# le choix certain

## introduction aux sciences de la décision
## séance 2

M. Cozic

# 1. les préférences

# le choix certain et les préférences

- dans les situations dites de choix certain, on suppose que l'agent sait parfaitement quelle seront les conséquences de chacune de ses actions.
  ✓ on peut se passer d'une représentation de ses croyances
  ✓ on peut omettre la distinction entre les actions et leurs conséquences
- les désirs sont approchés en termes de préférences
  • préférences larges : $a \succeq b$
  (lecture possible: Pierre estime que *a* est au moins aussi bonne que *b*)
  • préférences strictes : $a \succ b$
  (Pierre estime que *a* est strictement meilleure que *b*)
  • indifférence $a \sim b$
  (Pierre estime que *a* et *b* ont la même valeur)

# indifférence vs. incomplétude

- Sen (1970)
  "Il est important de distinguer entre l'indifférence et le manque de complétude. Notre langage quotidien est souvent trop relâché pour distinguer entre les deux. Si "je ne sais pas" lequel choisir, cela pourrait signifier que je suis indifférent, mais une interprétation plus naturelle est que je ne peux pas me déterminer. La différence logique entre les deux est assez simple. Considérons les deux énoncés:
  (1) $x$ est au moins aussi bon que $y$
  (2) $y$ est au moins aussi bon que $x$
  Dans le cas de l'"indifférence", les deux sont affirmés, et dans le cas de la "complétude", aucun." (p. 3, ma trad.)

# les hypothèses sur les préférences

- le modèle élémentaire de la théorie de la décision tient en deux ingrédients: (1) deux hypothèses sur les préférences, et (2) une hypothèse sur la relation entre choix et préférence (hypothèse 'CP', voir plus tard).
- deux hypothèses fondamentales sur les préférences (larges):

(T) transitivité: si $x \succeq y$ et $y \succeq z$, alors $x \succeq z$

(C) complétude: pour tous $x, y$ $x \succeq y$ ou $y \succeq x$

- la (TD) ne suppose pas seulement (T) et (C) dans le cas du choix certain: elles constituent le socle de toute la (TD), y compris quand elle s'occupe du choix incertain.

# le choix optimal

- idée: un agent rationnel choisit une action qui est optimale du point de vue de ses préférences.
- supp. que l'agent peut choisir dans l'ensemble $X \subseteq A$. Alors ce qu'il est rationnel de choisir est

$$\text{(CP)} \; c_{rat}(X) = \{x : \neg\exists y \in X, y \succ x\}$$

autrement dit, il est rationnel de choisir une action qui n'est *dominée* par aucune autre.

- on se sert également de

$$\text{(CP')} \; c_{rat'}(X) = \{x : \forall y \in X, x \succeq y\}$$

qui est équivalente à (CP) sous les hypothèses (T) et (C) - mais pas en général.

## quelques propriétés dérivées

- la relation de préférence stricte associée $\succ$ est le résidu asymétrique de $\succeq$ :

$$x \succ y \text{ ssi } x \succeq y \text{ et } \neg(y \succeq x)$$

**Proposition**

Si $\succeq$ satisfait (T) et (C), alors la relation de préférence stricte associée $\succ$ est

(i) irréflexive ($\forall x, \neg(x \succ x)$),
(ii) transitive ($\forall x, y, z$ si $x \succ y$ et $y \succ z$ alors $x \succ z$),
(iii) asymétrique ($\forall x, y$, si $x \succ y$, alors $\neg(y \succ x)$),
(iv) négativement transitive ( $\forall x, y, z, \neg(x \succ y)$ et $\neg(y \succ z)$ $\Rightarrow \neg(x \succ z)$)

NB: on partira indifféremment d'une relation de préférence large satisfaisant (T) et (C) ou d'une relation de préférence stricte asymétrique et négative transitive.

# quelques propriétés dérivées

- la relation d'indifférence associée $\sim$ est le résidu symétrique de $\succeq$ :

$$x \sim y \text{ ssi } x \succeq y \text{ et } y \succeq x$$

**Proposition**

Si $\succeq$ satisfait (T) et (C), alors la relation d'indifférence associée $\sim$ est

(i) réflexive,
(ii) transitive,
(iii) symétrique ($\forall x, y$, si $x \sim y$ alors $y \sim x$)

# l'interprétation des préférences

- que signifie au juste le concept de préférence ? (cf. Sen 1991/2002, Broome 2006, Pettit 2006, Hausman 2012)
- 3 interprétations saillantes pour la (TD)

(pr1) les préférences comme désirs comparatifs: *x* préfère *a* à *b* ssi il désire plus *a* que *b*

(pr2) les préférences comme évaluations comparatives totales: *x* préfère *a* à *b* ssi il juge *a* meilleur que *b*, tous les aspects pertinents étant pris en compte

(pr3) les préférences comme choix binaire (ou disposition à choisir): *x* préfère *a* à *b* ssi *x* choisit (ou est disposé à choisir) *a* entre *a* et *b*

# l'interprétation des préférences

- les préférences font aussi parfois l'objet d'une

  ✓ interprétation hédoniste selon laquelle *a* est préféré à *b* par *x* ssi *a* procure plus de plaisir que *b* à *x*

  ✓ interprétation en termes d'intérêt individuel ou de bien-être selon laquelle *a* est préféré à *b* par *x* ssi *a* favorise plus le bien-être de *x* que *b*

  ...qui n'ont pas la généralité requise pour la (TD)

- (pr1)-(pr2) mettent en avant les deux principales dimensions des préférences envisagées comme des états mentaux: les dimensions 'jugementielle' et motivationnelle

# 1.2 la transitivité

Question: y a-t-il des situations dans lequelles on pourrait s'attendre à ce que les gens violent (T) ?

