la théorie des jeux, 1

CO8 2016-2017

M. Cozic

1. Les jeux sous forme normale et l'équilibre de Nash

1.1. L'interaction stratégique et les jeux sous forme normale

les interactions stratégiques

- théorie des jeux = théorie générale des interactions stratégiques = actions individuelles sont déterminées en fonction des actions des autres agents
  - interdépendance stratégique = les conséquences de ce qu'un agent fait dépendent de ce que font les autres agents prenant part à l'interaction

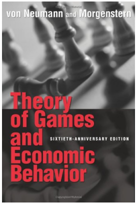


Figure: Von Neumann & Morgenstern (1944/1947)

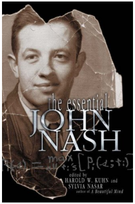


Figure: Nash (1951)

les interactions stratégiques

- exemples:
  - 2 enfants jouant à pierre-feuille-ciseaux
  - un goal qui doit décider où se jeter et un joueur de champ qui doit décider où tirer le pénalty
  - 2 nations ennemies qui doivent décider si elles augmentent ou pas leur arsenal militaire
  - 2 conducteurs dont les routes se croisent
  - des entreprises, en petit nombre, produisant le même bien et devant décider de la quantité de ce bien qu'elles s'apprêtent à produire (oligopole de Cournot)
  - des internautes qui enchérissent sur eBay

matching pennies

2 joueurs, chacun possède une pièce et il doit choisir secrètement l'un des deux côtés. Le joueur 1 gagne si les deux côtés sont les mêmes, le joueur 2 s'ils sont différents.

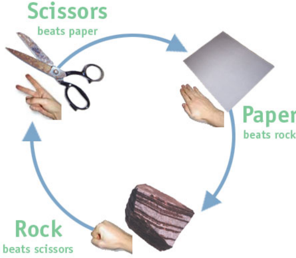
	F	P
F	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(1,-1)$

autre histoire pour la même représentation: le jeu du débarquement. 2 généraux ennemis doivent choisir entre deux endroits, l'un pour débarquer, l'autre pour empêcher le premier de débarquer. Si le défenseur choisit l'endroit choisi par l'attaquant, il gagne, sinon il perd.

pierre-feuille-ciseaux

- un jeu comme matching pennies, où les préférences des joueurs sont systématiquement opposées, s'appelle un jeu à somme nulle. Voici un autre exemple:

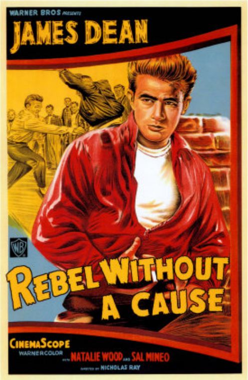
	F	P	C
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$



le jeu de la poule mouillée

Les deux joueurs roulent l'un vers l'autre au milieu de la route. Tous deux arrivent au point de non-retour et doivent décider s'ils cèdent C i.e. s'ils se rabattent sur leur voie, ou s'ils tiennent T i.e. restent au milieu de la route. Ils n'ont pas le temps de voir la décision de l'autre avant de prendre la leur.

http://www.youtube.com/watch?v=U1DFp8R9kwg&feature=related



le jeu de la poule mouillée

Les deux joueurs roulent l'un vers l'autre au milieu de la route. Tous deux arrivent au point de non-retour et doivent décider s'ils cèdent C i.e. s'ils se rabattent sur leur voie, ou s'ils tiennent T i.e. restent au milieu de la route. Ils n'ont pas le temps de voir la décision de l'autre avant de prendre la leur.

✓ si (T, T), l'issue est catastrophique pour tous les deux.

✓ si (T, C), c'est l'idéal pour le joueur 1 qui n'est pas une poule mouillée

✓ si (C, C), les deux sont des poules mouillées, mais ils sont sains et saufs !

	C	T
C	$(3, 3)$	$(2, 4)$
T	$(4, 2)$	$(0, 0)$

définition d'un jeu (sous forme stratégique)

- un jeu (sous forme stratégique) $G = \langle I, \{A_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I} \rangle$ est la donnée
- d'un ensemble de joueurs I
- d'un ensemble d'actions A_i pour chaque joueur i
- d'une fonction d'utilité u_i pour chaque joueur i qui évalue chaque profil d'actions possible $a \in A = A_1 \times ... \times A_I$

1.2. Domination et élimination itérée des stratégies dominées

le dilemme du prisonnier

2 joueurs soupçonnés d'avoir commis ensemble un crime majeur, arrêtés et interrogés séparément par les policiers qui ont assez d'éléments pour les convaincre d'un crime mineur. Chacun peut témoigner contre l'autre (T) ou ne pas le faire (C).

