# Cogmaster CO8

TD n° 5 & 6 - jean.baccelli@ens.fr

18 mars 2014

Étant donné $X$ un ensemble de résultats, soit $\Delta(X)$ l'ensemble des options d'un décideur dans le risque. Étant donné $p, q \in \Delta(X)$, on notera ici $p\alpha q$ l'élément $r \in \Delta(X)$ tel que $r = \alpha p \oplus (1-\alpha)q$. Soit $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$. On rappellera ici les axiomes du théorème de von Neumann - Morgenstern :

**VNM 1** $\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X})$ *:* $p \succcurlyeq q$ *ou* $q \succcurlyeq p$ *;*
$\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$ *:* $p \succcurlyeq q$ *et* $q \succcurlyeq r \Rightarrow p \succcurlyeq r$.

**VNM 2** $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$ *tels que* $p \succ q$ *et* $q \succ r$ *:* $\exists \alpha, \beta \in \, ]0,1[$ *tels que* $p\alpha r \succ q$ *et* $q \succ r\beta p$.

**VNM 3** $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in \, ]0,1[$ *:* $p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$.

**Exercice 1** *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3, alors elles respectent aussi les deux propriétés suivantes :*
*i)* $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha, \beta \in \, ]0,1[$ *:* $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\beta r \succcurlyeq q\beta r$ *;*
*ii)* $\forall p, q, r, s \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in \, ]0,1[$ *:* $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\alpha s \succcurlyeq q\alpha s$.
*Soit* $X = \{0, ..., 100\}$. *Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *tels que* $p = (\frac{90}{100}, 50\,;\frac{10}{100}, 0)$, $q = (\frac{45}{100}, 100\,;\frac{55}{100}, 0)$, $r = (\frac{2}{100}, 50\,;\frac{98}{100}, 0)$, $s = (\frac{1}{100}, 100\,;\frac{99}{100}, 0)$ *; montrez que les préférences* $p \succ q$, $s \succ r$ *sont incompatibles avec l'équivalence i). Soit* $p', q', r', s' \in \Delta(X)$ *tels que* $p' = (\frac{50}{100}, 20; \frac{50}{100}, 0)$, $q' = (\frac{10}{100}, 100; \frac{39}{100}, 20; \frac{51}{100}, 0)$, $r' = (\frac{11}{100}, 20\,;\frac{89}{100}, 0)$, $s' = (\frac{10}{100}, 100\,;\frac{90}{100}, 0)$ *; montrez que les préférences* $p' \succ q'$, $s' \succ r'$ *sont incompatibles avec l'équivalence ii).*

i) $\forall p,q,r \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in \,]0,1[\, : p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$, et $p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\beta r \succcurlyeq q\beta r$, donc, $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\beta r \succcurlyeq q\beta r$.

ii) $\forall p,q,r \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in \,]0,1[\, : p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$, et $p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\alpha s \succcurlyeq q\alpha s$, donc, $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\alpha s \succcurlyeq q\alpha s$.

Pour le cas 1, identifiant $a = (1, 50)$, $b = (\frac{1}{2}, 100\ ; \frac{1}{2}, 0)$, $c = (1, 0)$, $\alpha = \frac{90}{100}$, $\beta = \frac{2}{100}$, on vérifie avec $p \succ q$, $s \succ r$ que $a\alpha c \succ b\alpha c$ mais que $a\beta c \prec b\beta c$. Une fois les parties communes identifiées, il suffit pour déterminer les poids originaux de poser $\frac{45}{100} = \alpha^* \times \frac{90}{100}$ ie $\alpha^* = \frac{1}{2}$, et ainsi de suite.

