Cogmaster CO8

TD n° 7 - jean.baccelli@ens.fr

1er avril 2014

Soit $X = [m, M] \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. X est un ensemble convexe, c'est-à-dire : $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in X$. Cette définition se généralise : $\forall(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i = 1$, $\forall x_1, ..., x_n \in X$, $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i x_i \in X$. L'ensemble des options sera toujours défini comme $\Delta(X)$. Pour chaque loterie p, on notera $EG(p)$ son espérance : $EG(p) = \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} p_i x_i$.

Définition 1 attitudes par rapport au risque : *les préférences d'un décideur manifestent de "l'aversion pour le risque" (respectivement : du "goût pour le risque", de la "neutralité par rapport au risque") si elles vérifient que* $\forall p \in \Delta(X)$, $EG(p) \succcurlyeq p$ *(respectivement :* $EG(p) \preccurlyeq p$, $EG(p) \sim p$*).*

Définition 2 équivalent certain : *un résultat* $x \in X$ *est un "équivalent certain" d'une loterie* $p \in \Delta(X)$ *pour un décideur s'il est le cas que* $x \sim p$*. Quand il en existera, on notera* $EC(p)$ *un équivalent certain d'une loterie* p*.*

Définition 3 prime de risque : *quand une loterie* $p \in \Delta(X)$ *a un équivalent certain unique pour un décideur, la "prime de risque"* $\Pi(p)$ *que ce décideur attache à cette loterie se définit de la manière suivante :* $\Pi(p) = EG(p) - EC(p)$*.*

Définition 4 croissance : *la préférence d'un décideur dans un ensemble numérique est dite "croissante" si elle vérifie que* $\forall x, y \in X$, $x > y \Rightarrow x \succ y$*.*

Exercice 1 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence transitive, complète et croissante. Prouvez qu'alors, pour chaque loterie* $p \in \Delta(X)$*, s'il existe un équivalent certain* $EC(p) \in X$*, cet équivalent certain est unique. Puis supposez que pour chaque loterie* $p \in \Delta(X)$*, il existe bien un équivalent certain* $EC(p) \in X$*. Prouvez qu'alors, les préférences d'un décideur manifestent de l'aversion pour le risque (respectivement : du goût pour le risque, de la neutralité par rapport au risque) si et seulement si :* $\forall p \in \Delta(X)$, $\Pi(p) \geq 0$ *(respectivement :* $\Pi(p) \leq 0$, $\Pi(p) = 0$*).*

