Cogmaster CO8

TD n° 3 - jean.baccelli@ens.fr

25 février 2014

Exercice 1 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète,* $\succ$ *son sous-ensemble asymétrique,* $\sim$ *son sous-ensemble symétrique. Soit* $u : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité qui représente* $\succcurlyeq$ *de l'une des trois manières suivantes :*
i) $\forall x, y \in X : x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ *;*
ii) $\forall x, y \in X : x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$ *;*
ii) $\forall x, y \in X : x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$*.*
Montrez que (i) $\Leftrightarrow$ *(ii), que (i)* $\Rightarrow$ *(iii), mais que (iii)* $\not\Rightarrow$ *(i) - pour prouver ce dernier point, prenez* $X = \{w, x, y, z\}$ *et une relation de préférence* $\succcurlyeq$ *définie de la manière suivante :* $w \sim x$, $y \sim z$, $w \succ y$, $w \succ z$, $x \succ y$, $x \succ z$.

Définition 1 croissance stricte : *une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante si* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Exercice 2 *Soit* X *un ensemble. Soit* $u_1 : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité, qui représente une relation de préférence* $\succcurlyeq_1 \subseteq X \times X$ *au sens i) de l'exercice 1. Soit* $u_2 : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité, qui représente une relation de préférence* $\succcurlyeq_2 \subseteq X \times X$ *au sens i) de l'exercice 1. Prouvez que s'il n'existe pas une fonction strictement croissante* φ *telle que* $u_2 = \varphi \circ u_1$*, alors* $\succcurlyeq_2 \neq \succcurlyeq_1$.

Définition 2 anti-symétrie : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est anti-symétrique si* $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

Définition 3 ordre total : *on appelle ordre total une relation binaire qui est complète, transitive et anti-symétrique.*

Exercice 3 *Soit* X *un ensemble d'options. Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète et transitive,* $\succ$ *son sous-ensemble asymétrique,* $\sim$ *son sous-ensemble symétrique.* $\forall x \in X$*, soit* $I(x) = \{z \in X \mid x \sim z\}$*, l'ensemble d'indifférence de l'option* x *selon* $\succcurlyeq$*. Soit* $\mathbb{I} = \{I(x)\}$, $x \in X$*, l'ensemble des ensembles d'indifférence dans* X *selon* $\succcurlyeq$*. Prouvez que* $\mathbb{I}$ *forme une partition de* X *i.e. essentiellement que i)* $\forall x \in X$, $I(x) \neq \varnothing$ *et que ii)* $\forall x, y \in X$*, ou bien* $I(x) = I(y)$ *ou bien* $I(x) \cap I(y) = \varnothing$*. Puis, soit la relation de préférence annexe* $\succcurlyeq' \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ *définie de la manière suivante :* $\forall a, b \in \mathbb{I}$, $a \succcurlyeq' b \Leftrightarrow \exists x \in a, y \in b$ *tels que* $x \succcurlyeq y$*. Démontrez que* $\succcurlyeq'$ *est un ordre total.*

Exercice 4 *Soit X un ensemble fini d'options et $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ un ordre total. $\forall x \in X$, soit $M(x) = \{z \in X \mid x \succ z\}$. Prouvez que $x \succ y \Leftrightarrow M(y) \subset M(x)$. Vérifiez que par conséquent, la fonction $u : X \to \mathbb{R}$, $\forall x \in X$ $u(x) = \#M(x)$, est une fonction d'utilité qui représente $\succcurlyeq$ aux sens i) et ii) de l'exercice 1.*