Cogmaster CO8

TD n° 1 - jean.baccelli@ens.fr

11 février 2014

Une relation binaire R dans un ensemble X est un sous-ensemble de son produit cartésien $X \times X$. On supposera ici $X = \{a, ..., z\}$ fini, et on l'appellera "l'ensemble d'options". On s'intéressera à une "relation de préférence" R dans X : $R \subseteq \{(a,a), (a,b), ..., (a,z), (b,a), (b,b), ..., (b,z), ..., (z,z)\}$.

Définition 1 complétude : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est complète si* $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$.

Définition 2 réflexivité : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est réflexive si* $\forall x \in X : xRx$.

Exercice 1 *Prouvez que la complétude implique la réflexivité. Montrez par l'exemple que la réflexivité n'implique pas la complétude - prenez* $X = \{x, y\}$.

Définition 3 transitivité : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est transitive si* $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow yRz$.

Exercice 2 *Montrez par l'exemple que la complétude et la transitivité sont logiquement indépendantes - prenez* $X = \{x, y, z\}$.

Définition 4 symétrie : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est symétrique si* $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$.

Définition 5 indifférence, 1 : *soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation réflexive de "préférence large". L'"indifférence", notée* $\sim$, *est le sous-ensemble symétrique de* $\succcurlyeq$: $\sim \subseteq \succcurlyeq$, $\sim = \{(x,y) \in X \times X \mid x \succcurlyeq y \wedge y \succcurlyeq x\}$.

Exercice 3 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète et transitive. Vérifiez que l'indifférence associée forme alors une relation d'équivalence - ie une relation symétrique, réflexive, transitive - et qu'elle n'est jamais vide.*

Définition 6 asymétrie : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est asymétrique si* $\forall x, y \in X\ : xRy \Rightarrow \neg yRx$.

Définition 7 préférence stricte : *soit* $\succcurlyeq\ \subseteq X \times X$ *une relation réflexive de "préférence large". La "préférence stricte", notée* $\succ$, *est le sous-ensemble asymétrique de* $\succcurlyeq\ : \succ\ \subseteq\ \succcurlyeq,\ \succ\ = \{(x, y) \in X \times X \mid x \succcurlyeq y \wedge \neg y \succcurlyeq x\}$.

Définition 8 irréflexivité : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est irréflexive si* $\forall x \in X\ : \neg xRx$.

Exercice 4 *Soit* $\succcurlyeq\ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète et transitive. Prouvez que la préférence stricte associée est irréflexive. Est-elle complète ? Prouvez au passage qu'une relation transitive et irréflexive est asymétrique.*

Définition 9 transitivité négative : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est négativement transitive si* $\forall x, y, z \in X\ : \neg xRy \wedge \neg yRz \Rightarrow \neg xRz$.

Exercice 5 *Soit* $\succcurlyeq\ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence réflexive. Prouvez que si* $\succcurlyeq$ *est transitive, la préférence stricte associée est transitive, et que si* $\succcurlyeq$ *est aussi complète, la préférence stricte associée est négativement transitive.*

Cogmaster CO8

TD n° 2 - jean.baccelli@ens.fr

18 février 2014

On change aujourd'hui, pour l'essentiel, de relation primitive : au lieu de partir d'une relation de "préférence large", on partira d'une relation de "préférence stricte" $\succ$, $\succ\ \subseteq X \times X$, qui par définition sera toujours asymétrique.

Exercice 1 *Soit* $\succ\ \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de préférence. Prouvez que si* $\succ$ *est négativement transitive, alors elle est aussi transitive. Montrez par l'exemple que l'asymétrie et la transitivité n'impliquent pas la transitivité négative - prenez* $X = \{w, x, y, z\}$

Exercice 2 *Montrez par l'exemple que l'asymétrie et la transitivité négative sont logiquement indépendantes - prenez* $X = \{x, y, z\}$.

DÉFINITION 1 INDIFFÉRENCE, 2 : *soit* $\succ\ \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de "préférence stricte". L'"indifférence", notée* $\sim$, *est le sous-ensemble d'incomplétude de* $\succ$ *dans* $X \times X$: $\sim\ = \{(x, y) \in X \times X \mid \neg x \succ y \wedge \neg y \succ x\}$.

Exercice 3 *Soit* $\succ\ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence asymétrique et négativement transitive. Vérifiez que l'indifférence associée est une relation d'équivalence, qui n'est pas vide. Comment interpréter cette indifférence, 2 ?*

DÉFINITION 2 PRÉFÉRENCE LARGE : *soit* $\succ\ \subseteq X \times X$ *une relation asymétrique de "préférence stricte". La "préférence large", notée* $\succcurlyeq$, *correspond au sous-ensemble de* $X \times X$ *défini ainsi :* $\succcurlyeq\ = \{(x, y) \in X \times X \mid x \succ y \vee x \sim y\}$.

Exercice 4 *Soit* $\succ\ \subseteq X \times X$ *une relation de préférence asymétrique. Prouvez que la relation de préférence large associée ne peut pas être incomplète - quelle propriété au juste avez-vous utilisée à cette fin ? Prouvez que si* $\succ$ *est asymétrique et négativement transitive, alors* $\succcurlyeq$ *est une relation transitive.*

Exercice 5 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation primitive de "préférence large" réflexive, et* $\sim_1$ *la relation d'indifférence associée à* $\succcurlyeq$ *suivant la définition 1. Soit* $\succ \subseteq X \times X$ *la relation de "préférence stricte" asymétrique associée à* $\succcurlyeq$*, et* $\sim_2$ *la relation d'indifférence qui est associée à* $\succ$ *suivant la définition 2. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète,* $\sim_1 \neq \sim_2$ *- prenez* $X = \{x, y\}$*. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète,* $\sim_2$ *peut être intransitive - prenez* $X = \{x, y, z\}$*. Prouvez par l'exemple que quand* $\succcurlyeq$ *n'est pas complète, même quand* $\sim_1$ *et* $\sim_2$ *sont toutes les deux transitives, il se peut que* $\sim_1 \neq \sim_2$ *- prenez* $X = \{w, x, y, z\}$*.*

Cogmaster CO8

TD n° 3 - jean.baccelli@ens.fr

25 février 2014

Exercice 1 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète,* $\succ$ *son sous-ensemble asymétrique,* $\sim$ *son sous-ensemble symétrique. Soit* $u : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité qui représente* $\succcurlyeq$ *de l'une des trois manières suivantes :*
i) $\forall x, y \in X : x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ *;*
ii) $\forall x, y \in X : x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$ *;*
ii) $\forall x, y \in X : x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$*.*
Montrez que (i) $\Leftrightarrow$ *(ii), que (i)* $\Rightarrow$ *(iii), mais que (iii)* $\not\Rightarrow$ *(i) - pour prouver ce dernier point, prenez* $X = \{w, x, y, z\}$ *et une relation de préférence* $\succcurlyeq$ *définie de la manière suivante :* $w \sim x$, $y \sim z$, $w \succ y$, $w \succ z$, $x \succ y$, $x \succ z$*.*

Définition 1 croissance stricte : *une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante si* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$*.*

