Cogmaster CO8

TD n° 1 - jean.baccelli@ens.fr

11 février 2014

Une relation binaire R dans un ensemble X est un sous-ensemble de son produit cartésien $X \times X$. On supposera ici $X = \{a, ..., z\}$ fini, et on l'appellera "l'ensemble d'options". On s'intéressera à une "relation de préférence" R dans X : $R \subseteq \{(a,a), (a,b), ..., (a,z), (b,a), (b,b), ..., (b,z), ..., (z,z)\}$.

Définition 1 complétude : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est complète si $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$.*

Définition 2 réflexivité : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est réflexive si $\forall x \in X : xRx$.*

Exercice 1 *Prouvez que la complétude implique la réflexivité. Montrez par l'exemple que la réflexivité n'implique pas la complétude - prenez $X = \{x, y\}$.*

Définition 3 transitivité : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est transitive si $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow yRz$.*

Exercice 2 *Montrez par l'exemple que la complétude et la transitivité sont logiquement indépendantes - prenez $X = \{x, y, z\}$.*

Définition 4 symétrie : *une relation binaire $R \subseteq X \times X$ est symétrique si $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$.*

Définition 5 indifférence, 1 : *soit $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ une relation réflexive de "préférence large". L'"indifférence", notée $\sim$, est le sous-ensemble symétrique de $\succcurlyeq$: $\sim \subseteq \succcurlyeq$, $\sim = \{(x,y) \in X \times X \mid x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x\}$.*

Exercice 3 *Soit $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ une relation de préférence complète et transitive. Vérifiez que l'indifférence associée forme alors une relation d'équivalence - ie une relation symétrique, réflexive, transitive - et qu'elle n'est jamais vide.*

DÉFINITION 6 ASYMÉTRIE : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est asymétrique si* $\forall x, y \in X\ : xRy \Rightarrow \neg yRx$.

DÉFINITION 7 PRÉFÉRENCE STRICTE : *soit* $\succcurlyeq\ \subseteq X \times X$ *une relation réflexive de "préférence large". La "préférence stricte", notée* $\succ$, *est le sous-ensemble asymétrique de* $\succcurlyeq$: $\succ\ \subseteq\ \succcurlyeq$, $\succ\ = \{(x, y) \in X \times X \mid x \succcurlyeq y \wedge \neg y \succcurlyeq x\}$.

DÉFINITION 8 IRRÉFLEXIVITÉ : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est irréflexive si* $\forall x \in X\ : \neg xRx$.

Exercice 4 *Soit* $\succcurlyeq\ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète et transitive. Prouvez que la préférence stricte associée est irréflexive. Est-elle complète ? Prouvez au passage qu'une relation transitive et irréflexive est asymétrique.*

DÉFINITION 9 TRANSITIVITÉ NÉGATIVE : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est négativement transitive si* $\forall x, y, z \in X\ : \neg xRy \wedge \neg yRz \Rightarrow \neg xRz$.

Exercice 5 *Soit* $\succcurlyeq\ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence réflexive. Prouvez que si* $\succcurlyeq$ *est transitive, la préférence stricte associée est transitive, et que si* $\succcurlyeq$ *est aussi complète, la préférence stricte associée est négativement transitive.*