✓ si (C, C), alors 1 an de prison chacun

✓ si (T, T), alors 3 ans de prison chacun

✓ si (T, C) ou (C, T), celui qui trahit est libéré, celui qui ne trahit pas passe 4 ans en prison

	C	T
C	$(-1, -1)$	$(-4, 0)$
T	$(0, -4)$	$(-3, -3)$

résoudre le dilemme du prisonnier

- quel comportement doit-on attendre de joueurs rationnels dans le dilemme ?
- raisonnement du joueur 1:
  - si 2 témoigne contre moi (joue T), alors j'ai intérêt à témoigner contre lui
  - si 2 ne témoigne pas contre moi (joue C), alors j'ai intérêt à témoigner contre lui
  conclusion: j'ai intérêt à témoigner contre lui, i.e. jouer T. Même raisonnement pour le joueur 2.

	C	T
C	$(-1,-1)$	$(-4,0)$
T	$(0,-4)$	$(-3,-3)$

résoudre le dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(-1, -1)$	$(-4, 0)$
T	$(0, -4)$	$(-3, -3)$

- T est une stratégie strictement dominante : une stratégie telle que, quelle que soit celle choisie par l'autre joueur, l'utilité qu'elle procure est strictement supérieure à celle que procurent les autres stratégies envisageables
- le principe de dominance est le principe qui dit de choisir les stratégies strictement dominantes
- (T, T) est l'issue à laquelle on aboutit si chaque joueur se conforme au principe de dominance

la domination stricte

Définitions

- La stratégie $a_i \in A_i$ domine strictement $a'_i \in A_i$ si pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$
- $a_i \in A_i$ est strictement dominante si elle domine strictement toute $a'_i \in A_i$

rem 1: s'il existe une stratégie str. dominante, alors elle est unique.
rem 2: s'il existe une stratégie str. dominante pour lui, un joueur peut la trouver sans connaître les utilités de l'autre joueur

Définition

- Un profil de stratégie $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_I) \in A$ est un équilibre en stratégies str. dominantes si pour chaque joueur i, a_i est strictement dominante.

remarques sur le dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(-1,-1)$	$(-4,0)$
T	$(0,-4)$	$(-3,-3)$

- le Dilemme est sans doute le jeu le plus célèbre. Pas seulement parce qu'il illustre l'équilibre en stratégie dominante, mais parce que (i) il semble correspondre à de nombreuses situations sociales et (ii) l'issue recommandée par l'équilibre ne paraît pas collectivement rationnelle ou efficace.
- le concept de rationalité collective est partiellement représenté par celui de Pareto-domination

  Définition

  - Un profil de stratégie $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_I) \in A$ Pareto-domine un autre profil $a' = (a'_1, ..., a'_i, ..., a'_I) \in A$ si pour tout joueur $i \in I$, $u_i(a) > u_i(a')$.

remarques sur le dilemme du prisonnier

	C	T
C	$(-1,-1)$	$(-4,0)$
T	$(0,-4)$	$(-3,-3)$

- dans le Dilemme, (C, C) Pareto-domine (T, T). On en conclut qu'il y a conflit entre la rationalité individuelle (incarnée par le principe de dominance) et la rationalité collective (incarnée par le Principe de Pareto).
- pour certains, cela implique qu'il y a un problème avec le principe de dominance ; pour d'autres, simplement que rationalités individuelle et collective ne vont pas toujours de pair !

la domination faible

- le principe de dominance ne permet pas en général de résoudre un jeu: très souvent, il n'existe pas de stratégie dominante (et donc pas d'équilibre en stratégies str. dominantes) !
- c'est le cas du jeu de la poule mouillée

	C	T
C	$(3,3)$	$(2,4)$
T	$(4,2)$	$(0,0)$

- on peut étendre le concept aux stratégies qui sont au moins aussi bonnes que les autres et parfois strictement meilleures

  Définition

  La stratégie $a_i \in A_i$ domine faiblement $a'_i \in A_i$ si

  - pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$
  - il existe un $a_{-i} \in A_{-i}$ t.q. $u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$