Exercice 2 *Soit* X *un ensemble. Soit* $u_1 : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité, qui représente une relation de préférence* $\succcurlyeq_1 \subseteq X \times X$ *au sens i) de l'exercice 1. Soit* $u_2 : X \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité, qui représente une relation de préférence* $\succcurlyeq_2 \subseteq X \times X$ *au sens i) de l'exercice 1. Prouvez que s'il n'existe pas une fonction strictement croissante* φ *telle que* $u_2 = \varphi \circ u_1$*, alors* $\succcurlyeq_2 \neq \succcurlyeq_1$*.*

Définition 2 anti-symétrie : *une relation binaire* $R \subseteq X \times X$ *est anti-symétrique si* $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$*.*

Définition 3 ordre total : *on appelle ordre total une relation binaire qui est complète, transitive et anti-symétrique.*

Exercice 3 *Soit* X *un ensemble d'options. Soit* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *une relation de préférence complète et transitive,* $\succ$ *son sous-ensemble asymétrique,* $\sim$ *son sous-ensemble symétrique.* $\forall x \in X$*, soit* $I(x) = \{z \in X \mid x \sim z\}$*, l'ensemble d'indifférence de l'option* x *selon* $\succcurlyeq$*. Soit* $\mathbb{I} = \{I(x)\}$, $x \in X$*, l'ensemble des ensembles d'indifférence dans* X *selon* $\succcurlyeq$*. Prouvez que* $\mathbb{I}$ *forme une partition de* X *i.e. essentiellement que i)* $\forall x \in X$, $I(x) \neq \varnothing$ *et que ii)* $\forall x, y \in X$*, ou bien* $I(x) = I(y)$ *ou bien* $I(x) \cap I(y) = \varnothing$*. Puis, soit la relation de préférence annexe* $\succcurlyeq' \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ *définie de la manière suivante :* $\forall a, b \in \mathbb{I}$, $a \succcurlyeq' b \Leftrightarrow \exists x \in a, y \in b$ *tels que* $x \succcurlyeq y$*. Démontrez que* $\succcurlyeq'$ *est un ordre total.*

Exercice 4 *Soit* X *un ensemble fini d'options et* $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ *un ordre total.* $\forall x \in X$, *soit* $M(x) = \{z \in X \mid x \succ z\}$. *Prouvez que* $x \succ y \Leftrightarrow M(y) \subset M(x)$. *Vérifiez que par conséquent, la fonction* $u : X \to \mathbb{R}$, $\forall x \in X$ $u(x) = \#M(x)$, *est une fonction d'utilité qui représente* $\succcurlyeq$ *aux sens i) et ii) de l'exercice 1.*

Cogmaster CO8

TD n° 4 - jean.baccelli@ens.fr

4 mars 2014

Soit $X = \{x, ..., z\}$ un ensemble. Soit $\Delta(X) = \{p : X \to [0,1] \mid \sum_{x \in X} p(x) = 1\}$. $\Delta(X)$ sera appelé l'ensemble des options pour un décideur dans le risque. Chaque option $p \in \Delta(X)$ peut être décrite comme un vecteur de probabilité $(p_1, x_1 ; ... ; p_n, x_n) \in [0,1]^n \times X$, avec $\forall i \in \{1, ..., n\}, p_i \geq 0$ et $\sum_{i \in \{1,...,n\}} p_i = 1$. Un décideur se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque si ses préférences $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ permettent de définir une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ telle que $\forall p, q \in \Delta(X)$, avec $p = (p_1, x_1 ; ... ; p_n, x_n)$, $q = (q_1, y_1 ; ... ; q_n, y_n)$:

$$p \succcurlyeq q \;\; \Leftrightarrow \sum_{i \in \{1,...,n\}} p_i u(x_i) \;\; \geq \sum_{i \in \{1,...,n\}} q_i u(y_i). \tag{1}$$

Exercice 1 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$ *et un décideur dont on sait qu'il se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque, avec* $u(0) = 0$ *et* $u(100) = 100$. *Supposant que pour ce décideur* $(1, 60) \sim (\frac{7}{10}, 100 ; \frac{3}{10}, 0)$, *déterminez* $u(60)$. *Quelle serait alors sa préférence entre* $(\frac{7}{10}, 60 ; \frac{3}{10}, 0)$ *et* $(\frac{49}{100}, 100 ; \frac{51}{100}, 0)$ *?*

Exercice 2 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$, *et un décideur qui a les préférences :* $(\frac{90}{100}, 50 ; \frac{10}{100}, 0) \succ (\frac{45}{100}, 100 ; \frac{55}{100}, 0)$ *et* $(\frac{1}{100}, 100 ; \frac{99}{100}, 0) \succ (\frac{2}{100}, 50 ; \frac{98}{100}, 0)$. *Montrez algébriquement que ce décideur ne peut pas se conformer au modèle de l'utilité espérée dans le risque.*

Exercice 3 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$. *Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *:* $p = (\frac{9}{10}, 49 \,;\, \frac{1}{10}, 16)$, $q = (\frac{7}{10}, 81 \,;\, \frac{3}{10}, 16)$, $r = (\frac{9}{10}, 100 \,;\, \frac{1}{10}, 0)$ *et* $s = (\frac{1}{10}, 100 \,;\, \frac{9}{10}, 81)$. *Déterminez la préférence entre* p *et* q *d'une part, entre* r *et* s *d'autre part, pour un décideur qui se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque avec* $\forall x \in X$, *a/* $u(x) = x$, *b/* $u(x) = \frac{1}{2}x - 7$, *c/* $u(x) = \sqrt{x}$. *Commentez. Revenant à (1), précisez quelle moitié du théorème d'unicité attaché au théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern vous pouvez prouver algébriquement immédiatement, et quelle moitié resterait à prouver.*

Exercice 4 *Soit* $X = \{x, y, z\}$. *Dans ce cas, chaque* $p \in \Delta(X)$ *a la forme* $p = (p_x, x \,;\, p_y, y \,;\, p_z, z)$. *Montrez que* $\forall p \in \Delta(X)$, *vous pouvez exprimer* p_y *en fonction de* p_x *et* p_z *ie que chaque* p *est caractérisé par un couple* (p_x, p_z). *On peut alors représenter chaque* $p \in \Delta(X)$ *comme un point dans un "triangle de Marschak - Machina" : par exemple, on prendra un triangle rectangle isocèle avec* y *à l'angle droit,* x *au sommet nord,* z *au sommet est. Soit un décideur qui se conforme au modèle de l'utilité espérée dans le risque, dont on supposera aussi que* $\delta_x \succ \delta_y \succ \delta_z$ *[rappel :* $\delta_x \equiv (1, x \,;\, 0, y \,;\, 0, z)$*]. Montrez qu'alors, un ensemble d'indifférence du décideur apparaît comme une droite dans le triangle de Marschak - Machina, et que les différents ensemble d'indifférence du décideur apparaissent comme des droites parallèles. Pour cela, déterminez l'égalité caractéristique, dans le modèle de l'utilité espérée, d'un ensemble d'indifférence et tirez-en une expression, pour chaque ensemble d'indifférence* $I(p) = \{q \in \Delta(X) \mid p \sim q\}$, *de* q_x *en fonction de* q_z.