Pour le cas 2, identifiant $a = (1, 20)$, $b = (\frac{10}{11}, 100\ ; \frac{1}{11}, 0)$, $c = (\frac{39}{89}, 20\ ; \frac{50}{89}, 0)$, $d = (1, 0)$, $\alpha = \frac{11}{100}$, on vérifie avec $p' \succ q'$, $s' \succ r'$ que $a\alpha c \succ b\alpha c$ mais que $a\alpha d \prec b\alpha d$. Pour déterminer les poids originaux, à nouveau il suffit de poser $\frac{39}{100} = \alpha^* \times \frac{89}{100}$ ie $\alpha^* = \frac{39}{89}$, et $\frac{10}{100} = \beta^* \times \frac{11}{100}$ ie $\beta^* = \frac{10}{11}$.

**Exercice 2** *Soit $X = \{0, ..., 100\}$. Soit $p, q, r, s \in \Delta(X)$ les loteries $p = (1, 75)$, $q = (\frac{80}{100}, 100\ ; \frac{20}{100}, 0)$, $r = (\frac{25}{100}, 75\ ; \frac{75}{100}, 0)$, $s = (\frac{20}{100}, 100\ ; \frac{80}{100}, 0)$. Démontrez que les préférences $p \succ q$, $r \prec s$ ne respectent pas l'axiome VNM 3. Puis, soit $p', q', r', s' \in \Delta(X)$ les loteries $p' = (1, 95)$, $q' = (\frac{33}{100}, 100; \frac{66}{100}, 95; \frac{1}{100}, 0)$, $r' = (\frac{34}{100}, 95\ ; \frac{66}{100}, 0)$, $s' = (\frac{33}{100}, 100\ ; \frac{67}{100}, 0)$. Démontrez que les préférences $p' \succ q'$, $s' \succ r'$ ne respectent pas l'axiome VNM 3.*

On observe que $r = p\alpha t$ et que $s = q\alpha t$ avec $t = (1, 0)$ et $\alpha\frac{8}{10} = \frac{2}{10}$, $\alpha = \frac{1}{4}$. Dans le second cas, on observe la partie commune $t = (1, 95)$ avec poids $\frac{66}{100}$ dans la première paire, la partie commune $t' = (1, 0)$ avec poids également $\frac{66}{100}$ dans la seconde paire. Cela suggère qu'on mixe avec le poids $\alpha = 1 - \frac{66}{100} = \frac{44}{100}$ deux loteries $a, b$ avec successivement $t, t'$. Évidemment, la loterie $b = (1, 95)$. Pour trouver les poids de la loterie $a$, on pose $\frac{34}{100}\gamma = \frac{33}{100}$, $\gamma = \frac{33}{34}$ (on arriverait bien entendu à la même loterie en posant $\frac{34}{100}\gamma' = \frac{1}{100}$).

**Exercice 3** *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3* *(et VNM 1), alors elles respectent aussi les deux propriétés suivantes :*

*i)* $\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in ]0,1[$ *:* $p \succcurlyeq q \Rightarrow p \succcurlyeq p\alpha q \succcurlyeq q$ *;*

*ii)* $\forall p, q, r, s \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in ]0,1[$ *:* $p \succcurlyeq q, r \succcurlyeq s \Rightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha s$.

Pour ce qui suit, $\forall \alpha \in [0,1]$, notons $\overline{\alpha} = 1 - \alpha$.

i) Si $p \succcurlyeq q$, alors par VNM 3 en particulier $p\overline{\alpha}p \succcurlyeq q\overline{\alpha}p$ ; par le même raisonnement, si $p \succcurlyeq q$, alors par VNM 3 $p\alpha q \succcurlyeq q\alpha q$, donc, si $p \succcurlyeq q$, alors par VNM 3 en particulier $p \succcurlyeq p\alpha q$ et $p\alpha q \succcurlyeq q$ donc $p \succcurlyeq q \Rightarrow p \succcurlyeq p\alpha q \succcurlyeq q$.

i) Si $p \succcurlyeq q$, alors par VNM 3 en particulier $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$ ; par le même raisonnement, si $r \succcurlyeq s$, alors par VNM 3 en particulier $r\overline{\alpha}q \succcurlyeq s\overline{\alpha}q$, donc, si $p \succcurlyeq q$, alors par VNM 3 $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$ et $q\alpha r \succcurlyeq q\alpha s$, transitivité, $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha s$.

