CO8 - Cours de Mikael COZIC

Séance donnée par Vincent ELI

12 mai 2014

Nous commençons par décrire des jeux dotés d'une structure séquentielle et analysons ce qui les distingue des jeux sous 'forme stratégique' (ou 'normale'). Nous définissons formellement ces jeux sous 'forme extensive', puis tentons de les résoudre en les associant à des jeux sous forme normale, pour pouvoir utiliser le concept d'équilibre le plus généralement applicable introduit jusque là : 'l'équilibre de Nash'. Si cette approche permet de résoudre de tels jeux, nous verrons qu'elle a certaines limites qui motivent que l'on cherche, dans le cas des jeux sous forme extensive, à 'raffiner' l'équilibre de Nash en 'équilibre de Nash parfait en sous-jeux'.

1 Les jeux sous forme extensive :

1.1 Une structure séquentielle :

Certaines situations stratégiques possèdent une structure séquentielle (ou temporelle). La réflexion stratégique des joueurs s'en ressent, ce que les solutions proposées pour les jeux doivent prendre en compte.

Explicitons cela en prenant un exemple, le jeu classique de la bataille des sexes (BoS) :

		Fan de Stravinsky	
		B	S
Fan de Bach	B	$2, 1$	$0, 0$
	S	$-1, -1$	$1, 2$

FIGURE 1 – BoS simultané

Il y a deux équilibres de Nash dans ce jeu : (B,S) et (S,B). Dans cette version du jeu, les deux joueurs choisissent de manière simultanée. Cela peut vouloir dire qu'il décident au même moment. Même si les décisions étaient espacées temporellement, cela voudrait dire qu'aucun des deux joueurs n'a la possibilité d'observer le choix de l'autre avant de prendre sa décision, ce qui est le point important.

Supposons maintenant que cela ne soit plus le cas et que, par exemple, le joueur 2 (le fan de Stravinsky), puisse observer d'une manière ou d'une autre la décision du joueur 1 (il peut par exemple voir le billet que le joueur 1 a acheté, lui demander ce qu'il a acheté, etc.). Supposons également que ce fait est 'connaissance commune', c'est-à-dire notamment qu'ex ante, 2 sait qu'il observera ce que 1 aura joué, 1 sait que 2 sait qu'il observera ce que 1 aura joué, et ainsi de suite.
La réflexion stratégique des deux joueurs doit s'en ressentir, de telle sorte que nos analyses passées des jeux ne sont plus applicables. En effet, par exemple, désormais lorsque 1 envisage la situation, il sait que s'il choisit d'aller voir Bach, il peut compter sur le fait que le joueur 2 aura observé son choix et qu'il sera dans l'intérêt du joueur 2 d'également aller voir Bach. Dans ce cas particulier, par rapport au jeu simultané, le jeu séquentiel donne ici une sorte d'avantage au joueur 1, lui permettant d'imposer ses choix.

Des phénomènes différents émergent lorsqu'une interaction se déroule séquentiellement. Il semble donc pertinent de développer une théorie qui permette d'en rendre compte.

1.2 La représentation en arbre :

Le jeu séquentiel de la Bataille des Sexes peut être représenté sous la forme d'un 'arbre', comme dans la figure 2. Formellement, un arbre est un graphe connecté qui ne possède pas de cycle.

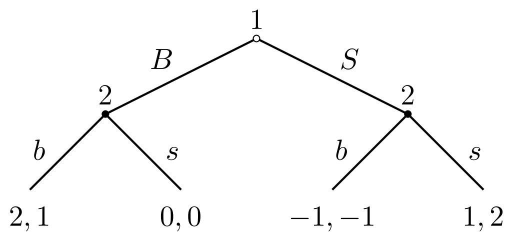


FIGURE 2 – BoS sequentiel

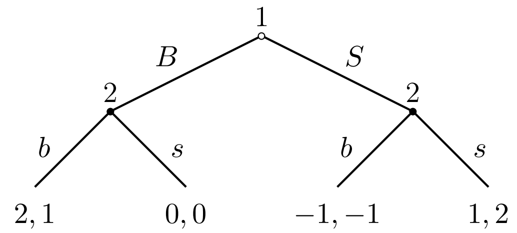
1.3 Ce qui ne change pas :

La dimension séquentielle est la seule nouvelle dimension que nous introduisons dans la théorie des jeux. Nous nous plaçons toujours dans des situations où la seule incertitude des joueurs est l'incertitude proprement 'stratégique' portant sur les décisions des autres joueurs. En particulier, nous travaillons toujours sous 'connaissance commune' du jeu, 'connaissance commune' de la rationalité des joueurs'. Par ailleurs, nous supposons toujours qu'une condition d''information parfaite' des joueurs est satisfaite ; dans ce cours, 'jeu sous forme extensive' n'est qu'une abréviation pour 'jeu sous forme extensive dans une condition d'information parfaite des joueurs'.

