Cogmaster CO8

TD n° 2 - jean.baccelli@ens.fr

18 février 2014

On change aujourd'hui, pour l'essentiel, de relation primitive : au lieu de partir d'une relation de "préférence large", on partira d'une relation de "préférence stricte" $\succ$, $\succ\, \subseteq X \times X$, qui par définition sera toujours asymétrique.

Exercice 1 *Soit* $\succ\, \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de préférence. Prouvez que si* $\succ$ *est négativement transitive, alors elle est aussi transitive. Montrez par l'exemple que l'asymétrie et la transitivité n'impliquent pas la transitivité négative - prenez* $X = \{w, x, y, z\}$

Exercice 2 *Montrez par l'exemple que l'asymétrie et la transitivité négative sont logiquement indépendantes - prenez* $X = \{x, y, z\}$.

Définition 1 indifférence, 2 : *soit* $\succ\, \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de "préférence stricte". L'"indifférence", notée* $\sim$, *est le sous-ensemble d'incomplétude de* $\succ$ *dans* $X \times X$: $\sim\, = \{(x, y) \in X \times X \mid \neg x \succ y \wedge \neg y \succ x\}$.

Exercice 3 *Soit* $\succ\, \subseteq X \times X$ *une relation de préférence asymétrique et négativement transitive. Vérifiez que l'indifférence associée est une relation d'équivalence, qui n'est pas vide. Comment interpréter cette indifférence, 2 ?*

Définition 2 préférence large : *soit* $\succ\, \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de "préférence stricte". La "préférence large", notée* $\succcurlyeq$, *correspond au sous-ensemble de* $X \times X$ *défini ainsi :* $\succcurlyeq\, = \{(x, y) \in X \times X \mid x \succ y \vee x \sim y\}$.

Exercice 4 *Soit* $\succ\, \subseteq X \times X$ *une relation de préférence asymétrique. Prouvez que la relation de préférence large associée ne peut pas être incomplète - quelle propriété au juste avez-vous utilisée à cette fin ? Prouvez que si* $\succ$ *est asymétrique et négativement transitive, alors* $\succcurlyeq$ *est une relation transitive.*

Exercice 5 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation primitive de "préférence large" réflexive, et* $\sim_1$ *la relation d'indifférence associée à* $\succcurlyeq$ *suivant la définition 1. Soit* $\succ \subseteq X \times X$ *la relation de "préférence stricte" asymétrique associée à* $\succcurlyeq$*, et* $\sim_2$ *la relation d'indifférence qui est associée à* $\succ$ *suivant la définition 2. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète,* $\sim_1 \neq \sim_2$ *- prenez* $X = \{x, y\}$*. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète,* $\sim_2$ *peut être intransitive - prenez* $X = \{x, y, z\}$*. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète, même quand* $\sim_1$ *et* $\sim_2$ *sont toutes les deux transitives, il se peut que* $\sim_1 \neq \sim_2$ *- prenez* $X = \{w, x, y, z\}$*.*