- l'exemple canonique est celui du choix multi-dimensionnel i.e. où l'agent peut choisir entre des options qui se laissent comparer selon plusieurs aspects ou dimensions
- exemple ♯1 (Tversky, 1969 adapté par Bar-Hillel & Margalit, 1988):

| | dimension I (QI) | dimension II (expérience) |
|---|---|---|
| option $x$ | 115 | 7 |
| option $y$ | 117 | 3 |
| option $z$ | 120 | 0 |

règle de construction des préférences: on préfère $a$ à $b$ si $a$ excède *$b$ de plus de 3 unités* sur la dimension I, ou, sinon, si $a$ excède $b$ sur la dimension II $\Rightarrow x \succ y \succ z \succ x$

- exemple ♯2 (Anand, 1993). Paul est avec un convive et s'apprête à prendre un des deux fruits offerts:

  $X = \{$ petite pomme, orange $\}$
  $X' = \{$ orange, grosse pomme $\}$
  $X'' = \{$ petite pomme, grosse pomme $\}$

  Si Paul ne prenait en compte que ses goûts, il préfèrerait la grosse pomme à l'orange et l'orange à la petite pomme. Mais en présence des deux pommes, la politesse lui fait préférer la petite pomme à la grosse pomme.
  $\Rightarrow$ préférences cycliques

# adéquation ***descriptive*** de (T)

- série de tests expérimentaux de (T), au moins depuis Tversky (1969).
- difficulté: quand on observe un cycle, on peut remettre en question le lien entre préférences et choix (CP) et défendre (T) en postulant variabilité. Par exemple, on peut supposer au lieu de (CP)

  $$x \succeq y \text{ ssi } p(x, y) \geq 1/2 \text{ (CProbP)}$$

  et alors on obtient comme propriété à tester la transitivité stochastique faible

  $$\text{si } p(x, y) \geq 1/2 \text{ et } p(y, x) \geq 1/2 \text{ alors } p(x, z) \geq 1/2 \text{ (TSF)}$$

- on a longtemps considéré que Tversky (et d'autres à sa suite) avaient établi la réfutation de (T), mais plusieurs études récentes le contestent.

# défense ***normative*** ♯1 de (T)

- défense ♯1: il est *évident* que des préférences rationnelles sont transitives

✓ version ♯1 (a): il est évident que les préférences *rationnelles* sont transitives
✓ version ♯1 (b): il est évident que les préférences sont transitives

- ▷ une élaboration possible de la version ♯1 (b) consiste à dire qu'il y a une relation sémantique ou conceptuelle entre les préférences et la transivité.

idée: des préférences qui ne sont pas transitives...ne sont pas vraiment des préférences.

# défense ***normative*** ♯1 de (T)

- Anand (1993) attribue une position de ce genre à Davidson (1993):

  “...la théorie de la décision ressemble à la théorie de la mesure de la masse ou de la longueur, ou à la théorie de la vérité de Tarski. La théorie est dans chaque cas si puissante et si simple, et elle fait tellement partie intégrante des concepts postulés par toute théorie plus complète (qu’il s’agisse de physique ou de linguistique), que nous devons nous efforcer d’accorder nos découvertes, ou nos interprétations, pour préserver la théorie. Si une longueur n’est pas transitive, quel peut bien être le sens d’une mesure de la longueur ? Nous pourrions bien trouver ou inventer une réponse, mais tant que nous n’y parvenons pas nous devons nous efforcer d’interpréter “plus long que” de manière à le rendre transitif. De même “préférer à”.” (pp. 361-62)

# défense ♯1 de (T)

- rem: quelques lignes avant, Davidson nie défendre l'idée que des préférences sont par définition transitives:

  "J'ai l'air de vouloir maintenir que la théorie de la décision, clle le postulat simple que les gens tendent à faire les actions dont ils croient qu'elles serviront leurs objectifs, est nécessairement vraie, ou peut-être analytique, ou qu'elle énonce en partie ce que nous voulons dire quand nous disons que quelqu'un préfère une option à une autre. Mais en fait je ne veux rien dire de tel, parce que je ne comprends pas ce que cela veut dire." (p. 361)

- objection de Anand (ma reconstruction): si l'on conçoit le concept de préférence par analogie avec celui de longueur, alors (T) peut en effet sembler analytique. Mais il ne semble pas aussi déterminé. On pourrait très bien le concevoir par analogie avec celui du match ou de la compétition entre options (*a* est préféré à *b* si *a* gagne le "match" de la comparaison avec *b*), et alors (T) ne s'impose plus.

