Quelques concepts et notations logico-mathématiques

Version 1.2

Sciences de la décision (CO8)

Mikaël COZIC

1 Préambule

Les théories sont *mathématisées*. Nous avons donc besoin de notations et de concepts logiques et mathématiques pour les présenter, et pour exposer quelques résultats importants du point de vue philosophique.

2 Notations : vue d'ensemble

$\wedge$	conjonction (...et...)
$\rightarrow$	conditionnel (si..., alors...)
$\leftrightarrow$	biconditionnel (...si, et seulement si,...)
$\neg$	négation (il est faux que...)
$\forall$	quantificateur universel (pour tout...)
$\exists$	quantificateur existentiel (il existe...)
$\in$	appartient à
$\notin$	n'appartient pas à
$\subseteq$	inclusion (large)
$\emptyset$	ensemble vide
$\{x \in X : ...\}$	l'ensemble des x de X tels que...
$\cup$	union (de deux ensembles)
$\cup_{i \in I}$	union (d'ensembles indexés par i)
$\cap$	intersection (de deux ensembles)
$\cap_{i \in I}$	intersection (d'ensembles indexés par i)
(x, y)	couple x, y
$A \times B$	produit cartésien
$f : A \rightarrow B$	fonction de A vers B
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\sum_{i=0}^{n} a_i$	somme généralisée (de a_0 à a_n) $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + ... + a_n$
$\prod_{i=0}^{n} a_i$	produit généralisé (de a_0 à a_n) $\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \times ... \times a_n$
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels

3 Logique

3.1 Les connecteurs propositionnels

Ce sont des termes qui relient deux énoncés (suites de signes susceptibles d'être vraies ou fausses, c'est-à-dire d'avoir une "valeur de vérité") pour en produire un troisième dont la valeur de vérité dépend de la valeur de vérité des énoncés constituants. De manière analogue, en français, l'énoncé "Il fait beau et il fait chaud" peut s'analyser comme formé à partir des énoncés constituants "Il fait beau" et "il fait chaud" et du terme "et", dont la fonction s'assimile à celle des connecteurs propositionnels de la logique. Et la valeur de vérité de "Il fait beau et il fait chaud" dépend de celles de "Il fait beau" et "il fait chaud".

Des énoncés formalisés simples qui reviennent sans cesse en théorie de la décision sont ceux qui portent sur les préférences. On les prendra donc comme exemples par la suite. Rappelons que

$$a \succ b$$

signifie

a est (strictement) préféré à b

Du point de vue logique, un énoncé comme $a \succ b$ s'analyse comme formé à partir d'un *symbole de relation* (appelé aussi symbole de prédicat binaire ; il désigne ici la relation de préférence) appliqué à deux symboles de constantes (a et b).

Les connecteurs que nous utiliserons principalement sont les suivants :

(1) $\wedge$: la "**conjonction**", qui correspond (en gros) à la conjonction de coordination "...et..." en français

Exemple 1
L'expression

$$(a \succ b) \wedge (b \succ c)$$

signifie :

a est préféré à b et b est préféré à c.

(2) $\rightarrow$: le **conditionnel**, qui correspond (en gros) à la construction "Si..., alors...." en français.

Exemple 2
L'expression

$$(a \succ b \wedge b \succ c) \rightarrow a \succ c$$

signifie

si a est préféré à b et b à c, alors a est préféré à c

Remarque de méthode : pour démontrer une affirmation du genre "Si ϕ, alors ψ" (ou ϕ et ψ sont des énoncés), on procède souvent par un raisonnement hypothétique : on *suppose* que ϕ est vrai, et on cherche à en déduire que ψ est alors vrai.

(3) $\leftrightarrow$: le **biconditionnel**, qui correspond (en gros) à la construction "... si, et seulement si,...." en français.

Exemple 3
L'expression

$$(b \sim c) \rightarrow (a \succ b \leftrightarrow a \succ c)$$

signifie

s'il y a indifférence entre b et c, alors a est préféré à b si, et seulement si, a est préféré à c

Remarque de méthode : pour démontrer une affirmation du genre "ϕ si, et seulement si, ψ" (ou ϕ et ψ sont des énoncés), on procède souvent par un double raisonnement hypothétique puisque "ϕ si, et seulement si, ψ" ne signifie rien d'autre que "si ϕ, alors ψ et si ψ, alors ϕ". Dans la démonstration, on marque alors clairement les deux étapes : on indique, par exemple, que l'on va d'abord démontrer le conditionnel "de gauche à droite" (i.e. "si ϕ, alors ψ") et ensuite le conditionnel "de droite à gauche" (i.e. "si ψ, alors ϕ").