Cogmaster CO8

TD n° 5 & 6 - jean.baccelli@ens.fr

18 mars 2014

Étant donné X un ensemble de résultats, soit $\Delta(X)$ l'ensemble des options d'un décideur dans le risque. Étant donné $p, q \in \Delta(X)$, on notera ici $p\alpha q$ l'élément $r \in \Delta(X)$ tel que $r = \alpha p \oplus (1-\alpha)q$. Soit $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$. On rappellera ici les axiomes du théorème de von Neumann - Morgenstern :

VNM 1 $\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X})$ *:* $p \succcurlyeq q$ *ou* $q \succcurlyeq p$ *;*
$\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$ *:* $p \succcurlyeq q$ *et* $q \succcurlyeq r \Rightarrow p \succcurlyeq r$*.*

VNM 2 $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$ *tels que* $p \succ q$ *et* $q \succ r$ *:* $\exists \alpha, \beta \in]0,1[$ *tels que* $p\alpha r \succ q$ *et* $q \succ r\beta p$*.*

VNM 3 $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$*,* $\forall \alpha \in]0,1[$ *:* $p \succcurlyeq q \Leftrightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r$*.*

Exercice 1 *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3, alors elles respectent aussi les deux propriétés suivantes :*
i) $\forall p, q, r \in \Delta(\mathbb{X})$*,* $\forall \alpha, \beta \in]0,1[$ *:* $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\beta r \succcurlyeq q\beta r$ *;*
ii) $\forall p, q, r, s \in \Delta(\mathbb{X})$*,* $\forall \alpha \in]0,1[$ *:* $p\alpha r \succcurlyeq q\alpha r \Leftrightarrow p\alpha s \succcurlyeq q\alpha s$*.*
Soit $X = \{0, ..., 100\}$*. Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *tels que* $p = (\frac{90}{100}, 50\ ; \frac{10}{100}, 0)$*,* $q = (\frac{45}{100}, 100\ ; \frac{55}{100}, 0)$*,* $r = (\frac{2}{100}, 50\ ; \frac{98}{100}, 0)$*,* $s = (\frac{1}{100}, 100\ ; \frac{99}{100}, 0)$ *; montrez que les préférences* $p \succ q$*,* $s \succ r$ *sont incompatibles avec l'équivalence i). Soit* $p', q', r', s' \in \Delta(X)$ *tels que* $p' = (\frac{50}{100}, 20; \frac{50}{100}, 0)$*,* $q' = (\frac{10}{100}, 100; \frac{39}{100}, 20; \frac{51}{100}, 0)$*,* $r' = (\frac{11}{100}, 20\ ; \frac{89}{100}, 0)$*,* $s' = (\frac{10}{100}, 100\ ; \frac{90}{100}, 0)$ *; montrez que les préférences* $p' \succ q'$*,* $s' \succ r'$ *sont incompatibles avec l'équivalence ii).*

Exercice 2 *Soit* $X = \{0, ..., 100\}$*. Soit* $p, q, r, s \in \Delta(X)$ *les loteries* $p = (1, 75)$, $q = (\frac{80}{100}, 100\ ;\ \frac{20}{100}, 0)$, $r = (\frac{25}{100}, 75\ ;\ \frac{75}{100}, 0)$, $s = (\frac{20}{100}, 100\ ;\ \frac{80}{100}, 0)$*. Démontrez que les préférences* $p \succ q$, $r \prec s$ *ne respectent pas l'axiome VNM 3. Puis, soit* $p', q', r', s' \in \Delta(X)$ *les loteries* $p' = (1, 95)$, $q' = (\frac{33}{100}, 100; \frac{66}{100}, 95; \frac{1}{100}, 0)$, $r' = (\frac{34}{100}, 95\ ;\ \frac{66}{100}, 0)$, $s' = (\frac{33}{100}, 100\ ;\ \frac{67}{100}, 0)$*. Démontrez que les préférences* $p' \succ q'$, $s' \succ r'$ *ne respectent pas l'axiome VNM 3.*

Exercice 3 *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3 (et VNM 1), alors elles respectent aussi les deux propriétés suivantes :*

i) $\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in\ ]0, 1[\ : p \succcurlyeq q \Rightarrow p \succcurlyeq p\alpha q \succcurlyeq q$ *;*

ii) $\forall p, q, r, s \in \Delta(\mathbb{X})$, $\forall \alpha \in\ ]0, 1[\ : p \succcurlyeq q, r \succcurlyeq s \Rightarrow p\alpha r \succcurlyeq q\alpha s$*.*

Exercice 4 *Prouvez que si les préférences d'un décideur respectent VNM 3 (et VNM 1), alors elles respectent aussi la propriété suivante :*

$$\forall p, q \in \Delta(\mathbb{X}) \text{ tels que } p \succ q,\ \forall \alpha, \beta \in [0, 1] : \alpha > \beta \Leftrightarrow p\alpha q \succ p\beta q.$$

Pour le sens $\Rightarrow$*, considérez successivement les quatre cas possibles, à savoir : 1.1* $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *; 1.2,* $\alpha = 1$, $\beta > 0$ *; 2.1,* $\alpha < 1$, $\beta = 0$ *; 2.2* $\alpha < 1$, $\beta > 0$*. Pour le sens* $\Leftarrow$*, raisonnez par l'absurde en utilisant le sens* $\Rightarrow$ *déjà prouvé.*

Exercice 5 *Soit* $\Delta(X)$ *un ensemble d'options et* $\succcurlyeq\ \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence. Supposons qu'il existe une option* $\succcurlyeq$*-maximale, notée* p^**, et une option* $\succcurlyeq$*-minimale, notée* p_**. Supposons encore que* $p^* \succ p_*$*, ce qui constitue une hypothèse de non-trivialité. Supposons enfin que* $\forall p \in \Delta(X)$*, il existe* $\alpha_p \in [0, 1]$ *tel que* $p \sim p^* \alpha_p p_*$*. Vous aidant de l'exercice précédent, prouvez que si* $\succcurlyeq$ *respecte VNM 3 (et VNM 1), alors ce nombre* α_p *est unique.*

Exercice 6 *Soit* $\Delta(X)$ *un ensemble d'options et* $\succcurlyeq\ \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence qui respecte VNM 1 - VNM 3. Supposons à nouveau* *qu'il existe une option maximale* p^**, une option minimale* p_* *et que* $p^* \succ p_*$*. VNM 1 - VNM 3 impliquent notamment le lemme suivant :* $\forall p \in \Delta(X)$*,* $\exists! \alpha_p \in [0,1]$ *tel que* $p \sim p^* \alpha_p p_*$*. Par ailleurs, le théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern établit qu'une relation de préférence respecte VNM 1 - VNM 3 si et seulement s'il existe une fonction d'utilité* $u : X \to \mathbb{R}$ *qui la représente selon le modèle de l'utilité espérée, et l'on vérifie que tel est le cas si et seulement si il existe une fonction d'utilité* $v : \Delta(X) \to \mathbb{R}$ *qui représente la relation de préférence en respectant la propriété suivante :* $\forall p, q \in \Delta(X)$*,* $\forall \alpha \in [0,1]$*,* $v(\alpha p \oplus (1-\alpha)q) = \alpha v(p) + (1-\alpha)v(q)$*. Utilisant cette propriété et ce lemme, prouvez la moitié encore à prouver du théorème d'unicité lié au théorème de représentation de von Neumann - Morgenstern.*

Cogmaster CO8

TD n° 7 - jean.baccelli@ens.fr

1er avril 2014

Soit $X = [m, M] \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. X est un ensemble convexe, c'est-à-dire : $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$. Cette définition se généralise : $\forall(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i = 1$, $\forall x_1, ..., x_n \in X$, $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i x_i \in X$. L'ensemble des options sera toujours défini comme $\Delta(X)$. Pour chaque loterie p, on notera $EG(p)$ son espérance : $EG(p) = \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} p_i x_i$.