# les préférences et le bien

- un autre argument, librement inspiré par Hausman (2012, p. 19), en faveur de la version ♯1(a) cette fois:

(h1) les préférences sont des évaluations comparatives qui prennent en compte tout ce qui semble pertinent pour la question de savoir si $x$ est meilleur que $y$

(h2) la relation “être meilleur que” est analytiquement ou conceptuellement transitive

(h3) si des préférences sont rationnelles, alors elles reflètent les propriétés analytiques ou conceptuelles de leur objet

---

(C) des préférences rationnelles sont transitives

# la transitivité de “meilleur que”

- (h2), qui est une thèse sur la valeur ou le bien, et non sur les préférences, est défendue par Broome (1991, 2004):

  - Broome (2004)

    “Prenons un prédicat monadique comme “dangereux” ou “ensoleillé le matin”. Désignons le de manière générale par la lettre schématique ‘*F*’. Nous pouvons souvent former à partir de *F* un prédicat dyadique, ou une relation, que l’on désigne par ‘plus *F* que’. Par exemple, nous formons ‘plus dangereux que’ et ‘plus ensoleillé le matin que’. Appelons cela la ‘relation comparative’ de *F*. En anglais, quand *F* est un adjectif court, ‘plus *F* que’ est généralement synonyme de ‘*F*er than’. De manière irrégulière, ‘plus bon que’ a pour synonyme ‘meilleur que’...”

# la transitivité de “meilleur que”

- Broome (2004)

  “Une relation comparative est nécessairement transitive. C’est une caractéristique analytique de l’opérateur ‘plus...que”: la signification de ‘plus...que’ implique ‘plus *F* que’ est transitif. Les caractéristiques les plus formelles de la signification d’un terme sont souvent appelées la ‘logique’ de ce terme. La logique déontique est la logique de ‘doit’, par exemple. En ce sens, la transitivité est une caractéristique de la logique de ‘plus...que’. (p. 50)

# défense ***normative*** $\sharp 2$

- défense $\sharp 2$: des préférences intransitives ont de mauvaises conséquences pour l'action
- si ce que l'agent choisit ($c(X)$) n'est pas ce qu'il est rationnel de choisir ($c_{rat}(X)$), alors cela signifie qu'il envisage un choix contre-préférentiel: le choix d'une option $x$, alors qu'il existe une autre option $y$ strictement meilleure que $x$.
- supposons que les préférences de Paul vis-à-vis de $a, b, c$ forment un cycle: $a \succ b \succ c \succ a$. Alors tout choix de Paul, quand il est confronté à $X = \{a, b, c\}$ est contre-préférentiel.
- une première version de la défense $\sharp 2$: si un agent a des préférences cycliques, alors il ne peut pas obéir à (CP)

# défense ***normative*** $\sharp$2

- rem: si $X$ est infini, il est parfaitement possible que les préférences de Paul soient transitives, mais que toute sélection d'un élément $x \in X$ soit contre-préférentielle.
- autre version: supposons que $c(X) = b$. Si Paul obéit à (CP) quand il le peut, alors $c(\{a, b\}) = a$. On aboutit donc à une situation étrange *du point de vue du choix*. On viole une propriété de cohérence entre choix que l'on appelle la propriété $\alpha$ et sur laquelle nous reviendrons plus tard.

# défense $\sharp$2: l'argument de la pompe à finance

- principale défense $\sharp$2: l'argument de la pompe à finance
- stratégie générale: montrer que la violation de (T) conduit à des conséquences qui sont incompatibles avec la rationalité

  - plus précisément, incompatibles avec la rationalité *pratique* $\Rightarrow$ on parle parfois de justification pragmatique de (T)
  - l'argument a été proposé par Davidson, McKinsey et Suppes (1956)

# l’argument de la pompe à finance

*a* = un poste très prestigieux à 50 000 euros/an
*b* = un poste assez prestigieux à 55 000 euros/an
*c* = un poste peu prestigieux à 60 000 euros/an
Supposons que Pierre ait des préférences cycliques comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{(i) } a \succ b \\ \text{(ii) } b \succ c \\ \text{(iii) } c \succ a\end{array}}$$

Supp. que Pierre possède *a*. En vertu de (iii), il devrait être prêt à payer $\epsilon$ pour obtenir *c* ; en vertu de (ii), il devrait ensuite être prêt à payer $\epsilon'$ pour obtenir *b* ; et en vertu de (i), il devrait être prêt à payer $\epsilon''$ pour obtenir *a*. A la fin de cet échange, il se retrouve donc avec ce qu’il possédait au début, *a*, mais il a versé $\epsilon + \epsilon' + \epsilon''$.