(4) $\neg$: la "**négation**", qui correspond (en gros) à l'expression "il est faux que...".

Exemple 4
L'expression

$$(a \succ b) \rightarrow \neg(b \succ a)$$

signifie

si a est préféré à b, alors b n'est pas préféré à a

3.2 Quantificateurs

La seconde famille remarquable d'expressions logiques est celle des quantificateurs. Comme le terme l'indique, ce sont des expressions qui donnent des informations sur la quantité (de choses qui satisfont telles ou telles propriétés). Nous utiliserons deux quantificateurs différents.

(1) $\forall$: le "quantificateur universel", qui correspond (en gros) aux expressions "Tous", "Toutes", etc.

Le quantificateur universel est très important, parce qu'il permet d'exprimer la généralité. Son usage, comme celui des autres quantificateurs, est néanmoins subtil : il repose sur l'emploi de *variables*.

Exemple 5
Supposons que je veuille formaliser l'énoncé

a est préférée (largement) à toute option

Une façon d'arriver à la formalisation logique consiste à paraphraser l'énoncé précédent de la manière suivante, qui met en évidence le rôle de la variable :

pour toute option x, a est préférée à x

ce qui donne

$$\forall x \; a \succeq x$$

(2) $\exists$: le quantificateur existentiel, qui correspond (en gros) aux expressions "Quelque", "Il existe". Pour être plus précis et moins ambigü, il faudrait le traduire comme affirmant "Il existe au moins une chose telle que...'.

Exemple 6
Supposons que je veuille formaliser l'énoncé

Quelque option est préférée à a

Une façon d'arriver à la formalisation logique consiste à paraphraser l'énoncé précédent de la manière suivante, qui met en évidence le rôle de la variable :

Il existe une option x telle que x est préférée à a

ce qui donne

$$\exists x \; x \succeq a$$

4 Mathématiques

4.1 Notations ensemblistes générales

4.1.1 Ensemble et appartenance

La théorie des ensemble constitue la *lingua franca* des mathématiques. Les autres concepts mathématiques sont exprimés dans le langage de la théorie des ensemble. Celle-ci repose sur deux notions primitives : celles d'ensemble et d'appartenance.

Les **ensembles** sont souvent représentés par des lettres de l'alphabet. Ainsi, en théorie de la décision, on désigne typiquement l'ensemble des actions réalisables par A, l'ensemble des conséquences par C, etc. Quand on veut décrire un certain ensemble, on a recours aux accolades "$\{...\}$". Ainsi, l'affirmation $A = \{...\}$ dit que l'ensemble désigné par A est constitué des éléments qui sont entre les deux accolades. On dit que ces éléments **appartiennent** à l'ensemble en question. Ainsi, les nombres 1, 2 et 3 appartiennent à l'ensemble des nombres naturels. Cet ensemble est conventionnellement désigné par le symbole "$\mathbb{N}$". L'appartenance se symbolise par "$\in$". Par conséquent

Le nombre 1 appartient à l'ensemble des nombres naturels se symbolise par

$$1 \in \mathbb{N}$$

Il est souvent utile d'avoir un symbole pour représenter la négation de l'appartenance. Il s'agit simplement de "$\notin$". Ainsi

$$a \notin X$$

signifie

$$a \text{ n'appartient pas à } X$$

L'ensemble qui n'a pas d'éléments est appelé l'**ensemble vide** et est noté $\emptyset$. On dit aussi d'un ensemble qui n'a qu'un élément qu'il est un **singleton**.

On peut décrire un ensemble de deux manières :

– en *extension*, c'est-à-dire en indiquant un-par-un les éléments qui appartiennent à l'ensemble
– en *intension*, c'est-à-dire en indiquant la propriété qui caractérise exactement les éléments de l'ensemble

Exemple 7
Le même ensemble A peut être décrit
- *en extension : $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$*
- *en intension : A est l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 4*

En général, on essaie d'utiliser les notations pour abréger la description de la propriété. La manière canonique de procéder consiste à séparer l'accolade en deux compartiments à l'aide de " :" ou de "|" : dans le compartiments de gauche, on indique à quel "grand" ensemble les éléments de l'ensemble qui nous intéresse appartiennent ; dans le compartiment de droite, on indique ce qui les caractérise dans ce "grand" ensemble. Dans notre exemple, cela pourra donner

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 4\}$$

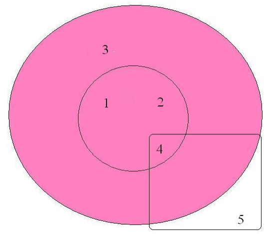
4.1.2 L'inclusion

L'inclusion est une relation entre ensembles.

