

# Cogmaster CO8

TD n° 9 - jean.bacelli@ens.fr

29 avril 2014

**DÉFINITION 1 DOMINANCE STRICTE** Soit  $G = \langle S_1, \dots, S_n ; u_1, \dots, u_n \rangle$  un jeu sous forme stratégique. Pour le joueur  $i$ , une stratégie  $s_i \in S_i$  est strictement dominée dans le jeu  $G$  par une stratégie  $t_i \in S_i$ , ce que l'on notera  $s_i \prec_i t_i$ , si  $\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})$ . On dit d'un jeu  $G$  qu'il est résoluble par la dominance stricte si (sous connaissance commune du jeu et de la rationalité des joueurs) on peut par élimination itérative des stratégies strictement dominées parvenir à un jeu réduit  $G^\omega$  dans lequel chaque joueur  $i$  est indifférent entre chacune de ses stratégies  $s_i^\omega \in S_i^\omega$  qu'il a dans ce jeu réduit - le cas d'un profil de stratégies  $s^* \in S$  unique étant un cas particulier.

**Exercice 1** Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte. Pour justifier épistémiquement vos réponses, vous a-t-il été nécessaire de faire référence à la connaissance commune du jeu et de la rationalité des joueurs ?

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	2, 1	4, 2
	B	1, 1	0, 3

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	1, 1	1, 0
	B	2, 3	4, 2

**Exercice 2** Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte.

		Joueur 2		
		$X$	$Y$	$Z$
Joueur 1	$A$	7, 0	0, 5	0, 3
	$B$	5, 0	2, 2	5, 0
	$C$	0, 7	0, 5	7, 3

		Joueur 2				
		$V$	$W$	$X$	$Y$	$Z$
Joueur 1	$A$	4, -1	3, 0	-3, 1	-1, 4	-2, 0
	$B$	-1, 1	2, 2	2, 3	-1, 0	2, 5
	$C$	2, 1	-1, -1	0, 4	4, -1	0, 2
	$D$	1, 6	-3, 0	-1, 4	1, 1	-1, 4
	$E$	0, 0	1, 4	-3, 1	-2, 3	-1, -1

**Exercice 3** Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte.

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	1, 1	3, 0	1, 1
	B	0, -2	1, 3	0, 4
	C	-1, 4	4, 5	0, 6

		Joueur 2			
		W	X	Y	Z
Joueur 1	A	2, 0	2, 0	2, 0	2, 0
	B	4, 2	4, 3	3, 0	3, 0
	C	1, 1	5, 2	1, 1	5, 1
	D	1, 1	5, 2	1, 1	5, 1

**Exercice 4** Soit  $G = \langle S_i, S_j ; u_i, u_j \rangle$  le jeu caractérisé de la manière suivante. Les joueurs  $i$  et  $j$  sélectionnent simultanément une date pour se rencontrer, avec  $S_i = S_j = \{1, 2, 3, 4\}$ . Les utilités du jeu sont les suivantes :

$$u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} 2 - (s_i - s_j)^2 & \text{si } s_i < s_j \\ -(s_i - s_j)^2 & \text{si } s_i \geq s_j \end{cases}, \quad u_j(s_i, s_j) = \begin{cases} 2 - (s_i - s_j)^2 & \text{si } s_j < s_i \\ -(s_i - s_j)^2 & \text{si } s_j \geq s_i \end{cases}.$$

Présentez  $G$  sous la forme sous laquelle les jeux précédents ont été présentés. Résolvez  $G$  par la dominance stricte.

**DÉFINITION 2 DOMINANCE FAIBLE** Soit  $G = \langle S_1, \dots, S_n ; u_1, \dots, u_n \rangle$  un jeu sous forme stratégique. Pour le joueur  $i$ , une stratégie  $s_i \in S_i$  est faiblement dominée dans le jeu  $G$  par une stratégie  $t_i \in S_i$ , ce que l'on notera  $s_i \preccurlyeq_i t_i$ , si  $\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i})$  et  $\exists t_{-i} \in S_{-i}$  telle que  $u_i(s_i, t_{-i}) < u_i(t_i, t_{-i})$ .

**DÉFINITION 3 ÉQUILIBRE DE NASH** Soit  $G = \langle S_1, \dots, S_n ; u_1, \dots, u_n \rangle$  un jeu sous forme stratégique. Un profil de stratégies  $s^* \in S$  est un équilibre de Nash (désormais EN) si  $\forall i \in N, \forall t_i \in S_i, u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(t_i, s_{-i}^*)$ .

**Exercice 5** Essayez de résoudre les deux jeux suivants par la dominance stricte. Par ailleurs, s'ils existent, identifiez-en les EN. Sur la base de vos réponses, des exercices précédents et des définitions, précisez si, quand il existe un EN pour un jeu  $G$  : 1/ l'EN peut être constitué de stratégies strictement dominées; 2/ l'EN peut être constitué de stratégies faiblement dominées; 3/ l'EN doit correspondre à la solution de  $G$  par la dominance stricte.

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	2, 1	0, 4	4, 0
	B	0, 1	1, 0	1, 4
	C	1, 1	3, 1	2, 0

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	1, 1	0, 1	0, 0
	B	1, 0	2, 1	1, 2
	C	0, 0	1, 1	2, 0