  $a_i \in A_i$ est faiblement dominante si elle domine faiblement toute $a'_i \in A_i$

la dominance faible

- exemple:

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(3,0)$	$(1,1)$

- dans cette variante du Dilemme, le joueur 1 n'a plus de stratégies (strictement) dominantes, mais T est malgré tout faiblement dominante
- exemple:

	b_1	b_2
a_1	$(0,1)$	$(4,2)$
a_2	$(3,0)$	$(2,1)$
a_3	$(1,0)$	$(3,0)$

- dans ce jeu, le joueur 2 a une stratégie (faiblement) dominante (laquelle ?), mais pas le joueur 1

enchères au second prix

- processus:
- chaque joueur i annonce un offre $o_i \in [0, +\infty]$
- chaque joueur évalue le bien aux enchères v_i
- l'objet est offert à celui qui offre le plus, mais il le paye au prix de la seconde offre: $u_i(o_1, ..., o_n)$ =
  - $v_i - max_{j \neq i} o_j$ si $o_i > max_{j \neq i} o_j$ (cas où i gagne seul)
  - $1/m \times (v_i - max_{j \neq i} o_j)$ si $o_i = max_{j \neq i} o_j$ et s'il y a m vainqueurs (cas où i gagne avec $m - 1$ autres participants)
  - 0 si $o_i < max_{j \neq i} o_j$ (cas où i n'emporte pas l'enchère)

enchères au second prix

- annoncer son évaluation (i.e. $o_i = v_i$) est une stratégie faiblement dominante

  (a) pour tout $o_i \neq v_i$, v_i est au moins aussi bon que o_i.

- si $v_i < max_{j \neq i} o_j$. Avec $o_i < max_{j \neq i} o_j$, i obtient zéro, tandis que si $o_i \geq max_{j \neq i} o_j$, paiement négatif.
- si $v_i > max_{j \neq i} o_j$. Avec v_i ou quoique ce soit de strct. sup. à $max_{j \neq i} o_j$, i obtient $v_i - max_{j \neq i} o_j > 0$. En offrant $o_i = max_{j \neq i} o_j$, i devra partager et donc il obtiendra moins. Avec $o_i < max_{j \neq i} o_j$, il obtiendra zéro.
- si $v_i = max_{j \neq i} o_j$. Toute offre rapporte alors zéro.

  (b) pour tout $o_i \neq v_i$, il y a des o_{-i} telles que v_i est strict. meilleure que o_i.

  (i) si $o_i > v_i$, quand $max_{j \neq i} o_j \in (v_i, o_i)$, v_i rapporte zéro, o_i donne un paiement négatif.

  (ii) si $o_i < v_i$, quand $max_{j \neq i} o_j \in (o_i, v_i)$, v_i rapporte $v_i - max_{j \neq i} o_j$ et o_i zéro.

la dominance faible

- regardons l'un des jeux précédents une seconde fois le jeu précédent:

	b_1	b_2
a_1	$(0,1)$	$(4,2)$
a_2	$(3,0)$	$(2,1)$
a_3	$(1,0)$	$(3,0)$

- le joueur 1 peut compter sur le fait que le joueur 2 jouera b_2. Il peut alors réduire le jeu précédent au jeu suivant:

	b_2
a_1	$(4,2)$
a_2	$(2,1)$
a_3	$(3,0)$

- ...il aura alors une stratégie dominante: a_1.

l'élimination itérée

- dans l'exemple précédent, rôle essentiel des croyances du joueur 1 sur la rationalité du joueur 2 entendue comme le fait qu'il jouera une stratégie dominante
- on peut développer ces idées à partir du concept de stratégie dominée:

  Définition

  La stratégie $a_i \in A_i$ est strictement dominée s'il existe une stratégie $a'_i \in A_i$ qui la domine strictement.
- attention: dans un jeu, il se peut qu'un joueur ait des stratégies strictement dominées sans pour autant avoir de stratégies dominantes.
  - exemple:

	b_1	b_2
a_1	$(0,1)$	$(0,2)$
a_2	$(3,0)$	$(2,1)$
a_3	$(1,0)$	$(3,0)$

l'élimination itérée des stratégies strictement dominées

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(4,3)$	$(5,1)$	$(6,2)$
a_2	$(2,1)$	$(8,4)$	$(3,6)$
a_3	$(3,0)$	$(9,6)$	$(4,8)$