1.4 La définition formelle par les histoires :

Plutôt que de définir directement un jeu séquentiel comme un arbre, nous présentons une définition plus intuitive qui part de l'ensemble des 'histoires' possibles du jeu.

Reprenons notre exemple sous forme d'arbre, afin d'introduire cette définition alternative.



Les noeuds terminaux de l'arbre représentent des 'issues' possibles du jeu, et il est possible d'associer à chacune d'entre elles une 'histoire terminale' du jeu. Dans notre exemple, il y **4 histoires terminales** :

- (2,1) correspond à l'histoire terminale **(B,**b**)**
- (0,0) correspond à l'histoire terminale **(B,**s**)**
- (-1,-1) correspond à l'histoire terminale **(S,**b**)**
- (1,2) correspond à l'histoire terminale **(S,**s**)**

De manière plus générale, **toute suite finie** [1] **d'actions définit une 'histoire'**.

Pour l'instant, nous n'avons détaillé que les histoires terminales de ce jeu, on peut également y ajouter **3 '(sous-)histoires**', :

- **B** qui est une sous-histoire de (B,b) et de (B,s),
- **S** qui est une sous-histoire de (S,b) et de (S,s),
- $\emptyset$ qui correspond à l''histoire vide', celle du début du jeu.

On a donc un ensemble H d'histoires pour le jeu :
H= { $\emptyset$; (B) ; (S) ; (B,b) ; (B,s) ; (S,b) ; (S,s) }

Pour avoir une définition complète du jeu, il reste à préciser :

- **l'ensemble des joueurs** N=$\{1, 2\}$,

1. La théorie générale intègre également les suites infinies d'actions.

– **une fonction P(.) qui indique le joueur qui doit jouer** après chaque histoire non terminale,
P(∅)=1, P(B)=2 et P(S)=2,
– **des préférences** $\succeq_i$ **ou des utilités** u_i pour chaque joueur, définies sur l'ensemble des histoires terminales.
Ainsi, dans notre cas, on a (par défaut, ce sont des utilités ordinales) :
u_1((B,b))=2 , u_1((B,s))=0, u_2((B,b))=1, et u_2((B,s))=0
ou de manière équivalente, en préférences :
(B,b)$\succeq_1$(B,s) et (B,b)$\succeq_2$(B,s).

Nous pouvons maintenant donner la formalisation complète d'un jeu extensif.

Définition 1 *Un **jeu sous forme extensive** est caractérisé par :*
– *un ensemble d'individus N,*
– *un ensemble d'histoires H composé de suites (finies)* $\{h_t\}$ *qui vérifient les 2 propriétés suivantes :*
- *La suite vide ∅ est un élément de H,*
- *Si* $\{h_t\}_{t=1}^{T} \in H$*, alors pour tout* $T' < T$ *on a* $\{h_t\}_{t=1}^{T'} \in H$*,*
– *une fonction P(.) qui à chaque histoire non-terminale*[2] *z associe un élément* $i \in N$*,*
– *des relations de préférence* $\succeq_i$ *ou fonctions d'utilités* u_i *pour chaque joueur sur l'ensemble des histoires terminales*[3]*,*

1.5 Le concept de stratégie :

Pour un joueur, avoir une stratégie consiste à déterminer ex ante une action (parmi ses actions possibles) pour chaque histoire où il pourrait être amené à jouer. En d'autres termes, avant que le jeu ne se déroule séquentiellement, chaque joueur doit déterminer ce qu'il ferait dans tous les déroulements possibles du jeu qui lui donneraient la main.