**Exercice 4** *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3 (et VNM 1), alors elles respectent aussi la propriété suivante :*

$$\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X}) \text{ tels que } p \succ q,\ \forall \alpha, \beta \in [0,1] : \alpha > \beta \Leftrightarrow p\alpha q \succ p\beta q.$$

*Pour le sens* $\Rightarrow$*, considérez successivement les quatre cas possibles, à savoir : 1.1* $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *; 1.2,* $\alpha = 1$, $\beta > 0$ *; 2.1,* $\alpha < 1$, $\beta = 0$ *; 2.2* $\alpha < 1$, $\beta > 0$. *Pour le sens* $\Leftarrow$*, raisonnez par l'absurde en utilisant le sens* $\Rightarrow$ *déjà prouvé.*

Ce sont les seuls cas possibles, car si $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$, alors $\beta < 1$ et $\alpha > 0$, donc les seules cas du tableau à considérer sont $\alpha = 1$ ou pas, $\beta = 0$ ou pas.

<u>Sens $\Rightarrow$.</u>

Cas 1.1 alors $p\alpha q = p$ et $p\beta q = q$, donc la conclusion suit par hypothèse.

Cas 1.2, alors on a toujours $p\alpha q = p$ ; puisque $p \succ q$, alors par VNM 3 $p\overline{\beta}p \succ q\overline{\beta}p$ i.e. $p \succ p\beta q$, donc toujours $p\alpha q \succ p\beta q$ (NB : si $p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$ alors $p \succ q \Leftrightarrow p\alpha r \succ q\alpha r$ : $\neg p \succcurlyeq q$, supposons $q\alpha r \succcurlyeq p\alpha r$, alors par VNM 3 $q \succcurlyeq p$, une contradiction - VNM 3 : $[p \succcurlyeq q \wedge \neg p \succcurlyeq q] \Leftrightarrow [p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \wedge \neg q\alpha r \succcurlyeq p\alpha r]$).

Cas 2.1. Pour cet $\alpha < 1$, on a par VNM 3 $p\alpha q \succ q\alpha q = q$ ; si $\beta = 0$, alors $p\beta q = q$ aussi, donc le résultat est établi.

Cas 2.2, Pour cet $\alpha < 1$, on a par VNM 3 $p\alpha q \succ q\alpha q = q$. L'idée pour arriver à la préférence recherchée est d'appliquer à nouveau VNM 3 pour arriver à quelque chose de la forme $[p\alpha q]\gamma[p\alpha q] \succ q\gamma[p\alpha q]$, en cherchant le $\gamma \in ]0,1[$ tel que $q\gamma[p\alpha q] = p\beta q$ ; il faut donc que, se concentrant sur le poids de $p$, que $\alpha(1-\gamma) = \beta$, donc que $\gamma = (1 - \frac{\beta}{\alpha})$.

Sens $\Leftarrow$.

Supposons $p\alpha q \succ p\beta q$ et $p \succ q$. $\beta = \alpha$ n'est pas possible, autrement il y aurait une violation de l'irréflexivité de la préférence stricte, car alors $p\alpha q = p\beta q$. Si $\beta > \alpha$, alors par le sens $\Rightarrow$, $p\beta q \succ p\alpha q$, violation de l'asymétrie.

**Exercice 5** *Soit $\Delta(X)$ un ensemble d'options et $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ une relation de préférence. Supposons qu'il existe une option $\succcurlyeq$-maximale, notée $p^*$, et une option $\succcurlyeq$-minimale, notée $p_*$. Supposons encore que $p^* \succ p_*$, ce qui constitue une hypothèse de non-trivialité. Supposons enfin que $\forall p \in \Delta(X)$, il existe $\alpha_p \in [0,1]$ tel que $p \sim p^*\alpha_p p_*$. Vous aidant de l'exercice précédent, prouvez que si $\succcurlyeq$ respecte VNM 3 (et VNM 1), alors ce nombre $\alpha_p$ est unique.*