Définition 1 attitudes par rapport au risque : *les préférences d'un décideur manifestent de "l'aversion pour le risque" (respectivement : du "goût pour le risque", de la "neutralité par rapport au risque") si elles vérifient que* $\forall p \in \Delta(X)$, $EG(p) \succcurlyeq p$ *(respectivement :* $EG(p) \preccurlyeq p$, $EG(p) \sim p$*).*

Définition 2 équivalent certain : *un résultat* $x \in X$ *est un "équivalent certain" d'une loterie* $p \in \Delta(X)$ *pour un décideur s'il est le cas que* $x \sim p$*. Quand il en existera, on notera* $EC(p)$ *un équivalent certain d'une loterie* p*.*

Définition 3 prime de risque : *quand une loterie* $p \in \Delta(X)$ *a un équivalent certain unique pour un décideur, la "prime de risque"* $\Pi(p)$ *que ce décideur attache à cette loterie se définit de la manière suivante :* $\Pi(p) = EG(p) - EC(p)$*.*

Définition 4 croissance : *la préférence d'un décideur dans un ensemble numérique est dite "croissante" si elle vérifie que* $\forall x, y \in X$, $x > y \Rightarrow x \succ y$*.*

Exercice 1 *Soit* $\succcurlyeq \subseteq \Delta(X) \times \Delta(X)$ *une relation de préférence transitive, complète et croissante. Prouvez qu'alors, pour chaque loterie* $p \in \Delta(X)$*, s'il existe un équivalent certain* $EC(p) \in X$*, cet équivalent certain est unique. Puis supposez que pour chaque loterie* $p \in \Delta(X)$*, il existe bien un équivalent certain* $EC(p) \in X$*. Prouvez qu'alors, les préférences d'un décideur manifestent de l'aversion pour le risque (respectivement : du goût pour le risque, de la neutralité par rapport au risque) si et seulement si :* $\forall p \in \Delta(X)$*,* $\Pi(p) \geq 0$ *(respectivement :* $\Pi(p) \leq 0$*,* $\Pi(p) = 0$*).*

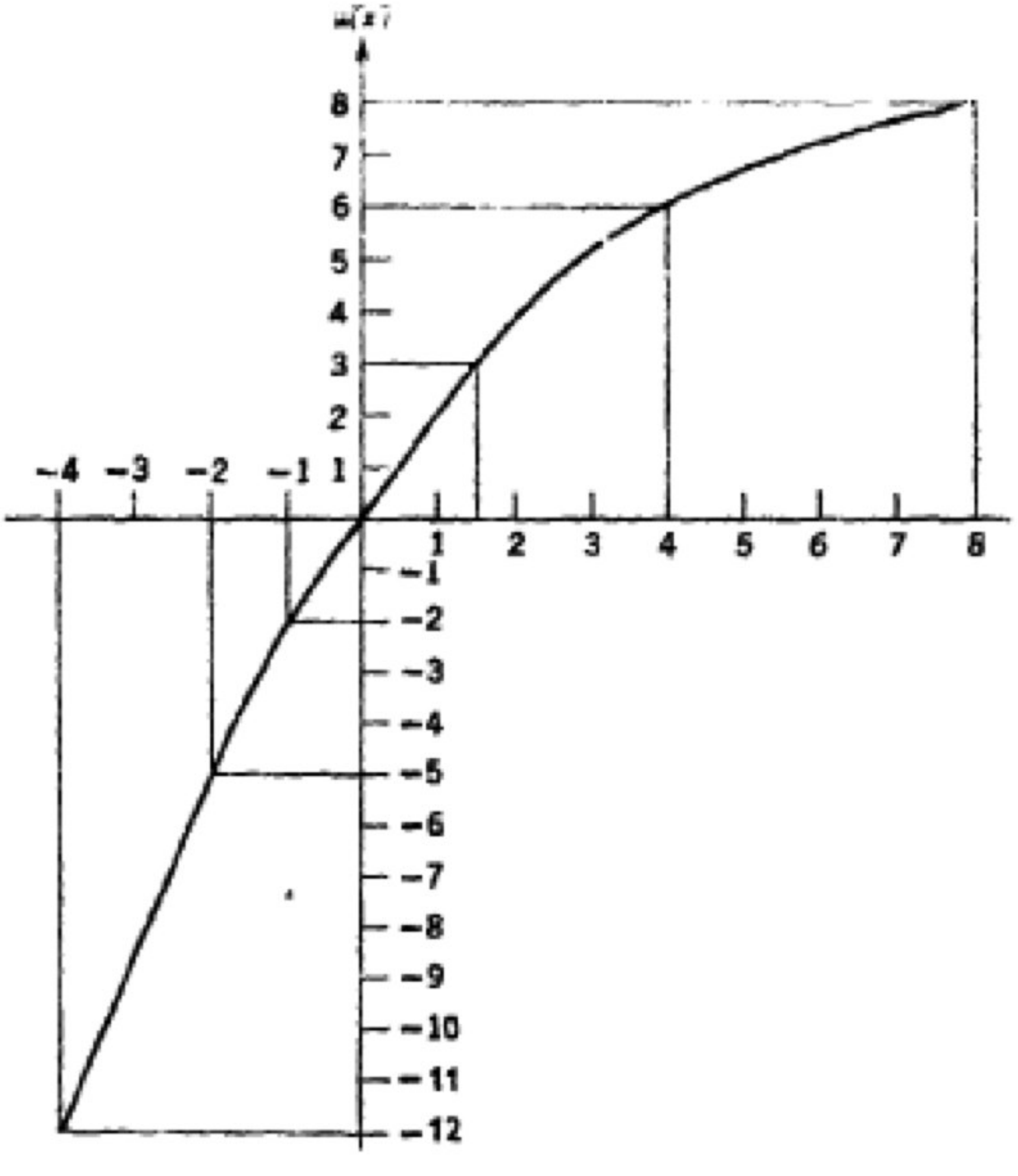
Étant donné X un ensemble convexe, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite concave (respectivement : convexe, linéaire) si elle vérifie que $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ (respectivement : $... \leq ...$, $... = ...$). Cette caractérisation se généralise (c'est "l'inégalité de Jensen") : une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite concave (respectivement : convexe, linéaire) si elle vérifie que $\forall (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i = 1$, $\forall x_1, ..., x_n \in X, f[\sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i x_i] \geq \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} \alpha_i [f(x_i)]$ (respectivement : $... \leq ...$, $... = ...$). Cette caractérisation justifie le théorème suivant. Dans le modèle de l'utilité espérée, les préférences d'un décideur manifestent de l'aversion pour le risque (respectivement : du goût pour le risque, de la neutralité par rapport au risque) si et seulement si elles sont représentées par une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ qui est concave (respectivement : convexe, linéaire). Quand les préférences d'un décideur se laisseront représenter par une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ suivant le modèle de l'utilité espérée, on notera $EU(p)$ l'espérance d'utilité de chaque loterie p : $EU(p) = \sum\limits_{i \in \{1,...,n\}} p_i u(x_i)$.