Définition 2 ***La stratégie du joueur i*** *est une fonction* s_i *qui associe une action permise par le jeu à chaque histoire* $h \in H$ *qui vérifie* $P(h) = i$*. Par action permise par le jeu, on entend, une action qui complète l'histoire* $h=\{h_t\}_{t=1}^{T}$ *en une histoire de H, soit une action de l'ensemble A(h)=*$\{h_{T+1}$ *t.q.* $\{h_t\}_{t=1}^{T+1} \in H\}$

Il faut bien mesurer que le joueur i doit donc spécifier ex ante ce qu'il ferait pour toutes les histoires possibles du jeu. C'est-à-dire qu'il doit indiquer l'action qu'il accomplirait pour différentes histoires qui ne dépendent

2. Formellement, on définit un ensemble Z d'histoires terminales composé de toute suite$\{h_t\}_{t=1}^{T} \in$ H pour laquelle on ne peut trouver de h_{T+1} tel que $\{h_t\}_{t=1}^{T+1} \in$ H. La fonction P est alors rigoureusement définie sur $H \setminus Z$ et prend ses valeurs dans N.
3. $\succeq_i \subseteq Z \times Z$

que des actions des autres joueurs $-i$ (il s'agit dans ce cas de faire un plan d'action contingent : "si le joueur 2 faisait a, je ferais ... s'il faisait b, je ferais ...."). Mais il doit aussi indiquer ce qu'il ferait pour des histoires qui ont pour caractéristique d'être incompatibles avec les actions que sa stratégie aura préalablement prescrites. Dans la théorie des jeux sous forme extensive, le concept de 'stratégie' n'est pas notre concept intuitif de 'stratégie'; c'est un objet plus complexe.

Illustrons cela par un exemple.

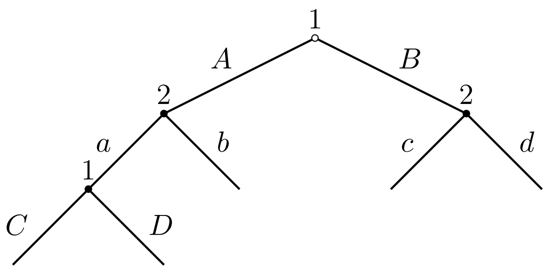


FIGURE 3 – Voici un jeu extensif à deux joueurs, aux utilités quelconques

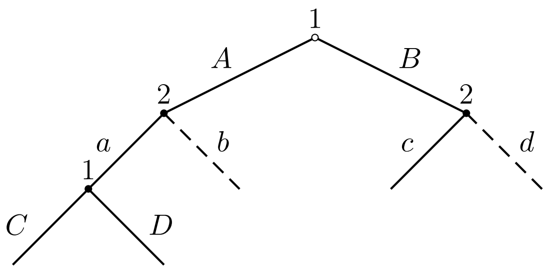


FIGURE 4 – Pour le joueur 2, spécifier une stratégie revient à faire un plan contingent d'action

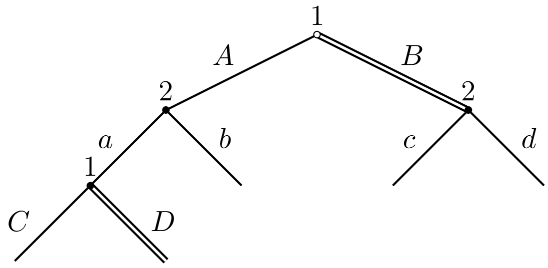


FIGURE 5 – La stratégie du joueur 1 doit spécifier des actions pour des histoires potentiellement incompatibles avec ses actions précédentes

En effet, ici le joueur 1 doit spécifier ce qu'il ferait pour l'histoire $\emptyset$ - par exemple, il peut choisir $s_1(\emptyset)$=B - mais il lui faudra également spécifier son action pour l'histoire (A,a) car P((A,a)) =1. Or, cette histoire est a priori exclue par le fait d'avoir choisi B et le joueur sait que s'il suit sa stratégie, il ne se retrouvera jamais à ce noeud. Néanmoins, le concept de stratégie de la théorie des jeux sous forme extensive demande au joueur 1 de spécifier tout de même ce qu'il ferait à ce noeud - par exemple, s_1((A,a))=D.