- a_2 est strictement dominée par a_3 donc, sous l'hypothèse que le joueur 1 est rationnel, le joueur 2 peut réduire son incertitude à la question de savoir s'il jouera a_1 ou a_3
- b_2 est strictement dominée par b_3 donc, sous l'hypothèse que le joueur 2 est rationnel, le joueur 1 peut réduire son incertitude à la question de savoir s'il jouera b_1 ou b_3

l'élimination itérée des stratégies strictement dominées

- on peut donc réduire le jeu initial au jeu suivant:

	b_1	b_3
a_1	$(4,3)$	$(6,2)$
a_3	$(3,0)$	$(4,8)$

  - a_3 est strictement dominée par a_1 donc, sous l'hypothèse que le joueur 1 est rationnel et qu'il croit que le joueur 2 est également rationnel, le joueur 2 peut anticiper que le joueur 1 jouera a_1
- Le jeu est alors réduit à

	b_1	b_3
a_1	$(4,3)$	$(6,2)$

  - la stratégie b_3 devient alors dominée par b_1. On obtient donc comme profil de stratégies (a_1, b_1)

l'élimination itérée des stratégies strictement dominées

- on appelle ce raisonnement l'élimination itérée des stratégies strictement dominées (EISSD)
  ✓ les curieux peuvent aller voir la Définition dans l'Appendice.
- un équilibre par EISSD est un profil de stratégies tel que chaque stratégie survit à l'EISSD.
- un jeu G est résoluble par dominance s'il possède un unique équilibre par EISSD[1].
  c'est le cas dans l'exemple précédent

[1] Def. un peu plus générale: pour chaque joueur, les stratégies qui survivent sont équivalentes i.e. procurent la même utilité quelles que soient les stratégies survivantes des autres joueurs.

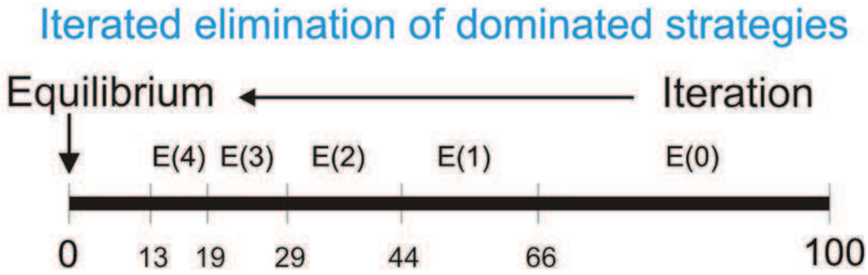
le jeu du concours de beauté

- choisissez un nbre entre 0 et 100 ; le gagnant sera celui dont le nombre est le plus proche des 2/3 de la moyenne
Quel nbre x_i doit choisir le joueur i ?
   - étape 1: la 2/3-moyenne est dans $[0, 200/3]$ donc les $x_i \in]200/3, 100]$ sont faiblement dominés dans le jeu initial $G^0 = G$: ils ne rapportent jamais plus et parfois strictement moins que $x_i = 200/3$.
- le processus d'élimination itérée des stratégies faiblement dominées (EISFD) peut être poursuivi:
   - étape 2: la 2/3-moyenne des x_i dans le jeu réduit G^1 est ds $[0, 400/9]$ donc les $x_i \in]400/9, 200/3]$ dans le jeu réduit sont faiblement dominés donc sont éliminés.

  ...

  $\Rightarrow$ l'unique équilibre par EISFD est le profil (0, ..., 0).

le jeu du concours de beauté



le jeu du concours de beauté

- particularité du profil $(0, ..., 0)$: un joueur *i* n'a pas intérêt à dévier étant donné le choix des autres.
- nous reviendrons très vite sur cette propriété

sur l'origine de "concours de beauté"

- Keynes *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie* (1936) compare les marchés financiers au jeu du concours de beauté:

"Ou encore, pour varier légèrement la métaphore, la technique du placement peut être comparée à ces concours organisés par les journaux où les participants ont à choisir les six plus jolis visages parmi une centaine de photographies, le prix étant attribué à celui dont les préférences s'approchent le plus de la sélection moyenne opérée par l'ensemble des concurrents. Chaque concurrent doit donc choisir non les visages qu'il juge lui-même les plus jolis, mais ceux qu'il estime les plus propres à obtenir le suffrage des autres concurrents, lesquels examinent tous le problème sous le même angle."