Exercice 2 *Soit* $X = [0, 100]$*. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 16; \frac{1}{2}, 4)$*. Soit* j, k, l *trois décideurs dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentées par les fonctions* $u_j(x) = x^{\frac{1}{2}}$*,* $u_k(x) = x$*,* $u_l(x) = x^2$*. Déterminez* $EG(p)$ *puis,* $\forall i \in \{j, k, l\}$*,* $EU_i(p)$*,* $EC_i(p)$*,* $\Pi_i(p)$*.*

Exercice 3 *Soit* $X = [0, 100]$. *Soit* p *et* j, k, l *comme dans l'exercice précédent, et soit* $q = (\frac{1}{4}, 25; \frac{1}{4}, 8; \frac{1}{4}, 7; \frac{1}{4}, 0)$. *Quelles seront les préférences de* j, k, l *entre* p *et* q *? Déterminez* $EG(q)$ *- comparez le résultat à* $EG(p)$ *et discutez.*

Exercice 4 *Interprétons désormais chaque résultat* $x \in X$ *comme un gain qui vient s'ajouter à un niveau de richesse préexistant du décideur* $w \in W$. *Dans ce cas, il faut relativiser à un niveau de richesse* w *tous les concepts précédents : dès lors, on parlera dorénavant de* $EU(w, p)$, $EC(w, p)$, $\Pi(w, p)$. *Soit* $X = [-6, 25]$, $W = [6, 25]$. *Soit la loterie* $p = (\frac{1}{2}, w + 6; \frac{1}{2}, w - 6)$. *Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = 6$, $w_2 = 10$, $w_3 = 19$. *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par la fonction* $u(w + x) = (w + x)^{\frac{1}{2}}$. *Déterminez* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*

Exercice 5 *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par une fonction dont le graphe est donné dans la figure ci-après. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 4; \frac{1}{2}, 0)$. *Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = -4$, $w_2 = 0$, $w_3 = 4$. *Déterminez grâce au graphe* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*

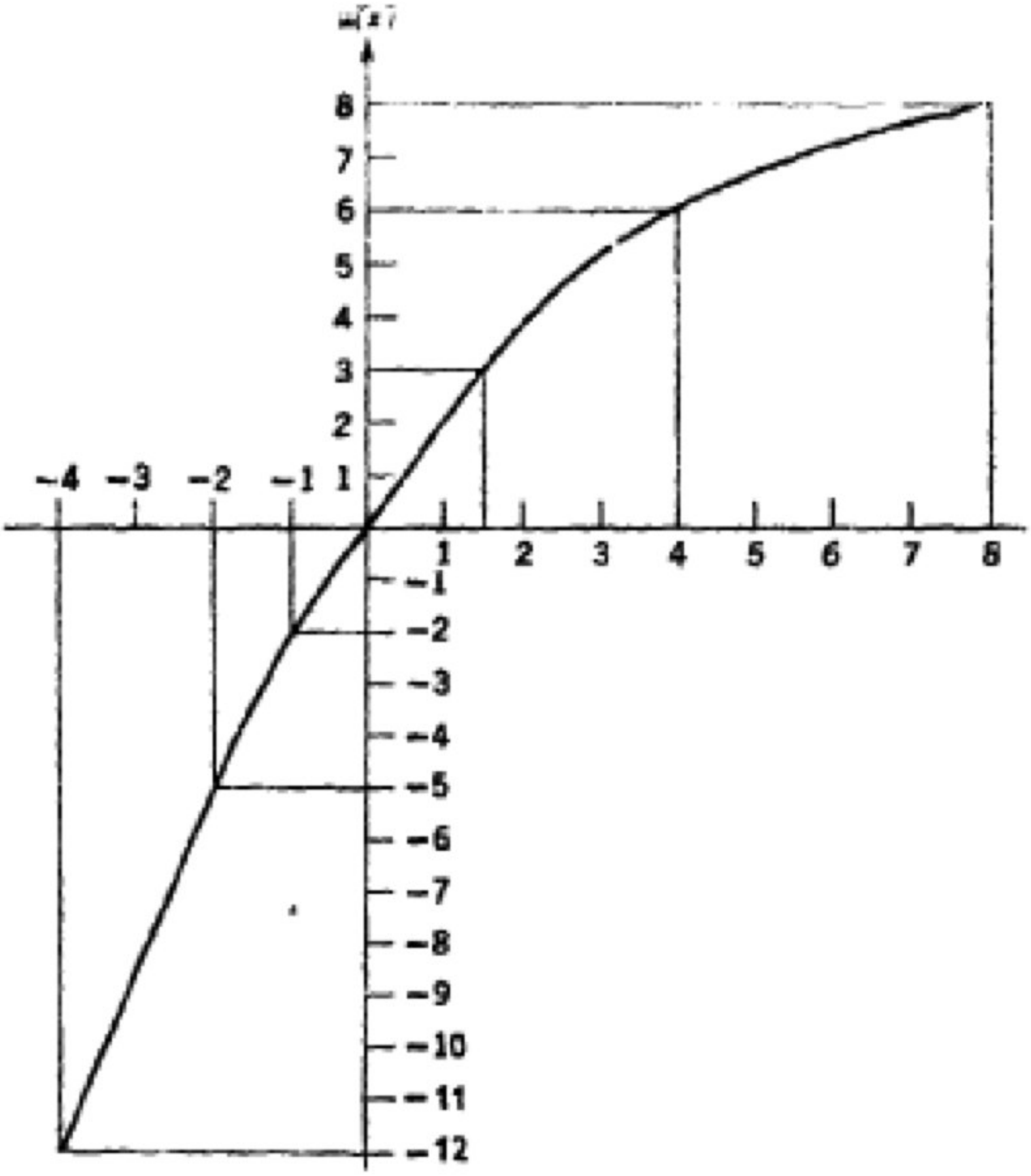

u(x)
8
7
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12

Cogmaster CO8

TD n° 8 - jean.baccelli@ens.fr

8 avril 2014

Exercice 1 *Soit un décideur dans le risque dont les préférences se conforment au modèle de l'utilité espérée en étant représentée par une fonction dont le graphe est donné dans la figure ci-après. Soit* $p = (\frac{1}{2}, 4; \frac{1}{2}, 0)$*. Soit les trois niveaux de richesse suivants :* $w_1 = -4$, $w_2 = 0$, $w_3 = 4$*. Déterminez grâce au graphe* $\Pi(w_i, p)$ *pour* $i \in \{1, 2, 3\}$*. Discutez l'évolution de l'attitude par rapport au risque du décideur en fonction de l'accroissement de sa richesse.*


u(x)
8
7
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12

Soit $X = \{x, ..., z\}$ un ensemble de résultats, actions ou conséquences. Soit $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., T\}$ un ensemble de périodes ou de points temporels. Soit $\succcurlyeq$ une relation de préférence dans un ensemble d'options de la forme $(x_0, ..., x_t, ..., x_T)$, la t-ième place dans la série correspondant à la période t. Les deux modèles les plus discutés dans la théorie du choix intertemporel sont le modèle dit de l'"actualisation exponentielle" (représentation (1)) et le modèle dit de l'"actualisation quasi-hyperbolique" (représentation (2)).