## l'argument de la pompe à finance: commentaires

- la structure complète de l'argument est la suivante:

$$\text{intransitivité} \Rightarrow \text{vulnérabilité} \Rightarrow \text{irrationalité}$$

- objection $\sharp 1$ : il n'est pas vrai que intransitivité $\Rightarrow$ vulnérabilité
- ▷ Schick (1986)
"*Does a person with cyclical preferences have no grounds for declining offers ? Let him look back and see the arrangements he has already paid for. He may then come to see which way the wind is blowing, that if he accepts the current offer, he will then get another, and then another, and still another, every cycle bringing him back to where he was at the start, only poorer. Seeing what is in store for him, he may well reject the offer and thus stop the pump.*"

# l’argument de la pompe à finance: commentaires

- dans la version proposée par Schick, on corrige “intransitivité $\Rightarrow$ vulnérabilité” par “intransitivité + myopie $\Rightarrow$ vulnérabilité”
- une autre version peut faire valoir que la transitivité est une norme synchronique de rationalité, tandis que la pompe à finance est étendue temporellement. Cela suggère de corriger “intransitivité $\Rightarrow$ vulnérabilité” par “intransitivité + stabilité des préférences $\Rightarrow$ vulnérabilité”
- dans les deux versions, l’intransivité n’est pas une condition suffisante à la vulnérabilité

# la nouvelle pompe à finance

- faiblesse de l'objection de Schick (1986): elle n'élabore pas en détails ce que pourrait être le raisonnement d'un agent perspicace (non-myope)
- Rabinowicz (2000) construit une variante du scénario original, la 'nouvelle pompe à finance', dans laquelle, même s'il est perspicace, un agent dont les préférences sont cycliques est vulnérable.
- idée de base: même quand l'agent décline un échange, l'exploiteur continue de lui en proposer

# la nouvelle pompe à finance

- faiblesse de l'objection de Schick (1986): elle n'élabore pas en détails ce que pourrait être le raisonnement d'un agent perspicace (non-myope)
- Rabinowicz (2000) construit une variante du scénario original, la 'nouvelle pompe à finance', dans laquelle, même s'il est perspicace, un agent dont les préférences sont cycliques est vulnérable.
- idée de base: même quand l'agent décline un échange, l'exploiteur continue de lui en proposer

# l'ancienne pompe à finance

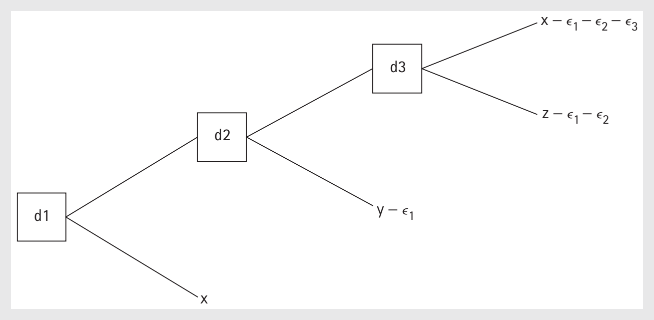


**Fig. 6.1. Sophisticated choice and intransitive preference.**

# la nouvelle pompe à finance

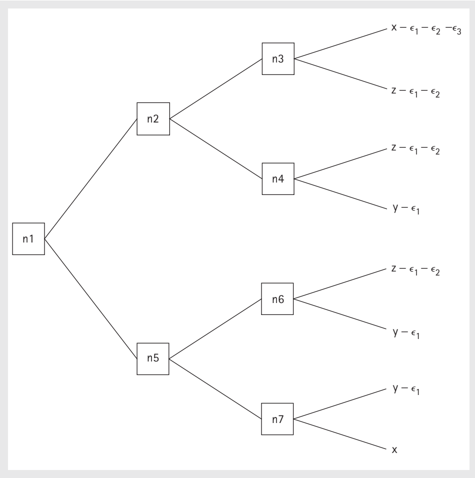


**Fig. 6.2. Rabinowicz's persistent trader.**

# la nouvelle pompe à finance

- Paul préfère

  $y$ à $x$ (et est prêt à échanger pour $\epsilon_1$)

  $z$ à $y$ (et est prêt à échanger pour $\epsilon_2$)

  $x$ à $z$ (et est prêt à échanger pour $\epsilon_3$)

- lecture de l'arbre:

  $(n_5, n_7, x)$ = décline trois fois

  $(n_5, n_7, y - \epsilon_1)$ = décline deux fois puis finalement accepte

  $(n_2, n_4, z - \epsilon_1 - \epsilon_2)$ = accepte, décline puis accepte

  ...

- on suppose qu'un agent perspicace raisonne à rebours (*backwards induction*) i.e. depuis les extrémités de l'arbre jusqu'à la racine

# la nouvelle pompe à finance

- résolution de la situation:

  - le haut de l'arbre se simplifie en $x - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3$

  - le bas de l'arbre se simplifie en $z - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3$

  ...et Paul choisit donc la stratégie $(n_2, n_3, x - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)$, et se trouvera moins bien que s'il avait tout décliné et gardé $x$.