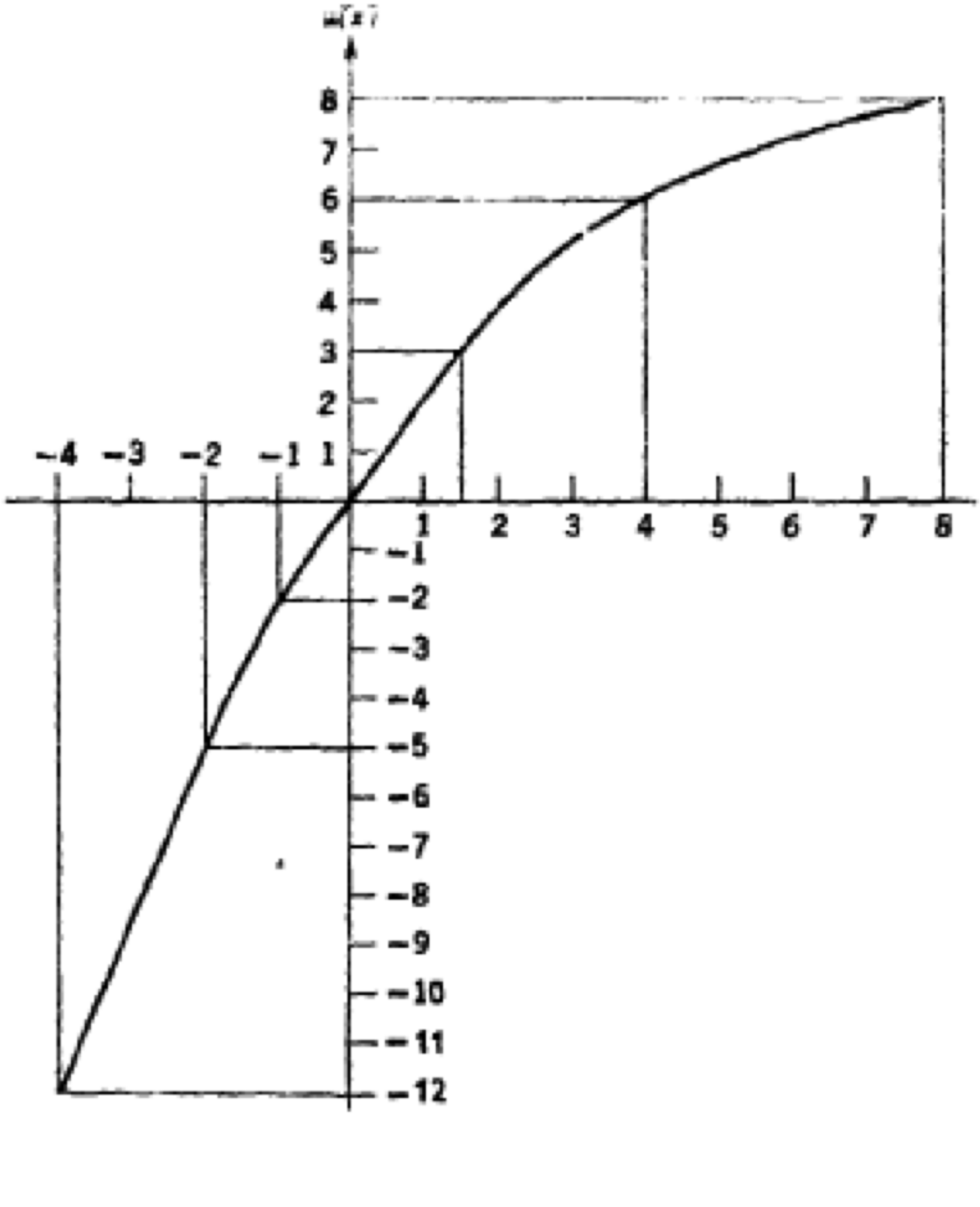
Étant donné X un ensemble convexe, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite concave (respectivement : convexe, linéaire) si elle vérifie que $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0,1] : f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ (respectivement : ... $\leq$ ..., ... = ...). Cette caractérisation se généralise (c'est "l'inégalité de Jensen") : une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite concave (respectivement : convexe, linéaire) si elle vérifie que $\forall (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i = 1$, $\forall x_1, ..., x_n \in X$, $f[\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i x_i] \geq \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i [f(x_i)]$ (respectivement : ... $\leq$ ..., ... = ...). Cette caractérisation justifie le théorème suivant. Dans le modèle de l'utilité espérée, les préférences d'un décideur manifestent de l'aversion pour le risque (respectivement : du goût pour le risque, de la neutralité par rapport au risque) si et seulement si elles sont représentées par une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ qui est concave (respectivement : convexe, linéaire). Quand les préférences d'un décideur se laisseront représenter par une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ suivant le modèle de l'utilité espérée, on notera $EU(p)$ l'espérance d'utilité de chaque loterie p : $EU(p) = \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} p_i u(x_i)$.

Exercice 2 *Soit* $X = [0, 100]$*. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 16; \frac{1}{2}, 4)$*. Soit* j, k, l *trois décideurs dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentées par les fonctions* $u_j(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $u_k(x) = x$, $u_l(x) = x^2$*. Déterminez* $EG(p)$ *puis,* $\forall i \in \{j, k, l\}$, $EU_i(p)$, $EC_i(p)$, $\Pi_i(p)$*.*

Exercice 3 *Soit* $X = [0, 100]$. *Soit* p *et* j, k, l *comme dans l'exercice précédent, et soit* $q = (\frac{1}{4}, 25; \frac{1}{4}, 8; \frac{1}{4}, 7; \frac{1}{4}, 0)$. *Quelles seront les préférences de* j, k, l *entre* p *et* q *? Déterminez* $EG(q)$ *- comparez le résultat à* $EG(p)$ *et discutez.*

Exercice 4 *Interprétons désormais chaque résultat* $x \in X$ *comme un gain qui vient s'ajouter à un niveau de richesse préexistant du décideur* $w \in W$. *Dans ce cas, il faut relativiser à un niveau de richesse* w *tous les concepts précédents : dès lors, on parlera dorénavant de* $EU(w, p)$, $EC(w, p)$, $\Pi(w, p)$. *Soit* $X = [-6, 25]$, $W = [6, 25]$. *Soit la loterie* $p = (\frac{1}{2}, w + 6; \frac{1}{2}, w - 6)$. *Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = 6$, $w_2 = 10$, $w_3 = 19$. *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par la fonction* $u(w + x) = (w + x)^{\frac{1}{2}}$. *Déterminez* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*

Exercice 5 *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par une fonction dont le graphe est donné dans la figure ci-après. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 4; \frac{1}{2}, 0)$. *Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = -4$, $w_2 = 0$, $w_3 = 4$. *Déterminez grâce au graphe* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*


u(x)
8
7
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12