1.6 Des stratégies aux issues du jeu :

Quand chaque joueur a choisi une stratégie s_i, un profil joint de stratégies est déterminé. Pour un jeu à deux joueurs, ce sera un vecteur s=(s_1,s_2). La donnée d'un tel profil de stratégies s détermine une unique issue au jeu, c'est à dire : une histoire terminale ; un chemin de l'arbre ; des utilités pour chaque joueur (il suffit de partir de l'histoire vide et à chaque étape d'implémenter pour le joueur qui a la main l'action que sa stratégie associe à l'histoire de l'étape précédente).

Par exemple, en reprenant le jeu précédent et les stratégies des deux joueurs, on obtient le chemin suivant :

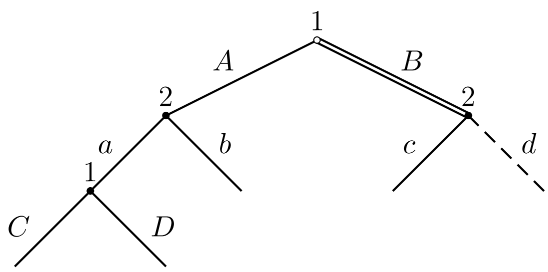


FIGURE 6 – L'histoire terminale déterminée par le profil de stratégies des figures 4 et 5 est (B,d)

Or les utilités ou les préférences sont définies sur les histoires terminales. Il est donc possible d'associer à chaque profil de stratégie s des utilités. Autrement dit, pour chaque joueur, il est possible de déterminer des préférences sur l'ensemble des profils de stratégies.

2 Les concepts d'équilibre :

Nous sommes désormais en mesure d'analyser les équilibres des jeux sous forme extensive.

2.1 L'équilibre de Nash :

DÉFINITION 3 *Un* ***equilibre de Nash*** *d'un jeu sous forme extensive est un profil s^* de stratégies tel que :*

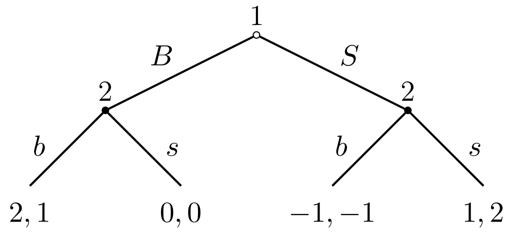
$$\forall i \in N, \forall s_i : u_i(s^*) = u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

ou de manière équivalente :

$$\forall i \in N, \forall s_i : s* = (s_i^*, s_{-i}^*) \succeq_i (s_i, s_{-i}^*)$$

Cette définition suggère que l'on peut voir le jeu sous 'forme extensive' comme un méta-jeu sous 'forme normale', dans lequel le concept d'équilibre n'est plus appliqué aux actions directement, mais aux stratégies, qui, elles, sont déterminées par les joueurs de manière simultanée. Il est donc possible de voir ce jeu comme un jeu sous forme normale avec pour chaque joueur un ensemble d'action identique à l'ensemble de ses stratégies possibles.

Reprenons le jeu BoS pour déterminer les équilibres de Nash.



Le joueur 1 peut choisir entre deux stratégies :
- (B) qui correspond à $s_1(\emptyset)$=B,
- (S) qui correspond à $s_1(\emptyset)$=S.

Le joueur 2 peut choisir entre quatre stratégies :
- (b,b) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=b et $s_2((\mathrm{S}))$=b
- (b,s) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=b et $s_2((\mathrm{S}))$=s
- (s,b) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=s et $s_2((\mathrm{S}))$=b
- (s,s) qui signifie $s_2((\mathrm{B}))$=s et $s_2((\mathrm{S}))$=s

On peut donc représenter ce jeu sous la 'forme normale' suivante :

		Fan de Stravinsky			
		(b,b)	(b,s)	(s,b)	(s,s)
Fan de Bach	(B)	$2,1$	$2,1$	$0,0$	$0,0$
	(S)	$-1,-1$	$1,2$	$-1,-1$	$1,2$

FIGURE 7 – BoS séquentiel sous forme normale

Ce jeu a trois équilibres de Nash, c'est-à-dire trois profils de stratégies :
- ((B),(b,s))
- ((B),(b,b))
- ((S),(s,s))

2.2 Limites des équilibres de Nash de la forme normale associée :

Regardons ce à quoi ces profils de stratégies correspondent dans l'arbre du jeu.