$$V_0(x_0, ..., x_T) = u(x_0) + \sum_{t=1}^{t=T} \delta^t.u(x_t), \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{1}$$

$$V_0(x_0, ..., x_T) = u(x_0) + \beta[\sum_{t=1}^{t=T} \delta^t.u(x_t)], \qquad \delta, \beta \in [0, 1]. \tag{2}$$

Exercice 2 *Soit i et j deux agents face à la même décision : ils doivent décider si c'est le lendemain, ou le surlendemain, ... , qu'ils feront du sport. Ils éprouvent le même "coût" immédiat à faire du sport, u(sport)=* -4*, et le même "bénéfice" décalé à en avoir fait la veille, u(sport à* $t-1$*)=* $+10$*. En outre, l'inaction n'induit pour eux ni coût immédiat, ni bénéfice décalé - on fixera u(inaction)=* 0*. L'agent i se conforme au modèle (1) avec* $\delta = \frac{3}{5}$*. L'agent j se conforme au modèle (2) avec* $\delta = \frac{3}{5} = \beta$*. Suivant ces données, i et j prévoiront-ils de faire du sport le lendemain, ou le surlendemain ? Et une fois le jour venu, qu'est-ce que i et j choisiront de faire ? Commentez.*

Exercice 3 *Soit i, j et k trois cueilleurs nomades face à la même décision. À deux reprises, ils ont le choix entre cueillir les fruits disponibles autour d'eux ou bien marcher jusqu'à un autre endroit où les fruits sont meilleurs. S'ils restent à l'endroit initial, ils pourront cueillir des pommes. S'ils marchent sur les deux périodes jusqu'à l'endroit le plus lointain, ils pourront cueillir des mangues. S'ils marchent à la première période et se reposent à la seconde, ils pourront cueillir des poires. En revanche, s'ils se reposent à la première période et marchent à la seconde, ils pourront cueillir des oranges.*

Dans tous les cas, ils dégusteront leurs fruits dans une troisième période, à la fin du jour. Les trois cueilleurs éprouvent le même coût immédiat à la marche, u(marche)= -10. *En outre, ils ont les mêmes goûts en matière de fruit : u(mangue)=* 30, *u(poire)=* 16, *u(orange)=* 8, *u(pomme)=* -14. *L'agent* i *se conforme au modèle* (1) *avec* $\delta = 1$. *Les agents* j *et* k *se conforment au modèle* (2) *avec* $\delta = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$. *Mais alors que* j *est "naïf", k est "lucide" au sens (stipulatif) suivant : en se décidant ex ante, il ne considère que les plans d'action dont il anticipe qu'il pourra bien les suivre. Quels fruits* i, j *et* k *mangeront-ils à la fin de leur journée ? Commentez.*

Exercice 4 *Soit* i, j *et* k *trois cueilleurs sédentaires face à la même décision. Sur quatre périodes, ils ont le choix entre cueillir les fruits sur les arbres autour d'eux, ou les laisser mûrir encore pour qu'ils deviennent meilleurs. Dans tous les cas, ils dégusteront leurs fruits quand ils les auront cueillis. L'acte de cueillir n'a pour aucun d'entre eux une utilité négative ou positive. Les cueilleurs ont les mêmes goûts en matière de fruits (dénotant par "*" les degrés de maturité) :* $u(*) = 3$, $u(**) = 5$, $u(***) = 8$, $u(****) = 13$. *Les décideurs sont les mêmes que ceux de l'exercice précédent. Combien mûrs seront les fruits qu'i,* j *et* k *mangeront à la fin de leur journée ? Commentez.*

Cogmaster CO8

TD n° 9 - jean.baccelli@ens.fr

29 avril 2014

Définition 1 dominance stricte *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n \; ; \; u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu sous forme stratégique. Pour le joueur* i, *une stratégie* $s_i \in S_i$ *est strictement dominée dans le jeu* G *par une stratégie* $t_i \in S_i$, *ce que l'on notera* $s_i \prec_i t_i$, *si* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})$. *On dit d'un jeu* G *qu'il est résoluble par la dominance stricte si (sous connaissance commune du jeu et de la rationalité des joueurs) on peut par élimination itérative des stratégies strictement dominées parvenir à un jeu réduit* G^ω *dans lequel chaque joueur i est indifférent entre chacune de ses stratégies* $s_i^\omega \in S_i^\omega$ *qu'il a dans ce jeu réduit - le cas d'un profil de stratégies* $s^* \in S$ *unique étant un cas particulier.*

Exercice 1 *Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte. Pour justifier épistémiquement vos réponses, vous a-t-il été nécessaire de faire référence à la connaissance commune du jeu et de la rationalité des joueurs ?*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$2, 1$	$4, 2$
	B	$1, 1$	$0, 3$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$1, 1$	$1, 0$
	B	$2, 3$	$4, 2$

Exercice 2 *Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte.*

		Joueur 2		
		X	Y	Z
	A	$7, 0$	$0, 5$	$0, 3$
Joueur 1	B	$5, 0$	$2, 2$	$5, 0$
	C	$0, 7$	$0, 5$	$7, 3$

				Joueur 2		
		V	W	X	Y	Z
	A	$4, -1$	$3, 0$	$-3, 1$	$-1, 4$	$-2, 0$
	B	$-1, 1$	$2, 2$	$2, 3$	$-1, 0$	$2, 5$
Joueur 1	C	$2, 1$	$-1, -1$	$0, 4$	$4, -1$	$0, 2$
	D	$1, 6$	$-3, 0$	$-1, 4$	$1, 1$	$-1, 4$
	E	$0, 0$	$1, 4$	$-3, 1$	$-2, 3$	$-1, -1$

Exercice 3 *Résolvez les deux jeux suivants par la dominance stricte.*

Joueur 2

		X	Y	Z
	A	$1, 1$	$3, 0$	$1, 1$
Joueur 1	B	$0, -2$	$1, 3$	$0, 4$
	C	$-1, 4$	$4, 5$	$0, 6$

Joueur 2

		W	X	Y	Z
	A	$2, 0$	$2, 0$	$2, 0$	$2, 0$
Joueur 1	B	$4, 2$	$4, 3$	$3, 0$	$3, 0$
	C	$1, 1$	$5, 2$	$1, 1$	$5, 1$
	D	$1, 1$	$5, 2$	$1, 1$	$5, 1$