# l'argument de la pompe à finance: commentaires

- objection $\sharp 2$ : il n'est pas vrai que vulnérabilité $\Rightarrow$ irrationalité (Rabinowicz, 2000)
  - idée: il est trop réducteur de restreindre l'évaluation des attitudes d'un agent, même ses préférences, à leurs conséquences sans prendre en compte leurs motivations

# références


- P. Anand (1987), “Are the Preference Axioms Really Rational ?”, *Theory and Decision*, 23:2, p.189
- P. Anand (1993), “The Philosophy of Intransitive Preferences”, *The Economic Journal*, 103:417, pp. 337-46
- Bar-Hillel, M. & Margalit, A. (1988) “How Vicious Are Cycles of Intransitive Choice”, *Theory and Decision*, 24(2), p. 119
- Davidson, D., McKinsey, J.C.C. & Suppes, P. (1955) “Outlines of a Formal Theory of Value”, *Philosophy of Science*, vol. 22 (2), pp. 140-60
- Elster, J. (1983) *Sour Grapes*, chap. 1 ‘Rationality’
- Rabinowicz, W/ (2000) “Money Pump with Foresight”
- F. Schick (1986), “Dutch Bookies and Money Pumps”, *The Journal of Philosophy*, vol.83, pp. 112-9

# 1.3 la complétude

# sur la complétude (C)

- des deux propriétés, (C) est celle dont on pense généralement qu'elle est le moins attachée au concept de rationalité: après tout, pourquoi un agent rationnel devrait-il être capable de comparer toute paire d'options ? Pour beaucoup, il n'y a rien d'irrationel dans le fait de tenir *a* et *b* pour incomparables
  - R. Aumann (1962) "Expected Utility without the Completeness Axiom"
    "Of all the axioms of the utility theory, the completeness axiom is perhaps the most questionable. Like others, it is inaccurate as a description of real life ; but unlike them we find it hard to accept even from a normative point of view."
  - Elster (1983)
    "From the point of view adopted here, there are no strong arguments for this condition. In fact, one could argue that it is irrational to commit oneself to a preference for one of the options if one knows very little about either."

# l'argument de la petite amélioration

- l'argument de la petite amélioration (dont la prémisse centrale remonte à Savage, 1954/1972) cherche à montrer que (C) n'est pas un principe normatif correct
- imaginons une situation où de deux options $x$ et $y$, il n'y en a aucune qui nous semble strictement meilleure que l'autre. En outre, il existe un moyen d'améliorer légèrement l'une d'entre elle, disons, $x$, en $x^+$. S'il est toujours le cas que $x^+$ n'est pas strictement préférée à $y$, alors il semble qu'il n'y a pas indifférence entre $x$ et $y$, mais incomparabilité.
- exemples:
  $x$ = vélo, $x^+$ = vélo avec sonnette, $y$ = poney
  $x$ = 1 000 000 euros, $x^+$ = 1 000 001 euros, $y$ = sauver Pierre, naufragé
  $x$ = devenir professeur de philosophie, $x^+$ = devenir professeur de philosophie avec 100 euros de plus de salaire, $y$ = devenir marin

# l'argument de la petite amélioration

(P1) $\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x)$

(P2) $x^+ \succ x$

(P3) $(x^+ \succ x) \wedge (x \sim y) \rightarrow (x^+ \succ y)$ (PI-transitivité)

(P4) $\neg(x^+ \succ y)$

---

$\neg(x \sim y \wedge x+ \succ x)$

$\neg(x \sim y)$

$\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x) \wedge \neg(x \sim y)$

ce que l'on peut abréger par $xTy$. $xTy$ implique que (C) est fausse.

- pourquoi accepter PI-transitivité ? Considérons une violation:

  $x \succ y$, $y \sim z$, $\neg(x \succ z)$

  Si (C) est le cas, alors

  ou bien $x \sim z$, et alors, si Paul possède $y$, il est prêt à payer $\epsilon_1$ pour avoir $x$ et par indifférence ne s'oppose pas à revenir à $y$ en recevant de petites sommes telles que $\epsilon_2 + \epsilon_3 < \epsilon_1$.

  ou bien $z \succ x$ et alors Paul accepterait d'avoir $x$ plutôt que $y$ en payant $\epsilon_1$, il accepterait ensuite d'avoir $z$ plutôt que $x$ en payant $\epsilon_4$, et on peut supposer qu'il accepterait d'avoir $y$ à la place de $z$ en étant payé un $\epsilon_5 < \epsilon_1 + \epsilon_4$.
- objection (Gustafsson & Espinoza, 2010): l'argument suppose (C)..., mais la PI-transitivité, avec les autres prémisses, implique la négation de (C).