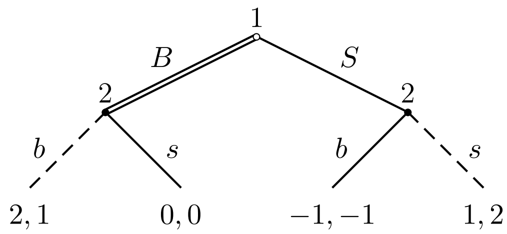


FIGURE 8 – L'équilibre de Nash (B,(b,s))

Cet équilibre semble correspondre au sens commun. À la seconde étape, quel que soit le choix du joueur 1 (B ou S), le joueur 2 a intérêt à suivre ce choix étant données les utilités du jeu. Le joueur 1, sachant cela, compare alors les deux histoires terminales (B,b) et (S,s). Il prend l'action (B) qui lui permet d'atteindre l'histoire terminale qu'il préfère (B,b).

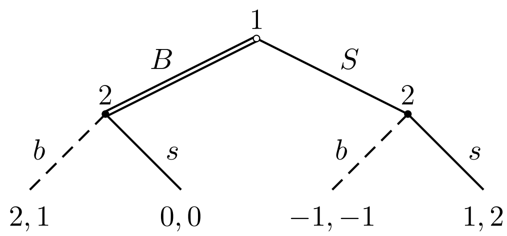


FIGURE 9 – L'équilibre de Nash (B,(b,b))

Même si cet équilibre ressemble au précédent, car il arrive à la même histoire terminale (B,b), il y a quelque chose d'étrange s'agissant de sa justification rationnelle. En effet, ici le joueur 2 choisit une stratégie (b,b) qui lui fait jouer de manière rationnelle b si 1 joue B. Mais, de manière étrange, le joueur 2 s'engage ex ante à jouer b, même si le joueur 1 choisissait S. Cela semble 'non crédible', car si le joueur 1 jouait réellement S, le joueur 2 aurait alors tout intérêt à choisir s, ce qui lui permettrait d'aboutir à l'histoire terminale (S,s) qui est l'issue du jeu la plus favorable pour lui. Quoi qu'il en soit, cela n'a pas d'incidence sur l'issue du jeu. Le joueur 1 compare les deux histoires terminales engendrées par ses actions permises, ainsi que par la stratégie de 2 supposée fixe. Le joueur 1 préfère l'histoire (B,b) à (S,b), et choisit donc l'action B.

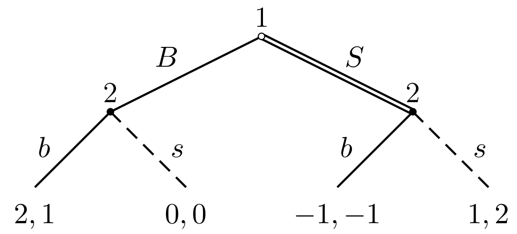


FIGURE 10 – L'équilibre de Nash (S,(s,s))

Cet équilibre est le plus problématique des trois. En effet, ici comme dans l'équilibre précédent, il y a quelque chose de non crédible dans la stratégie choisie ex ante par le joueur 2 et, contrairement à l'exemple précédent, cette stratégie va venir modifier le choix du joueur 1 et donc changer l'issue du jeu. Le joueur 2 s'engage à jouer s quel que soit le choix du joueur 1. Cela semble rationnel si le joueur 1 a joué S. Mais si ce dernier choisit B, il semble qu'une fois à la seconde étape, le joueur 2 aura intérêt à ne pas suivre sa stratégie et à plutôt jouer b, sinon il choisirait contre sa propre préférence. Du point de vue du joueur 1, tout se passe comme s'il y avait une forme de 'menace (non crédible)' de la part du joueur 2, pour inciter le joueur 1 à ne pas jouer B. Le joueur 1 compare (B,s) et (S,s), et choisit l'action S car il préfère cette dernière issue.

Les deux derniers équilibres - et en particulier le dernier - illustrent le fait que le concept d'équilibre de Nash ne peut être importé mécaniquement de la forme normale associée à un jeu séquentiel, sous peine de déboucher sur des équilibres improbables quand on tient compte de la structure séquentielle du jeu. Cela tient à ce que le passage sous forme matricielle stratégique fait perdre des informations qui étaient contenues dans l'arbre (ou dans la structure en histoires). Cette constatation a amené les théoriciens des jeux (Kuhn, 1953) à développer un raffinement de l'équilibre de Nash adapté pour les jeux sous forme extensive : l''équilibre parfait en sous-jeux' ('subgame perfect equilibrium').

