1 Introduction

• Rappel : on parle de choix incertain lorsqu'un agent ne sait pas exactement quelles conséquences auront ses actions. Le choix risqué, que nous avons vu lors des deux dernières séances, correspond au cas particulier où le décideur connaît les probabilités qu'ont les actions d'engendrer les conséquences. Il nous reste maintenant à envisager le cas plus général où de telles informations probabilistes ne sont pas disponibles - manifestement le cas qui correspond à la plupart de nos décisions quotidiennes.

• Le modèle de référence pour le choix incertain est le **modèle d'espérance subjective d'utilité** (MESU). S'il est question d'espérance, c'est, vous l'aurez deviné, que des probabilités sont ré-introduites d'une manière ou d'une autre. On appelle ces probabilités des **probabilités subjectives**. Elles sont subjectives en un double sens :

1/ elles représentent des états mentaux, les degrés de croyances d'un agent.

On appelle souvent **bayésianisme** la thèse selon laquelle les degrés de croyances d'un agent rationnel sont représentables par des probabilités. Cela signifie par exemple que si P et Q sont des propositions incompatibles, le degré de croyance de Paul dans $P \vee Q$ est la somme de son degré de croyance dans P et de son degré de croyance dans Q (additivité)

2/ elles peuvent varier d'un individu à l'autre

2 Le modèle d'espérance subjective d'utilité

2.1 Le cadre savagien

• Le cadre général du modèle d'espérance subjective d'utilité est le suivant :

(i) ontologie :

▷ un ensemble d'**états de la nature** S : un état de la nature (ou monde possible chez les philosophes) est une manière dont les choses pourraient se passer. Par hypothèse, l'état de la nature *actuel* est la manière dont les choses se passent en réalité.

Exemple 1
un facteur : l'oeuf est pourri p. *2 états de la nature possible :* $s_1 = p$, $s_2 = \neg p$

p	s_1
$\neg p$	s_2

deux facteurs : il fait beau p, *il faut chaud* q. *4 états de la nature possibles :* $s_1 = pq$, $s_2 = p\neg q$, $s_3 = \neg pq$, $s_4 = \neg p \neg q$.

	q	$\neg q$
p	s_1	s_2
$\neg p$	s_3	s_4

▷ un ensemble de **conséquences** C : l'interprétation ne change pas par rapport aux modèles précédents.

▷ un ensemble d'actions **réalisables** F : une action (ou un acte dit-on parfois) est une fonction des états de la nature vers les conséquences $f : S \rightarrow C$. Autrement dit, chaque action f a une conséquence déterminée c étant donné un état de la nature s

Exemple 2 (l'omelette de Savage)
5 oeufs déjà dans le plat à omelette ; reste un oeuf dont on ne sait pas s'il est pourri ou pas.

	s_1 = *bon*	s_2 = *pourri*
f_1 = *dans le plat*	*une omelette à six oeufs*	*pas d'omelette, 5 oeufs gâchés*
f_2 = *dans un bol*	*une omelette à six oeufs, un bol à laver*	*une omelette à 5 oeufs, un bol à*
f_3 = *à la poubelle*	*une omelette à 5 oeufs, un oeuf gâché*	*une omelette à 5 oeufs*

(ii) déterminants subjectifs :

▷ une **fonction de probabilité** P sur S (les croyances partielles de l'agent)

Exemple 3
un facteur : Paul estime aussi probable s_1 *et* s_2 : $P(s_1) = P(s_2) = 1/2$

p	*1/2*
$\neg p$	*1/2*

deux facteurs : Paul pense qu'il est impossible qu'il fasse beau et qu'il est peu probable qu'il fasse chaud : $P(s_1 = pq) = 0$, $P(s_2 = p\neg q) = 0$, $P(s_3 = \neg pq) = 1/3$, $P(s_4 = \neg p\neg q) = 2/3$.

	q	$\neg q$
p	*0*	*0*
$\neg p$	*1/3*	*2/3*

▷ une **fonction d'utilité** u sur C (les désirs de l'agent)

• Dans le cadre savagien, l'omelette de Savage constitue un exemple de **situation de choix** ou de problème de décision ; de manière plus générale :

	s_1	s_2	...	s_m
f_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}
f_2	c_{21}	c_{21}	...	c_{2m}
...	...	...	...	....
f_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}

• La règle de décision du MEUS est analogue à celle du MEU : choisir l'action f dont l'espérance subjective d'utilité est maximale :

$$\boxed{ESU(f_i) = P(s_1) \times u(c_{i1}) + ... + P(s_m) \times u(c_{im}) = \sum_j P(s_j) \times u(c_{ij})}$$

Exemple 4 (vin ou poisson ?)

	poisson *1/4*	*viande* *3/4*
vin rouge (VR)	*0*	*4*
vin blanc (VB)	*4*	*2*

$ESU(VR) = (1/4 \times 0) + (3/4 \times 4) = 3$
$ESU(VB) = (1/4 \times 4) + (3/4 \times 2) = 5/2$

2.2 Probabilités

• Pour présenter les éléments fondamentaux du modèle savagien, nous avons réduit au minimum l'exposition des probabilités. On a fait comme si les probabilités (les degrés de croyances ici) ne portaient que sur les états de la nature. Mais l'agent entretient également des croyances sur d'autres **événements** = ensemble d'états de la nature $E \subseteq S$.