# références


- Chang, R. (2002) “The Possibilité of Parity”, *Ethics*, pp. 659-88
- Gustafsson, J. & Espinoza, N. (2010) “Conflicting Reasons in the Small-Improvement Argument”, The Philosophical Quaterly, 60, pp. 754-63

# 3. l'utilité

# la notion d'utilité

- on présente souvent la théorie élémentaire de la décision en disant qu'elle affirme, non pas qu'un agent choisit ce qu'il préfère, mais qu'il choisit l'action qui maximise son utilité ou (ce qui revient au même) l'action dont l'utilité est la plus élevée
- formellement, l'utilité d'une action (ou d'une conséquence) est un nombre réel, et une fonction d'utilité assigne à toute action (ou toute conséquence) un réel.
- interprétation: en première analyse, l'utilité est une mesure de l'attitude évaluative de l'agent vis-à-vis des actions ou conséquences

# la notion d'utilité

- le terme "utilité" est entendu en différents sens, dans le language ordinaire, en théorie de la décision et en philosophie
- dans le langage ordinaire, l'utilité désigne la propriété de servir à quelque chose; elle peut s'appliquer à un objet, à une personne, à un acte, etc.
  - Ce livre te sera très utile pendant ton voyage.
  - Quelle est l'utilité de m'avoir réveillé si tôt ?
- en théorie de la décision, l'utilité doit se comprendre comme un concept *technique*, qui résulte de plusieurs glissements sémantiques, et qui n'est pas pour autant tout à fait univoque
- le concept technique d'utilité provient de la philosophie utilitariste

# la notion d'utilité

- chez les utilitaristes, l'utilité désigne
  - d'abord les propriétés d'un objet qui ont un effet sur le plaisir et la peine des individus (Bentham). Il s'agit donc d'une propriété instrumentale des objets, comme dans le sens ordinaire (ainsi que le soulignent Mongin & d'Aspremont (1998)), mais on restreint les fins pertinentes (il ne s'agit plus que de produire du plaisir).
  - puis chez les économistes du XIXè (Mill, Jevons), le plaisir ou la peine eux-mêmes qu'un objet provoque chez un individu (sur ce point et sur d'autres, cf. Broome, 1991)
- le concept contemporain d'utilité n'est pas plus hédoniste que celui de préférence: en théorie du choix certain, l'utilité est une représentation numérique des préférences sur les actions

# la représentation des préférences

- Définition
  Une fonction d'utilité $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ **représente** une relation de préférence $\succeq$ sur $X$ ssi pour tout $x, y \in X$,
  $$x \succeq y \text{ ssi } u(x) \geq u(y)$$
- idée: l'ordre naturel sur les nombres associés aux objets correspond à l'ordre décrit par la relation de préférence.

# l'utilité ordinale

- si l'on n'exige seulement d'une fonction d'utilité qu'elle représente des préférences, alors, s'il existe au moins une fonction qui peut le faire, “beaucoup” d'autres fonctions peuvent le faire également
  Proposition
  Si $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ représente la relation de préférence $\succ$, alors pour toute fonction strictement croissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ex: $f(x) = 2 \cdot x$), $v(x) = f(u(x))$ représente $\succ$ également.
- la représentation d'une relation de préférence est unique à une transformation strictement croissante près. Pour cette raison, on dit que le concept d'utilité que nous venons d'introduire est ordinal : il ne fait qu'encoder des différences de position dans la hiérarchie évaluative de l'agent, pas des différences d'*intensité*.

# l'utilité ordinale

- pour une fonction d'utilité ordinale, cela ne fait pas sens de dire que

  - l'utilité de $b$ est deux fois celle de $a$
  - l'utilité de $c$ est juste à mi-chemin entre celle de $a$ et celle de $b$

  si la fonction d'utilité $u_1$ est telle que $u_1(b) = 4$ et $u_1(a) = 2$, il se peut parfaitement que la fonction d'utilité $u_2$ représente aussi bien les préférences et soit telle que $u_2(b) = 4$ et $u_2(a) = 3$.
- on reviendra plus en détail sur les types de mesure lors du cours sur le risque

# théorème de représentation

**Proposition**

Supposons que $X$ soit dénombrable. $\succ$ est une relation de préférence asymétrique et négativement transitive sur $X$ ssi il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ qui représente $\succ$.

*Preuve* (pour $X$ fini).
($\Leftarrow$). Si $u(.)$ représente $\succ$, alors $\succ$ est asymétrique et négativement transitive :
(i) $x \succ y$ ssi $u(x) > u(y)$ ssi $\neg(u(y) \geq u(x))$ donc $\neg(y \succ x)$.
(ii) Si $\neg(x \succ y)$ et $\neg(y \succ z)$ alors $\neg(u(x) > u(y))$ et $\neg(u(y) > u(z))$ ssi $u(x) \leq u(y) \leq u(z)$. Donc $u(x) \leq u(z)$ ssi $\neg(u(x) > u(z))$ donc $\neg(x \succ z)$.

# théorème de représentation

*Preuve* (pour $X$ fini).