Exercice 4 *Soit* $G = \langle S_i, S_j\ ;\ u_i, u_j \rangle$ *le jeu caractérisé de la manière suivante. Les joueurs* i *et* j *sélectionnent simultanément une date pour se rencontrer, avec* $S_i = S_j = \{1, 2, 3, 4\}$*. Les utilités du jeu sont les suivantes :*

$$u_i(s_i, s_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 - (s_i - s_j)^2 & \textit{si } s_i < s_j \\ -(s_i - s_j)^2 & \textit{si } s_i \geq s_j \end{array} \right. ,\ u_j(s_i, s_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 - (s_i - s_j)^2 & \textit{si } s_j < s_i \\ -(s_i - s_j)^2 & \textit{si } s_j \geq s_i \end{array} \right. .$$

Présentez G *sous la forme sous laquelle les jeux précédents ont été présentés. Résolvez* G *par la dominance stricte.*

Définition 2 dominance faible *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n\ ;\ u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu sous forme stratégique. Pour le joueur* i*, une stratégie* $s_i \in S_i$ *est faiblement dominée dans le jeu* G *par une stratégie* $t_i \in S_i$*, ce que l'on notera* $s_i \preccurlyeq_i t_i$*, si* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i})$ *et* $\exists t_{-i} \in S_{-i}$ *telle que* $u_i(s_i, t_{-i}) < u_i(t_i, t_{-i})$.

Définition 3 équilibre de nash *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n\ ;\ u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu sous forme stratégique. Un profil de stratégies* $s^* \in S$ *est un équilibre de Nash (désormais EN) si* $\forall i \in N$, $\forall t_i \in S_i$, $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(t_i, s_{-i}^*)$.

Exercice 5 *Essayez de résoudre les deux jeux suivants par la dominance stricte. Par ailleurs, s'ils existent, identifiez-en les EN. Sur la base de vos réponses, des exercices précédents et des définitions, précisez si, quand il existe un EN pour un jeu G : 1/ l'EN peut être constitué de stratégies strictement dominées ; 2/ l'EN peut être constitué de stratégies faiblement dominées ; 3/ l'EN doit correspondre à la solution de G par la dominance stricte.*

		Joueur 2		
		X	Y	Z
	A	$2,1$	$0,4$	$4,0$
Joueur 1	B	$0,1$	$1,0$	$1,4$
	C	$1,1$	$3,1$	$2,0$

		Joueur 2		
		X	Y	Z
	A	$1,1$	$0,1$	$0,0$
Joueur 1	B	$1,0$	$2,1$	$1,2$
	C	$0,0$	$1,1$	$2,0$

Cogmaster CO8

TD n° 10 - jean.baccelli@ens.fr

6 mai 2014

Exercice 1 *Déterminez les EN (équilibres de Nash, toujours implicitement en "stratégies pures" pour la séance d'aujourd'hui) des trois jeux suivants.*

Joueur 2

		Y	Z
Joueur 1	A	$2,0$	$0,8$
	B	$3,3$	$2,2$

Joueur 2

		Y	Z
Joueur 1	A	$3,5$	$0,4$
	B	$1,0$	$5,6$

Joueur 2

		X	Y	Z
	A	$0,2$	$2,2$	$2,3$
Joueur 1	B	$4,4$	$3,3$	$1,2$
	C	$3,2$	$1,3$	$0,2$

Exercice 2 *Soit* $G = \langle S_i, S_j \; ; \; u_i, u_j \rangle$ *le jeu caractérisé de la manière suivante. Deux voyageurs ont perdu un même objet lors d'un déplacement et doivent en déclarer le prix à leur assurance. On prendra* $S_i = S_j = \{2, 3, 4, 5\}$. *Leur compagnie d'assurance a mis en place ce mécanisme d'indemnisation :*

$$u_i(s_i, s_j) = \begin{cases} s_i & si\ s_i = s_j \\ s_j - 2 & si\ s_j < s_i \\ s_i + 2 & si\ s_i < s_j \end{cases} \quad , \quad u_j(s_i, s_j) = \begin{cases} s_j & si\ s_j = s_i \\ s_i - 2 & si\ s_i < s_j \\ s_j + 2 & si\ s_j < s_i \end{cases}$$

. Présentez G sous la forme sous laquelle les jeux précédents ont été présentés. Déterminez-en l'EN, s'il existe. Discutez.

Définition 1 correspondance de meilleure réponse *La “correspondance individuelle de meilleure réponse” du joueur i aux stratégies des joueurs* $j \neq i$, $R_i : S_{-i} \to S_i$, *est définie de la manière suivante :* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$, $R_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid \forall t_i \in S_i, u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(t_i, s_{-i})\}$. *La “correspondance jointe de meilleure réponse”,* $R : S \to S$, *est définie de la manière suivante :* $\forall s \in S$, $R(s) = \prod_{i \in N} R_i(s_{-i})$. *Il suit de la définition d'un équilibre de Nash que* $s^* \in S$ *est un EN pour un jeu* G *si et seulement si* s^* *est un point fixe de la correspondance jointe de meilleure réponse, c'est-à-dire si* $s^* \in R(s^*)$. *Il suit également de ces caractérisations que quand on peut tracer un graphe pour les correspondances individuelles de meilleure réponse, l'ensemble des EN s'identifie à l'ensemble des intersections entre ces graphes individuels.*

Exercice 3 *Soit* $G_1 = \langle S_1, S_2\ ;\ u_1, u_2\rangle$ *le jeu caractérisé par* $S_1 = S_2 = [0,1]$, $u_1(s_1, s_2) = s_1(1-2s_2)$ *et* $u_2(s_1, s_2) = s_2(2s_1-1)$. *Soit* $G_2 = \langle S_1, S_2\ ;\ u_1, u_2\rangle$ *le jeu caractérisé par* $S_1 = S_2 = [0,1]$, $u_1(s_1, s_2) = s_1(2-3s_2)$ *ainsi que* $u_2(s_1, s_2) = s_2(4s_1-3)$. *Dans chaque cas : 1/ définissez les correspondances individuelles de meilleure réponse 2/ tracez les graphes de ces correspondances individuelles 3/ relevez, le cas échéant, les intersections des graphes.*

Exercice 4 *Les deux jeux suivants ont-ils des EN ?*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,2$	$1,5$
	B	$2,3$	$3,1$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,-3$	$0,0$
	B	$-1,1$	$2,-2$

Cogmaster CO8

TD n° 11 - jean.baccelli@ens.fr

13 mai 2014

Définition 1 extension mixte *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n \,;\, u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu sous forme stratégique avec* S_i *fini,* $\forall i \in N$*. On définira ici l'"extension mixte"* G^m *de* G*,* $G^m = \langle \Delta_1, ..., \Delta_n \,;\, v_1, ..., v_n \rangle$*, de la manière suivante :* $\forall i \in N$*,* $\Delta_i = \Delta(S_i)$ *et* $\forall \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Delta = \prod_{j \in N} \Delta_j$*,* $v_i(\sigma) = \sum_{s \in S} [\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j)] u_i(s)$*.*

Exercice 1 *Considérez l'extension mixte des trois jeux suivants. Quand cela vous sera possible, procédez à l'élimination itérative des stratégies pures strictement dominées par des stratégies pures ou par des stratégies mixtes.*