Définition 1
Un ensemble A est inclus dans un ensemble B si, et seulement si, tout élément de A est un élément de B. Ou encore : pour tout x, si $x \in A$, alors $x \in B$.

Le symbole représentant l'inclusion est "$\subseteq$". Celui représentation sa négation est "$\nsubseteq$".

Exemple 8
- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{4, 5\} \nsubseteq \{1, 2, 3, 4\}$



Attention : pour tout ensemble A, $\emptyset \subseteq A$. Pourquoi ? Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existerait un élément de $\emptyset$ qui n'est pas dans A. Mais $\emptyset$ n'a aucun élément.

Proposition 1
Soient deux ensembles A et B.

$$A = B \textit{ ssi } A \subseteq B \textit{ et } B \subseteq A$$

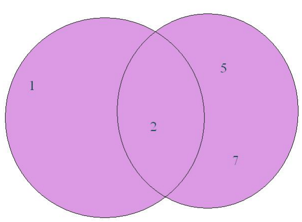
Remarque : cette Proposition est très utile quand on veut montrer que deux ensembles sont (ou ne sont pas) identiques.

4.1.3 Union, intersection

Définition 2
*Soient A et B deux ensembles ; l'**union** de A et de B, notée $A \cup B$ est l'ensemble qui contient les éléments de A et les éléments de B.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemple 9
- $\{1, 2\} \cup \{2, 5, 7\} = \{1, 2, 5, 7\}$
- $\{1, 2\} \cup \{5, 7\} = \{1, 2, 5, 7\}$
- $\{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$



Exemple 10
- $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 3, 5\} \cup \emptyset = \{1, 3, 5\}$.
- $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Proposition 2
Soient A et B des ensembles ;
(i) $A \cup B = B \cup A$
(ii) $A \cup \emptyset = A$

(iii) $A \subseteq B$ *ssi* $A \cup B = B$

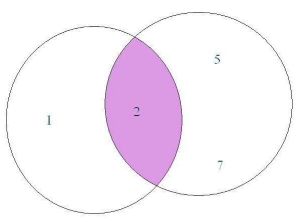
Preuve de (i). Rappelons que pour montrer que deux ensembles sont égaux, il suffit de montrer que le premier est inclus dans le second, et réciproquement. Montrons d'abord que $A \cup B$ est inclus dans $B \cup A$. Pour cela, il faut montrer que tout x appartenant à $A \cup B$ appartient aussi à $B \cup A$. Soit $x \in A \cup B$. Par définition, $x \in A$ ou $x \in B$ donc (comme la disjonction est commutative) $x \in B$ ou $x \in A$ donc par définition $x \in B \cup A$. La réciproque se montre de la même façon.

Exercice 1
Montrez les items (ii) et (iii) de la Proposition.

Définition 3
*Soient A et B deux ensembles ; l'**intersection** de A et de B, notée $A \cap B$ est l'ensemble qui contient les éléments communs à A et B.*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Exemple 11
- $\{1, 2\} \cap \{2, 5, 7\} = \{2\}$
- $\{1, 2\} \cap \{5, 7\} = \emptyset$
- $\{1, 2\} \cap \emptyset = \emptyset$



Exemple 12
- $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 4\} = \{1\}$
- $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$
- $\{1, 2\} \cap \emptyset = \emptyset$.
- $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\}$.