($\Rightarrow$). Kreps (1988) donne une preuve par induction sur la taille de $X$. Le départ de la preuve est immédiat ; si $X = \{x\}$, on pose $u(x) = 1/2$. On suppose qu'on a montré que cela vaut pour tout ensemble de cardinalité $n - 1$ et on considère un ensemble $X$ de cardinalité $n$. On choisit un élément $x* \in X$ et on note $X' = X - x*$. La restriction de $\succ$ sur $X'$ est une une relation de préférence rationnelle et par conséquent, par hypothèse d'induction, il existe une fonction $u'$ qui représente $\succ$ sur $X'$.
Cas 1 : il existe $x' \in X'$ t.q. $x' \sim x*$. Dans ce cas, $u(x*) = u'(x')$ et on ne modifie pas $u'(x)$ pour $x \in X'$.
Cas 2 : pour tout $x \in X'$, $x* \succ x$. Dans ce cas, $u(x*) = [\max_{x \in X'} u'(x) + 1]/2$ et on ne modifie pas $u'(x)$ pour $x \in X'$. Noter que l'on pourrait prendre tout réel strictement supérieur à $\max_{x \in X'} u'(x)$. Le choix présent permet de conserver le co-domaine de $u(.)$ dans $(0, 1)$.

# théorème de représentation

*Preuve* (pour $X$ fini).
Cas 3 : pour tout $x \in X'$, $x \succ x*$. Dans ce cas, $u(x*) = [\min_{x \in X'} u'(x)]/2$ et on ne modifie pas $u'(x)$ pour $x \in X'$.

Cas 4 : il n'existe pas $x' \in X'$ t.q. $x' \sim x*$ et $x*$ n'est ni strictement préféré ni strictement préférable aux éléments de $X'$. L'idée est alors la suivante : on va considérer l'option $\underline{x}$ qui est la meilleure des options à qui $x*$ est préférée et $\bar{x}$, la moins bonne des options qui sont préférées à $x*$. Dans ce cas, $u(x*) = [u'(\bar{x}) + u'(\underline{x})]/2$. ♠

## exemple

On considère d'abord $x_1 \in X$ ; on lui attribue

$u(x_1) = 1/2$.

On considère ensuite $x_2$. Supposons que $x_2 \succ x_1$. On se trouve alors dans le Cas 3. Aussi

$$u(x_2) = [u(x_1) + 1]/2 = [1/2 + 1]/2 = 3/4$$

On considère ensuite $x_3$, que le décideur classe entre $x_1$ et $x_2$ : $x_2 \succ x_3 \succ x_1$. On se trouve alors dans le Cas 4. Aussi

$$u(x_3) = [u(x_1) + u(x_2)]/2 = [1/2 + 3/4]/2 = 5/8$$

Etc.

# le choix certain

<u>Modèle de choix certain</u>:

- l'agent peut choisir entre les éléments d'un ensemble d'opportunités ou d'actions réalisables $X \subseteq A$
- les préférences de l'agent sur $A$ satisfont (T) et (C)
- l'agent choisit, s'il en existe au moins une, une des actions dont la conséquence est $\succeq$-maximale relativement à $X$.

(CP') $c_{rat}(X) = \{x : \forall y \in X, x \succeq y\}$

# des choix aux préférences, et vice-versa

- sous l'hypothèse (CP), on peut

(i) *inférer des choix à partir des préférences*. Exemple: si $x \succ y$, alors $c(\{x, y\}) = \{x\}$

(ii) *inférer des préférences à partir des choix*. Exemple: si $c(\{x, y\}) = \{x\}$, alors on peut inférer que $x \succeq y$ et que $\neg(y \succ x)$.

- ce que l'on peut inférer des décisions de l'agent dépend de la notion exacte de décision en jeu:

  ✓ si par construction l'agent ne peut choisir qu'une action par problème de choix (condition d'exclusivité) = $c(.)$ est *monovalente* (pour tout argument $X$, $c(X)$ est un singleton), on ne peut pas inférer de $c(\{x, y\}) = \{x\}$ que $x \succ y$ (l'agent peut être indifférent entre $x$ et $y$)

  ✓ si l'on autorise que $c(.)$ soit *plurivalent*, alors ce que l'on peut inférer de $c(\{x, y\})$ devient plus précis : si $c(\{x, y\}) = \{x\}$, alors $x \succ y$ et si $c(\{x, y\}) = \{x, y\}$, alors $x \sim y$.

# les fonctions de choix

- Définition
  Soit $A$ un ensemble d'actions réalisables et $\mathbb{F} \subseteq \wp(A)$ un ensemble de situations de choix basées sur $A$. Une fonction de choix pour $\mathbb{F}$ est une fonction $c : \mathbb{F} \rightarrow \wp(A)$ t.q. $\forall X \in \mathbb{F}, c(X) \subseteq X$. On appelle $(\mathbb{F}, c)$ une structure de choix.
- $c(.)$ décrit ce que Paul choisirait dans chacune des situations de choix $X \in \mathbb{F}$

(Q1) si Paul obéit au (MCC), quelles doivent être les propriétés de sa fonction de choix ?

(Q2) quelles propriétés la fonction de choix de Paul doit-elle avoir pour que je puisse en rendre compte avec le (MCC) ?