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	$1,1$	$0,4$	$2,2$
	B	$2,4$	$2,1$	$1,2$
	C	$1,0$	$0,1$	$0,2$

		Joueur 2			
		W	X	Y	Z
Joueur 1	A	$3,1$	$1,0$	$0,2$	$1,1$
	B	$1,0$	$0,10$	$1,0$	$0,10$
	C	$2,1$	$1,0$	$0,0$	$0,0$
	D	$0,0$	$\frac{1}{2},0$	$3,1$	$0,0$

		Joueur 2		
		X	Y	Z
Joueur 1	A	$2,1$	$4,\frac{1}{2}$	$0,0$
	B	$\frac{1}{2},0$	$1,1$	$\frac{1}{2},0$
	C	$0,0$	$0,\frac{1}{2}$	$1,2$

Exercice 2 *Les jeux suivants possèdent-ils des EN en stratégies pures ? Considérez-en les extensions mixtes. Grâce à une matrice auxiliaire de probabilités jointes, identifiez les EN en stratégies mixtes de ces jeux en 1/ définissant les correspondances individuelles de meilleure réponse 2/ traçant les graphes des correspondances individuelles 3/ relevant les intersections des graphes.*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$0,0$	$6,1$
	B	$1,6$	$3,3$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,2$	$1,5$
	B	$2,3$	$3,1$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$3,-3$	$0,0$
	B	$-1,1$	$2,-2$

PROPOSITION 1 CARACTÉRISATION FONDAMENTALE *Soit* $G = \langle S_1, ..., S_n \ ; \ u_1, ..., u_n \rangle$ *un jeu fini et* $G^m \langle \Delta_1, ..., \Delta_n \ ; \ v_1, ..., v_n \rangle$ *son extension mixte. Un profil de stratégies mixtes* σ^* *est un EN pour* G^m *si et seulement si* $\forall i \in N, \forall s_i, t_i, r_i \in S_i$ *:*
i) $\sigma_i^*(s_i) > 0, \ \sigma_i^*(t_i) > 0 \Rightarrow v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(t_i, \sigma_{-i}^*)$,
ii) $\sigma_i^*(s_i) > 0, \ \sigma_i^*(r_i) = 0 \Rightarrow v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(r_i, \sigma_{-i}^*)$.

Exercice 3 *Utilisant la caractérisation fondamentale, déterminez les EN en stratégies mixtes des trois jeux suivants. Dans le dernier cas, vérifiez votre résultat en utilisant plus patiemment la méthode utilisée dans l'exercice 2. Comparez. Qu'est-ce qui distingue ce troisième jeu des deux précédents ?*

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$2, -2$	$0, 0$
	B	$-6, 6$	$4, -4$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$1, 2$	$3, 1$
	B	$2, 1$	$1, 3$

		Joueur 2	
		Y	Z
Joueur 1	A	$1, 1$	$0, 1$
	B	$0, 2$	$1, 3$

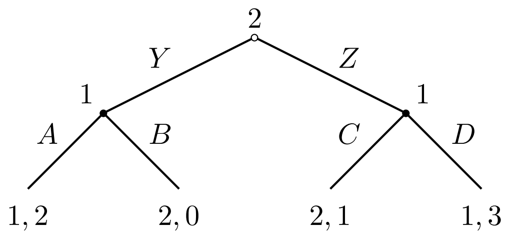
Cogmaster CO8

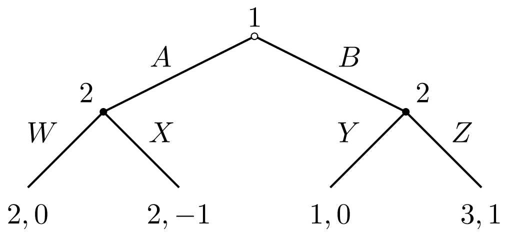
TD n° 12 - jean.baccelli@ens.fr

20 mai 2014

Exercice 1 *Deux armées veulent prendre possession d'une île, à laquelle chacune peut accéder par un pont qui lui est propre. L'une des armées prend l'initiative, franchit le pont qui lui est propre, et occupe l'île. L'autre armée hésite à faire de même pour tenter de prendre l'île. En cas d'attaque, l'armée déjà en place hésiterait entre combattre ou battre en retraite par le pont déjà franchi. Chaque armée préfère occuper l'île à la laisser à l'armée adverse, mais l'affrontement est pour chacune la pire des éventualités. Modélisez la situation comme un jeu sous forme extensive. Trouvez d'éventuels EN du jeu sous forme stratégique associé. Trouvez d'éventuels EN parfaits en sous-jeux du jeu sous forme extensive. Discutez ce qui se passerait si préalablement à l'interaction décrite, l'armée ayant pris possession de l'île avait l'opportunité de brûler le pont pouvant éventuellement lui permettre de battre en retraite.*

Exercice 2 *Associez un jeu sous forme stratégique à chacun des jeux sous forme extensive suivants. Trouvez d'éventuels EN de ces jeux associés. Comparez à d'éventuels EN parfaits en sous-jeux des jeux sous forme extensive.*



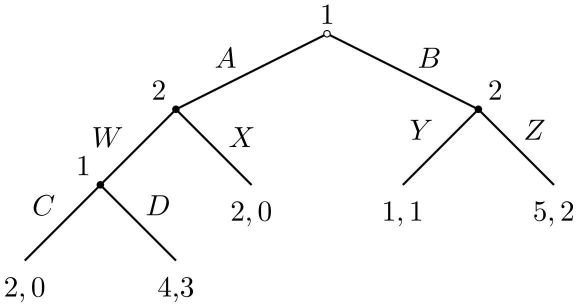


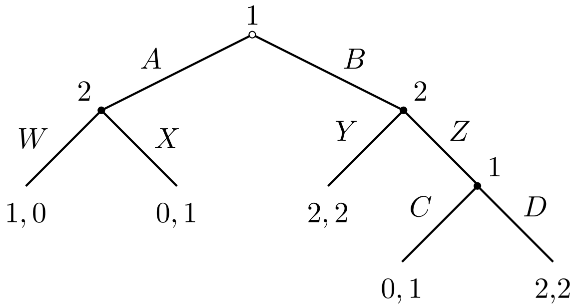
Exercice 3 *Associez un jeu sous forme extensive à chacun des jeux sous forme stratégique suivants : dans le premier cas, faîtes du joueur 1 le meneur, dans le second cas, faîtes du joueur 2 le meneur. Trouvez d'éventuels EN parfaits en sous-jeux de ces jeux associés. Comparez à d'éventuels EN des jeux sous forme stratégique.*

		Joueur 2	
		Y	*Z*
Joueur 1	*A*	3,5	0,4
	B	1,0	5,6

		Joueur 2	
		Y	*Z*
Joueur 1	*A*	3,2	1,5
	B	2,3	3,1

Exercice 4 *Associez un jeu sous forme stratégique à chacun des jeux sous forme extensive suivants. Trouvez d'éventuels EN de ces jeux associés. Comparez à d'éventuels EN parfaits en sous-jeux des jeux sous forme extensive.*




1
A
B
2
2
W
X
Y
Z
1
1, 0
0, 1
2, 2
C
D
0, 1
2,2