Cogmaster CO8

TD n° 4 - jean.baccelli@ens.fr

4 mars 2014

Soit $X = \{x, ..., z\}$ un ensemble. Soit $\Delta(X) = \{p : X \to [0,1] \mid \sum_{x \in X} p(x) = 1\}$. $\Delta(X)$ sera appelé l'ensemble des options pour un décideur dans le risque. Chaque option $p \in \Delta(X)$ peut être décrite comme un vecteur de probabilité $(p_1, x_1 \,; ... ;\, p_n, x_n) \in [0,1]^n \times X$, avec $\forall i \in \{1, ..., n\}, p_i \geq 0$ et $\sum_{i \in \{1,...,n\}} p_i = 1$. Un décideur se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque si ses préférences $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ permettent de définir une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ telle que $\forall p, q \in \Delta(X)$, avec $p = (p_1, x_1 \,; ... ;\, p_n, x_n)$, $q = (q_1, y_1 \,; ... ;\, q_n, y_n)$:

$$p \succcurlyeq q \quad \Leftrightarrow \sum_{i \in \{1,...,n\}} p_i u(x_i) \;\; \geq \sum_{i \in \{1,...,n\}} q_i u(y_i). \tag{1}$$

Exercice 1 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$ *et un décideur dont on sait qu'il se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque, avec* $u(0) = 0$ *et* $u(100) = 100$. *Supposant que pour ce décideur* $(1, 60) \sim (\frac{7}{10}, 100 \,;\, \frac{3}{10}, 0)$, *déterminez* $u(60)$. *Quelle serait alors sa préférence entre* $(\frac{7}{10}, 60 \,;\, \frac{3}{10}, 0)$ *et* $(\frac{49}{100}, 100 \,;\, \frac{51}{100}, 0)$ *?*

Exercice 2 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$, *et un décideur qui a les préférences :* $(\frac{90}{100}, 50 \,;\, \frac{10}{100}, 0) \succ (\frac{45}{100}, 100 \,;\, \frac{55}{100}, 0)$ *et* $(\frac{1}{100}, 100 \,;\, \frac{99}{100}, 0) \succ (\frac{2}{100}, 50 \,;\, \frac{98}{100}, 0)$. *Montrez algébriquement que ce décideur ne peut pas se conformer au modèle de l'utilité espérée dans le risque.*

Exercice 3 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$. *Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *:* $p = (\frac{9}{10}, 49\ ; \frac{1}{10}, 16)$, $q = (\frac{7}{10}, 81\ ; \frac{3}{10}, 16)$, $r = (\frac{9}{10}, 100\ ; \frac{1}{10}, 0)$ *et* $s = (\frac{1}{10}, 100\ ; \frac{9}{10}, 81)$. *Déterminez la préférence entre* p *et* q *d'une part, entre* r *et* s *d'autre part, pour un décideur qui se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque avec* $\forall x \in X$, *a/* $u(x) = x$, *b/* $u(x) = \frac{1}{2}x - 7$, *c/* $u(x) = \sqrt{x}$. *Commentez. Revenant à (1), précisez quelle moitié du théorème d'unicité attaché au théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern vous pouvez prouver algébriquement immédiatement, et quelle moitié resterait à prouver.*

Exercice 4 *Soit* $X = \{x, y, z\}$. *Dans ce cas, chaque* $p \in \Delta(X)$ *a la forme* $p = (p_x, x\ ; p_y, y\ ; p_z, z)$. *Montrez que* $\forall p \in \Delta(X)$, *vous pouvez exprimer* p_y *en fonction de* p_x *et* p_z *ie que chaque* p *est caractérisé par un couple* (p_x, p_z). *On peut alors représenter chaque* $p \in \Delta(X)$ *comme un point dans un "triangle de Marschak - Machina" : par exemple, on prendra un triangle rectangle isocèle avec* y *à l'angle droit,* x *au sommet nord,* z *au sommet est. Soit un décideur qui se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque, dont on supposera aussi que* $\delta_x \succ \delta_y \succ \delta_z$ *[rappel :* $\delta_x \equiv (1, x\ ; 0, y\ ; 0, z)$*]. Montrez qu'alors, un ensemble d'indifférence du décideur apparaît comme une droite dans le triangle de Marschak - Machina, et que les différents ensemble d'indifférence du décideur apparaissent comme des droites parallèles. Pour cela, déterminez l'égalité caractéristique, dans le modèle de l'utilité espérée, d'un ensemble d'indifférence et tirez-en une expression, pour chaque ensemble d'indifférence* $I(p) = \{q \in \Delta(X) \mid p \sim q\}$, *de* q_x *en fonction de* q_z.