Proposition 3
Soient A et B deux ensembles ;
(i) $A \cap B = B \cap A$
(ii) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(iii) $A \subseteq B$ *ssi* $A \cap B = A$

Preuve de (iii) : quand on doit démontrer un "...si, et seulement si,...", il faut en fait démontrer chacun des deux sens du conditionnel. ($\rightarrow$). Premier sens (de gauche à droite) : supposons que $A \subseteq B$. (a) Il faut d'abord montrer que $A \cap B \subseteq A$. Considérons les $x \in A \cap B$. Par définition, ils appartiennent à la fois à A et B. Donc ils appartiennent à A. Donc $A \cap B \subseteq A$. (b) Il faut ensuite montrer que $A \subseteq A \cap B$. Soit $x \in A$. Puisque $A \subseteq B$, $x \in B$ (par définition de l'inclusion). Donc x appartient à la fois à A et B. Donc $x \in A \cap B$. Donc $A \subseteq A \cap B$. ($\leftarrow$). Second sens (de droite à gauche) : on suppose que $A \cap B = A$. Considérons un $x \in A$. Par hypothèse, puisque les ensembles A et $A \cap B$ sont identiques, alors $x \in B$. Et on a bien montré que si $A \cap B = A$, alors $A \subseteq B$.

Exercice 2
Montrez les items (i) et (ii) de la Proposition.

Définition 4
*Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.*

Considérons un "grand" ensemble X. On peut vouloir regrouper les éléments de X en ensembles distincts et qui recouvrent entièrement X. Plus précisément, des ensembles forment une **partition** de X si (a) ils sont mutuellement disjoints, et si (b) leur union égale l'ensemble X. Cela signifie que, quand on a une partition de X, tout élément de X a sa place dans un et un seul membre de la partition.

Exemple 13
Les ensembles $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$ forment une partition de $\{1, 2, 3, 4\}$.
Les ensembles $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 4\}$ ne forment pas une partition de $\{1, 2, 3, 4\}$
Les ensembles $\{1\}$ et $\{3, 4\}$ ne forment pas une partition de $\{1, 2, 3, 4\}$
Les nombres pairs et les nombres impairs forment une partition de $\mathbb{N}$.

4.2 Relations et fonctions

4.2.1 Relations

Les relations sont évidemment très importantes pour nous puisque les préférences sont représentées par des relations (au sens mathématique). Dans le cas général, une relation (binaire) relie les membres d'un ensemble A aux membres d'un ensemble B. Bien sûr, il peut s'agir du même ensemble. C'est le cas avec les préférences, qui relient par exemple les options (de l'ensemble A) entre elles. Une relation peut se concevoir comme un ensemble de **couples** (binaires), c'est-à-dire de suites de deux éléments : l'ensemble des couples qui satisfont la relation.

Exemple 14
Supposons que l'on interprète la relation xRy comme signifiant "x a pour successeur comme Président de la Vème République y". Alors l'ensemble des couples qui satisfont la relation sont :

(de Gaulle, Pompidou)
(Pompidou, Giscard)
(Giscard, Mitterand)
(Mitterand, Chirac)
(Chirac, Sarkozy)
(Sarkozy, Hollande)

On remarquera qu'on a effectivement besoin de couples (et pas seulement d'ensembles à deux éléments) : il nous faut en effet faire la différence, par exemple, entre (de Gaulle, Pompidou) et (Pompidou, de Gaulle). Le premier couple satisfait la relation telle qu'interprétée dans l'Exemple, pas le second.

On note (x, y) le couple binaire constitué de x en première position et y en seconde. On note $A \times B$ le **produit cartésien** de deux ensembles A et B, qui est défini comme l'ensemble de tous les couples dont le premier élément est un élément de A et le second est un élément de B. Soit, formellement

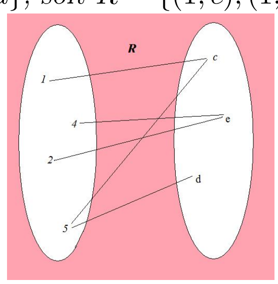
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemple 15
Soit $A = \{a\}$ et $B = \{1, 2\}$;
- $A \times B = \{(a, 1), (a, 2)\}$
- $B \times A = \{(1, a), (2, a)\}$

On est alors prêt à définir une relation (binaire) à la manière de la théorie des ensemble : une relation qui relie des éléments de A à des éléments de B est un sous-ensemble du produit cartésien de A et B. Autrement dit, $R \subseteq A \times B$. Si R est une relation sur $A \times B$, alors

- le fait que x et y sont reliés par R se note xRy
- le fait que x et y ne sont pas reliés par R se note $\neg(xRy)$.