2.3 L'équilibre parfait en sous-jeux et la 'backward induction' :

En fait, dans nos analyses des trois équilibres de Nash du jeu, nous avons déjà introduit le concept qui va nous servir à raffiner convenablement pour nos besoins l'équilibre de Nash : les 'sous-jeux'.

En effet, le problème avec l'équilibre de Nash originel est qu'il ne tient pas compte de la structure séquentielle du jeu : il considère que les joueurs choisissent une stratégie une fois pour toute au début du jeu. Mais, dans un jeu séquentiel, pour qu'une stratégie soit robuste ou crédible, il est nécessaire qu'elle soit rationnelle ou optimale non seulement au début du jeu, mais aussi après chaque histoire potentielle.
Ce qui rend les deux équilibres précédents non robustes, c'est que l'on peut trouver un sous-jeu (c'est à dire, ce qui reste à jouer après une sous-histoire non terminale du jeu) dans lequel la stratégie d'un joueur spécifie des actions qui ne sont pas pour lui rationnelles dans ce sous-jeu. En effet, si l'on se retrouvait réellement à l'un des noeuds en question (par exemple, pour l'équilibre (S,(s,s)) pour le sous-jeu après l'histoire (B)), le joueur (2) aurait tout intérêt à ne pas implémenter sa stratégie ($s_2((B)) = s$), i.e. à dévier de l'équilibre (pour jouer b à la place). En fait, l'équilibre de Nash originel n'impose la rationalité des actions que pour les étapes qui peuvent être réellement atteintes par les stratégies des joueurs (c'est à dire, sur le chemin qui mène à l'issue déterminée par le profil de stratégie). Renforçant les réquisits sur l'existence d'une solution, la notion d'équilibre parfait en sous-jeux impose cette contrainte pour toutes les histoires potentielles du jeu.

Définition 4 *Un* ***équilibre parfait en sous-jeux*** *d'un jeu sous forme extensive est un profil s^* de stratégies tel que :*

$\forall i \in N, \forall$ *h tel que* $P(h) = i$

$$\forall s_i : u_i(s^*|h) = u_i((s_i^*, s_{-i}^*)|h) \geq u_i((s_i, s_{-i}^*)|h)$$

où $u_i((s_i\ ,\ s_{-i})|h)$ est l'utilité pour le joueur i associé à l'issue du jeu à laquelle on arrive en partant de h et en suivant les actions spécifiées par le profil de stratégies (s_i, s_{-i}).

Pour trouver les équilibres parfait en sous-jeux il y a deux approches. 1) Comme nous l'avons fait, il est possible de commencer par déterminer les équilibres de Nash et ensuite d'identifier ceux qui satisfont les contraintes supplémentaires de l'équilibre parfait en sous-jeux. 2) Un autre approche plus directe consiste à utiliser le principe d''induction inverse' ou 'rétrograde' ('backward induction'). Il s'agit de partir de la fin du jeu et d'appliquer à chaque étape et à chaque branche le principe de rationalité (en se fondant sur CKR et CKG).

Illustrons le principe de l'induction inverse sur le BoS séquentiel :

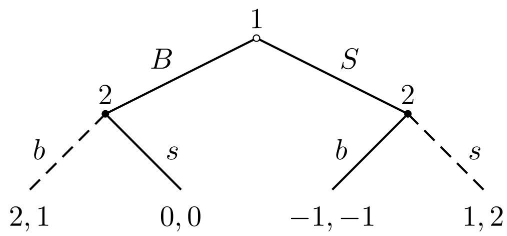


FIGURE 11 – L'induction rétrograde appliquée à l'avant-dernière étape

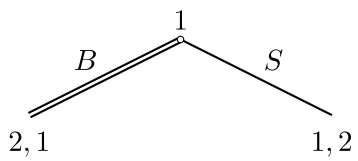


FIGURE 12 – L'induction rétrograde débouche donc sur l'équilibre (B,(b,s))

Le théorème suivant est dû à Kuhn (1953) :

THÉORÈME 1 *Tout jeu fini sous forme extensive possède au moins un équilibre parfait en sous-jeux (résultat de l'induction rétrograde). Si, de plus, aucun joueur n'est indifférent entre aucune histoire terminale, alors cet équilibre est unique.*