# qu'est-ce que rendre compte d'une fonction de choix ?

- exemples:
  $c(\{x, y, z\}) = \{z\}$ ; $c(\{x, y\}) = \{y\}$ OUI
  $c'(\{x, y, z\}) = \{z\}$ ; $c'(\{y, z\}) = \{y\}$ NON
- Soit $(\mathbb{F}, c)$ une structure de choix ;

(i) $(\mathbb{F}, c)$ est rationalisée par une relation de préférence $\succ$ si $(\mathbb{F}, c) = (\mathbb{F}, c_{\succ})$ où
$c_{\succ}(X) = \{x \in X : \forall y \in X, \neg(y \succ x)\}$

(ii) $(\mathbb{F}, c)$ est rationalisable s'il existe une relation de préférence qui la rationalise.

# la propriété $\alpha$

revenons au contre-exemple: $c'(\{x, y, z\}) = \{z\}$ ; $c'(\{y, z\}) = \{y\}$. Si le comportement de Paul obéissait au (MCC) et que $c'\{x, y, z\} = z$, alors Paul préfère strictement $z$ ; donc il doit également choisir $z$ quand il fait face à un sous-ensemble pertinent de $\{x, y, z\}$.

imaginons que Paul ait le choix, au restaurant, entre

$y$ = saumon à l'aneth
$z$ = agneau de 7 heures
$x$ = caille farcie

et qu'il demande l'agneau au serveur. Celui-ci revient un instant après pour servir l'apéritif et lui dit qu'en fait, il n'y avait plus de caille farcie. Paul réfléchit, et opte finalement pour le saumon à l'aneth. N'y a-t-il pas quelque chose d'étrange dans le comportement de Paul ?

le principe sous-jacent qui est violé s'apelle la propriété $\alpha$.

# la propriété $\alpha$

- Définition (propriété $\alpha$ ou condition de contraction)
  Une structure de choix $(\mathbb{F}, c)$ satisfait la Propriété $\alpha$ si pour tout $X, Y \in \mathbb{F}$,

$$\text{si } X \subseteq Y \text{ et si } x \in c(Y) \cap X, \text{ alors } x \in c(X)$$

**“Ìf the world champion in a particular discipline is a Pakistani, he must be a Pakistani champion”** (Sen)

# cyclicité et propriété $\alpha$

soit le cycle suivant: $x \succ y \succ z \succ x$ ; cela implique
- $c(\{x, y\}) = \{x\}$
- $c(\{y, z\}) = \{y\}$
- $c(\{z, x\}) = \{z\}$

Que se passe-t-il pour $c(\{x, y, z\})$ ?

En vertu de la propriété $\alpha$, ni $x$, ni $y$, ni $z$ ne peuvent appartenir à $c(\{x, y, z\})$. (exercice: expliquez pourquoi !)

# la propriété $\beta$

- on peut facilement montrer que la propriété $\alpha$ est une conséquence du (MCC): un agent qui obéit à (MCC) obéit nécessairement à la propriété $\alpha$.
- il existe d'autres propriétés remarquables.
  imaginons que Paul ait le choix, au restaurant, entre

  $$y = \text{saumon à l'aneth}$$
  $$z = \text{agneau de 7 heures}$$

  Il va aux toilettes et dit à sa femme: "j'adore ces deux plats, prends celui qui t'inspire". En revenant, celle-ci dit qu'elle n'a pas commandé car le serveur lui a dit qu'était également proposé $x$ = caille farcie. Le téléphone de Paul sonne, et avant de décrocher et de quitter la salle, il dit: "Très bien, dans ce cas prends-moi le saumon - ni l'agneau, ni la caille". N'y a-t-il pas quelque chose d'étrange dans le comportement de Paul ?

# la propriété $\beta$

- Définition (Propriété $\beta$ ou condition d'expansion)
  Une structure de choix $(\mathbb{F}, c)$ satisfait la Propriété $\beta$ si pour tout $X, Y \in \mathbb{F}$,

$$\text{si } X \subseteq Y \; x, y \in c(X), \text{ alors } y \in c(Y) \text{ ssi } x \in c(Y)$$

**"If a Pakistani is world champion, then all the Pakistani champions are world champions"**

- Fait
  Si $c(.)$ est monovalente, alors les Propriétés $\alpha$ et $\beta$ sont équivalentes.
- Définition (WAC)
  Une structure de choix $(\mathbb{F}, c)$ satisfait l'axiome faible de congruence (WAC) si, si pour un $X \in \mathbb{F}$ avec $x, y \in X$, $x \in c(X)$, alors pour tout $X' \in \mathbb{F}$ avec $x, y \in X'$, $y \in c(X')$, $x \in c(X')$ (WAC)
  *idée: s'il arrive que $x$ soit choisi alors que $y$ est disponible, $x$ est toujours choisi quand il est disponible et que $y$ est choisi*

- Proposition
  Une structure de choix satisfait $\alpha$+$\beta$ ssi elle satisfait (WAC)
- Définition
  Une structure de choix est régulière si elle contient (au moins) tous les sous-ensembles finis de *A*.
- Proposition
  Si une structure de choix est régulière, alors elle est rationalisable ssi elle satisfait (WAC)

attention: quelle que soit la structure de choix, si elle est rationalisable, elle satisfait (WAC) ; mais si elle n'est pas régulière, elle peut satisfaire (WAC) sans être rationalisable.