquelle nous nous intéressons est ce qu'on appelle la théorie des jeux non-coopérative. Les joueurs ne peuvent pas établir d'accords *contraignants* (*binding*). Mais ils peuvent se mettre d'accord tout en gardant la liberté de ne pas respecter l'accord au moment de choisir.
  - l'argument est alors le suivant: si les joueurs se mettent d'accord sur un profil a, alors ce profil sera respecté ssi c'est un équilibre de Nash. Puisque l'accord n'est pas contraignant, le respect de l'accord repose sur le fait que les joueurs n'ont pas intérêt à en dévier.

la guerre des sexes

Le joueur 1 et la joueuse 2 doivent coordonner leur sortie : match de boxe ou ballet classique. Ce qu'ils préfèrent avant tout, c'est de passer la soirée ensemble. Mais le joueur 1 préfère la passer au match de boxe tandis que la joueuse 2 préfère la passer au ballet.

	boxe	ballet
boxe	(2,1)	(0,0)
ballet	(0,0)	(1,2)

multiplicité de l'EqNash

- dans la Guerre des Sexes,

	boxe	ballet
boxe	(2,1)	(0,0)
ballet	(0,0)	(1,2)

  on a deux EqNash purs. Et il est clair que les joueurs ne voient pas les deux équilibres de la même façon !
- problème: si chaque joueur joue l'action de l'EqNash qu'il préfère, alors on n'obtient pas d'EqNash (boxe, ballet). Les EqNash ne sont pas (nécessairement) interchangeables.
- quand ils ne le sont pas (comme dans la Guerre des Sexes), il y a besoin de coordination

correspondances de meilleure réponse

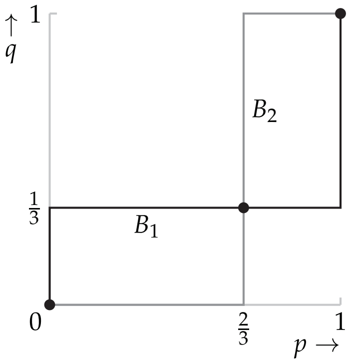

Figure: de Osborne (2003)

p (resp. q) = proba. assignée par 1 (resp. 2) à (*boxe*). 3 EqNashs: les deux purs et celui où 1 joue *boxe* avec proba. 2/3 et 2 le joue avec proba. 1/3.

calcul des correspondances de meilleure réponse

Soit $\alpha = ((p, 1-p); (q, 1-q))$, i.e. p (resp. q) est la proba assignée par le joueur 1 (resp. 2) à *boxe* dans le profil α. Les probabilités à prendre en compte dans le calcul de l'utilité espérée des joueurs sont données par la matrice suivante:

	boxe	ballet
boxe	$p \cdot q$	$p \cdot (1-q)$
ballet	$(1-p) \cdot q$	$(1-p) \cdot (1-q)$

Considérons le joueur 1 (le joueur 2 se traite symétriquement). Son utilité (espérée) s'obtient en combinant les matrices d'utilité et de probabilité soit

$$U_1(\alpha) = 2 \cdot (p \cdot q) + 0 \cdot (p \cdot (1-q)) + 0 \cdot ((1-p) \cdot q) + 1 \cdot (1-p) \cdot (1-q))$$
$$U_1(\alpha) = 2pq + 1 - p - q + 2pq = p(3q-1) - q + 1$$

Rappelons que l'on s'intéresse à la manière dont le joueur 1 doit fixer p, compte tenu de la valeur de q, pour optimiser U_1. Tout dépend du signe de $(3q-1)$:
✓ si $q > 1/3$, p doit être maximal donc $p = 1$
✓ si $q < 1/3$, p doit être minimal donc $p = 0$
✓ si $q = 1/3$, toutes les valeurs de p produisent la même espérance d'utilité.
On raisonne de la même façon pour le joueur 2 et on obtient trois intersections: (0, 0), (2/3, 1/3) et (1, 1).

le problème de la sélection

- le problème de la sélection consiste à savoir comment restreindre l'ensemble des EqNashs. Le problème est aigü quand les EqNashs ne sont pas interchangeables.
- idée naturelle: quand il y a des EqNashs qui en Pareto-dominent d'autres, on écarte ceux qui sont Pareto-dominés.
  - exemple: Hi-Lo, jeu de coordination avec deux EqNashs, l'un Pareto-dominant l'autre:

	b_1	b_2
a_1	(2,2)	(0,0)
a_2	(0,0)	(1,1)

la Chasse au Cerf

- Rousseau, *Discours sur l'origine de l'inégalité*

  "S'agissait-il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela fidèlement garder son poste; mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivît sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie il se souciât for peu de faire manquer la leur à ses compagnons."

	cerf	lièvre
cerf	$(4,4)$	$(0,2)$
lièvre	$(2,0)$	$(2,2)$

$(cerf, cerf)$ Pareto-domine (*lièvre, lièvre*) mais (*lièvre, lièvre*) peut apparaître plus prudent.

difficultés de l'équilibre de Nash

- D. Kreps (1991/1999),

  "Lorsqu'on applique le critère de dominance simple, on fait l'hypothèse implicite que les individus ne choisissent pas des stratégies dominées; quand on élimine celles-ci par itération, on fait l'hypothèse implicite que chaque joueur agit en supposant que les autres ne choisissent pas leurs stratégies dominées, et ainsi de suite. Pour autant que ces hypothèses soient correctes, le critère consistant à éliminer les stratégies dominées - y compris par itération - fournit un moyen très clair et direct de faire des prédictions.

difficultés de l'équilibre de Nash

- D. Kreps (1991/1999)

  "Avec l'équilibre de Nash, la "logique" est beaucoup moins claire. Il est vrai que dans certains cas, chaque participant voit de façon assez évidente quel doit être son choix et celui des autres. Dans de tels cas, les choix "évidents" qui s'imposent ainsi à tous constituent nécessairement un équilibre de Nash...A moins qu'un jeu ait une façon de jouer qui semble évidente, il n'y a pas de raison d'accorder une place particulière à la notion d'équilibre de Nash.
  ...les grandes difficultés que rencontre la théorie des jeux proviennent de ce que l'on ne voit pas clairement (pour ne pas dire plus) quand et pourquoi l'analyse par équilibre est pertinente, si elle l'est."

1.4. appendices

l'EISSD et l'équilibre en EISSD

Définition

Soit un jeu $G = \langle I, \{A_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I} \rangle$. L'ensemble des stratégies du joueur i qui survivent à l'EISSD est l'ensemble A_i^∞ défini ainsi:

- $A_i^0 = A_i$ et D_i^0 est l'ensemble des stratégies str. dominées de i dans $G^0 = G$.
- $A_i^{n+1} = A_i^n - D_i^n$ et D_i^{n+1} est l'ensemble des stratégies stri. dominées de i dans le jeu G^{n+1} qui est la restriction de G aux stratégies A_j^{n+1} pour tout $j \in I$.

$A_i^\infty = \bigcap_{n \in N} A_i^n$

Un équilibre par EISSD est un profil de stratégies $a \in A$ tel que pour chaque joueur $i \in I$, $a_i \in A_i^\infty$.

références

- Giraud, G. (2000) *La théorie des jeux*, Flammarion
- Osborne, M. (2003), *An Introduction to Game Theory*, OUP
- Osborne, M. & Rubinstein, A. (1994) *À Course in Game Theory*, MIT Press
- Fudenberg & Tirole (1991), *Game Theory*, MIT Press