Supposons qu'il y ait deux nombres $\alpha_p^1$ et $\alpha_p^2$ qui convienne. Supposons que $\alpha_p^1 > \alpha_p^2$, par exemple. Alors par VNM 3, via la proposition de l'exercice précédent, $p^*\alpha_p^1 p_* \succ p^*\alpha_p^2 p_*$. Or, par hypothèse, $p \sim p^*\alpha_p^1 p_*$ et $p \sim p^*\alpha_p^2 p_*$, donc par VNM 1, $p \succ p$, une contradiction. De même si $\alpha_p^2 > \alpha_p^1$. Donc s'il existe un $\alpha_p$ convenable, alors il est unique.

**Exercice 6** *Soit $\Delta(X)$ un ensemble d'options et $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ une relation de préférence qui respecte VNM 1 - VNM 3. Supposons à nouveau qu'il existe une option maximale $p^*$, une option minimale $p_*$ et que $p^* \succ p_*$. VNM 1 - VNM 3 impliquent notamment le lemme suivant : $\forall p \in \Delta(X)$, $\exists! \alpha_p \in [0,1]$ tel que $p \sim p^*\alpha_p p_*$. Par ailleurs, le théorème de représentation* *de von Neumann - Morgenstern établit qu'une relation de préférence respecte VNM 1 - VNM 3 si et seulement s'il existe une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ qui la représente selon le modèle de l'utilité espérée, et l'on vérifie que tel est le cas si et seulement si il existe une fonction d'utilité $v : \Delta(X) \to \mathbb{R}$ qui représente la relation de préférence en respectant la propriété suivante : $\forall p, q \in \Delta(X)$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $v(\alpha p \oplus (1-\alpha)q) = \alpha v(p) + (1-\alpha)v(q)$. Utilisant cette propriété et ce lemme, prouvez la moitié encore à prouver du théorème d'unicité lié au théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern.*

$$p \sim \alpha_p p^* \oplus (1-\alpha_p)p_* \Leftrightarrow v(p) = v(\alpha_p p^* \oplus (1-\alpha_p)p_*) = \alpha_p v(p^*) + (1-\alpha_p)v(p_*)$$

De cela on déduit facilement que $\alpha_p = \frac{v(p)-v(p_*)}{v(p^*)-v(p_*)}$. Prenant maintenant la représentation du lemme par $v'$, on a :

$$p \sim \alpha_p p^* \oplus (1-\alpha_p)p_* \Leftrightarrow v'(p) = v'(\alpha_p p^* \oplus (1-\alpha_p)p_*) = \alpha_v u'(p^*) + (1-\alpha_p)v'(p_*)$$

On peut utiliser l'expression de $\alpha_p$ : $v'(p) = \frac{v(p)-v(p_*)}{v(p^*)-v(p_*)} v'(p^*) + (1 - \frac{v(p)-v(p_*)}{v(p^*)-v(p_*)})v'(p_*)$. Développant, on obtient :

$$v'(p) = \left[\frac{v(p)-v(p_*)}{v(p^*)-v(p_*)}\right](v'(p^*)-v'(p_*)) + v'(p_*) = [v(p)-v(p_*)]\left[\frac{v'(p^*)-v'(p_*)}{v(p^*)-v(p_*)}\right] + v'(p_*)$$

$$v'(p) = v(p)\left[\frac{v'(p^*)-v'(p_*)}{v(p^*)-v(p_*)}\right] + \left[(v'(p_*) - v(p_*)\frac{v'(p^*)-v'(p_*)}{v(p^*)-v(p_*)}\right]$$

On a trouvé la forme recherché, avec un $a > 0$, par hypothèse, et un $b$ que l'on ne peut pas signer en général. Cela vaut $\forall p \in \Delta(X)$, donc en appliquant ce $v$ aux loteries dégénérées, on obtient la conclusion recherchée à propos de $u : X \to \mathbb{R}$.