sur l'origine de "concours de beauté"

- Keynes *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie* (1936) compare les marchés financiers au jeu du concours de beauté:

Il ne s'agit pas pour chacun de choisir les visages qui, autant qu'il en peut juger, sont réellement les plus jolis ni même ceux que l'opinion moyenne considérera réellement comme tels. Au troisième degré où nous sommes déjà rendus, on emploie ses facultés à découvrir l'idée que l'opinion moyenne se fera à l'avance de son propre jugement. Et il y a des personnes, croyons-nous, qui vont jusqu'au quatrième ou au cinquième degré ou plus loin encore.

hypothèses sur la rationalité et EISSD

- dans le jeu

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(4,3)$	$(5,1)$	$(6,2)$
a_2	$(2,1)$	$(8,4)$	$(3,6)$
a_3	$(3,0)$	$(9,6)$	$(4,8)$

pour aboutir à (a_1, b_1), nous n'avons

- pas seulement supposé que les joueurs étaient rationnels (et qu'ils connaissaient le jeu) ;

- pas non plus seulement supposé qu'ils croyaient que l'autre était rationnel (et connaissait le jeu).

$\Rightarrow$ on est monté dans la hiérarchie des croyances en la rationalité de l'autre autant de fois que l'on a éliminé de stratégies dominées.

hypothèses sur la rationalité et EISSD

- pour être certain que le raisonnement soit toujours justifié, il faut supposer ce qu'on appelle la connaissance commune dans la rationalité (et dans la structure du jeu):
  - chacun est rationnel,
  - chacun sait que l'autre est rationnel,
  - chacun sait que chacun sait que l'autre est rationnel, etc.
- la théorie épistémiques des jeux est la branche qui caractérise de manière précise les hypothèses sur les croyances des agents qui conduisent aux différents équilibres.

hypothèses sur la rationalité et EISSD

- question: en quel sens supposer qu'un joueur est rationnel nous garantit qu'il ne jouera pas une stratégie strictement dominée ?
- imaginons que le joueur i ait des croyances sur l'action que j va jouer. Quelles que soient ses croyances, i a intérêt à *ne pas jouer* une stratégie strictement dominée
  - on peut rendre cela plus précis: imaginons que i ait une distribution de probabilité $P(.)$ sur A_j. Alors quelle que soit $P(.)$, l'espérance d'utilité d'une action strictement dominée est strictement moins bonne que l'EU de celle qui la domine.

hypothèses sur la rationalité et EISFD

- les choses sont un peu différentes avec la dominance faible et l'EISFD
  - exemple:

	C	T
C	$(3,3)$	$(0,4)$
T	$(3,0)$	$(1,1)$

si le joueur 1 est persuadé que le joueur 2 jouera C, alors il n'a plus intérêt à ne pas jouer C (la stratégie faiblement dominée) !

  - en termes d'EU: si le joueur 1 accorde une probabilité nulle au fait que le joueur 2 joue T, alors $EU(C) = EU(T)$.

- idée: ce qui garantit l'élimination par un joueur d'une stratégie faiblement dominée, c'est le fait qu'il soit rationnel et prudent au sens où il n'accorde pas de probabilité nulle à certaines actions de l'adversaire

d'autres complications pour l'EISFD

- exemple (Heifetz, 2012):

	b_1	b_2
a_1	$(0,0)$	$(1,0)$
a_2	$(0,1)$	$(0,0)$

- a_2 est faiblement dominée par a_1 et b_2 par b_1. L'EISFD conduit donc à (a_1, b_1).
- mais si on commence par éliminer b_2, alors a_1 ne domine plus (même faiblement) dans le jeu résiduel

	b_1
a_1	$(0,0)$
a_2	$(0,1)$

$\Rightarrow$ manque de robustesse de l'EISFD à l'ordre d'élimination

récapitulatif

- avec l'élimination itérée des stratégies strictement dominées, on arrive à en dire "plus" sur l'issue d'une interaction stratégique entre joueurs rationnels
- on ne considère plus simplement des joueurs rationnels, mais des joueurs qui en outre ont connaissance commune de la rationalité de chacun et de la structure du jeu
- problème: il y a de nombreux jeux où il n'existe pas ou peu de stratégies qui sont éliminées par le raisonnement (et encore plus de jeux qui ne sont pas résolubles par dominance)