Exemple 16
- *Pour $A = \{a\}$ et $B = \{1, 2\}$, on peut définir la relation $R = \{(a, 1)\}$*
- *Pour $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{c, e, d\}$, soit $R = \{(1, c), (1, d), (5, c), (5, d), (2, e), (4, e)\}$*



- *Pour $A = B = \mathbb{N}$, l'ordre usuel (strict) $>$ est une relation.*
- *Pour $A = B = \mathbb{N}$, on peut définir la relation $R = \{(x, y) : y$ est le successeur de $x\} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)...\}$*

Exercice 3
Soient les ensembles $A = \{b, c\}$ et $B = \{2, 3\}$

1. *Donnez les membres de l'ensemble $A \times B$.*
2. *Donnez les membres de l'ensemble $(A \cup B) \times B$.*
3. *Est-il vrai que $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$?*
4. *Est-il vrai que $(c, c) \subseteq A \times A$?*

Pour la théorie de la décision, il est vital de connaître quelques propriétés élémentaires des relations binaires. Dans ce qui suit, on considèrera une relation R sur $A \times A$.

Définition 5
Soit R une relation binaire sur $A \times A$.
- *R est* ***réflexive*** *ssi pour tout $x \in A$, xRx*
- *R est* ***irréflexive*** *ssi pour tout $x \in A$, $\neg(xRx)$*

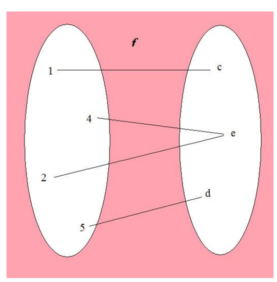
– *R est* ***symétrique*** *ssi pour tous $x, y \in A$, si xRy alors yRx*
– *R est* ***asymétrique*** *ssi pour tous $x, y \in A$ si xRy alors $\neg(yRx)$*
– *R est* ***antisymétrique*** *ssi pour tous $x, y \in A$ si xRy et yRx alors $x = y$*
– *R est* ***transitive*** *ssi pour tous $x, y, z \in A$ si $x \succ y$ et $y \succ z$ alors $x \succ z$,*
– *R est une* ***relation d'équivalence*** *si elle est réflexive, transitive et symétrique.*
– *R est* ***négativement transitive*** *ssi pour tous $x, y, z \in A$, si $\neg(x \succ y)$ et $\neg(y \succ z)$ alors $\neg(x \succ z))$*
– *R est* ***complète*** *ssi pour tous $x, y \in A$, xRy ou yRx.*

Exercice 4
Montrez que
– *une relation peut n'être ni réflexive ni irréflexive.*
– *une relation peut n'être ni symétrique ni asymétrique.*
– *si une relation est asymétrique, elle est irréflexive .*
– *si une relation est complète, elle est réflexive. Mais la réciproque n'est pas vraie.*

4.3 Fonctions

Les fonctions arithmétiques nous sont familières. Abstraitement, on peut les concevoir comme des manières d'associer des nombres à d'autres nombres. Autrement dit, comme des relations d'un genre particulier. La théorie des ensembles définit précisément les fonctions comme des relation qui satisfont la condition suivante.

Définition 6
Une relation f entre A et B est une ***fonction*** *ssi pour tout élément $x \in A$ il existe une et une seule paire dans f dont x est le premier élément. On la note alors $f : A \to B$.*



On dit que A est le **domaine** de f et B son **co-domaine**. Si $(a, b) \in f$, on dit que b est l'**image** de a par f, et aussi que b est la **valeur** de f pour l'**argument** a.
On note parfois $f(a) = b$ le fait que b est l'image de a par f.

Exemple 17
- *Pour $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$*
  $f_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$, $f_2 = \{(a, 2), (b, 4), (c, 3), (d, 1)\}$ sont des fonctions.
  $f_3 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 4), (c, 1), (d, 2)\}$ et $f_4 = \{(a, 3), (b, 2), (d, 1)\}$ ne sont pas des fonctions.
- *Pour $A = B = \{0, 1\}$, $neg = \{(0, 1), (1, 0)\}$ est une fonction.*
- *Pour $A = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$,*
  $disj = \{((1, 1), 1), ((1, 0), 1), ((0, 1), 1), ((0, 0), 0)\}$
  est une fonction.

- *La relation* $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, \quad y = 2x + 1\}$ *est une fonction* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Exercice 5
Supposons que A *soit un ensemble qui contient* n *éléments et* B *un ensemble qui en contient* m.

1. *Combien y a-t-il de fonctions de* A *vers* B *?*
2. *Combien y a-t-il de fonctions de* B *vers* A *?*