Exemple 5
$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$; $P(s_1 = pq) = 0$, $P(s_2 = p\neg q) = 0$, $P(s_3 = \neg pq) = 1/3$, $P(s_4 = \neg p\neg q) = 2/3$.

	q	$\neg q$
p	*0*	*0*
$\neg p$	*1/3*	*2/3*

▷ *Paul pense qu'il est impossible qu'il fasse beau :* $P(\{s_1, s_2\}) = 0$
▷ *Paul pense qu'il est improbable qu'il fasse chaud :* $P(\{s_1, s_3\}) < 1/2$
▷ *Paul pense qu'il est impossible qu'il fasse beau* **et** *chaud :* $P(\{s_1, s_2\} \cap \{s_1, s_3\}) = P(s_1) = 0$

- ▷ *Paul pense qu'il est improbable qu'il fasse beau* ***ou*** *chaud :* $P(\{s_1, s_2\} \cup \{s_1, s_3\}) = P(\{s_1, s_2, s_3\}) < 1/2$
- ▷ *Paul pense qu'il est probable qu'il* ***ne*** *fasse* ***pas*** *chaud :* $P(\{s_1, s_3\}^c) = P(\{s_2, s_4\}) > 1/2$
- ▷ *Paul pense qu'il est impossible qu'il fasse ni beau ni pas beau :* $P(\{s_1, s_2\}^c \cap (\{s_1, s_2\}^c)^c) = P(\emptyset) = 0$
- ▷ *Paul est certain qu'il fait beau ou pas beau :* $P(\{s_1, s_2\} \cup \{s_1, s_2\}^c) = P(S) = 1$

Plusieurs points à noter :

- correspondance entre les *connecteurs logiques* ("et", "ou", "ne..pas...") qui servent à exprimer des croyances dont les contenus sont logiquement complexes et les *opérateurs ensemblistes* (union, intersection, complémentation)

- tous les énoncés probabilistes se laissent déduire des données initiales et des propriétés du **calcul des probabilités** :

ex.1 : Paul pense qu'il est impossible qu'il fasse beau : $P(\{s_1, s_2\}) = 0$
La probabilité de l'événement $\{s_1, s_2\}$ est la somme de la probabilité de deux événements mutuellement exclusifs dont $\{s_1, s_2\}$ est l'union i.e. $\{s_1\}$ et $\{s_2\}$. C'est une propriété parfaitement générale : si les ensembles E, E' sont disjoints, $P(E \cup E') = P(E) + P(E')$ (**additivité** finie)

ex.2 : Paul qu'il est certain qu'il fait beau ou pas beau : $P(\{s_1, s_2\} \cup \{s_1, s_2\}^c) = P(S) = 1$

Définition 1
P est une ***distribution de probabilité finiment additive*** *sur S si*

(i) P est une fonction de $\wp(S)$ dans $[0, 1]$,
(ii) si les ensembles E, E' sont disjoints, $P(E \cup E') = P(E) + P(E')$ (additivité finie), et
(iii) $P(S) = 1$.

ex.3 : Paul pense qu'il est impossible qu'il fasse ni beau ni pas beau : $P(\{s_1, s_2\}^c \cap (\{s_1, s_2\}^c)^c) = P(\emptyset) = 0$. Suit des axiomes qui précèdent : $S = S \cup \emptyset$ et $S \cap \emptyset = \emptyset$ donc $P(S) + P(\emptyset) = P(S)$ donc $P(\emptyset) = 0$.

ex.4 : Paul qu'il est certain qu'il fait beau ou pas beau : $P(\{s_1, s_2\} \cup \{s_1, s_2\}^c) = P(S) = 1$. Suit en effet également des axiomes : $E \cup E^c = S$ donc $P(E \cup E^c) = 1$. Par ailleurs $E \cap E^c = \emptyset$ donc $P(E) + P(E^c) = P(E \cup E^c)$. Donc $P(E) + P(E^c) = 1$.

2.3 Le principe de la chose sûre

• On a vu dans le rôle central de l'axiome d'indépendance dans le MEU. Il y a un principe analogue qui joue un rôle crucial dans le MESU : le **principe de la chose sûre**.

Exemple 6
Comparer les 4 actes suivants :

f = [1000 euros si Prince de Bretagne gagne la 5è, une bière sinon]
g = [1000 euros si Prince de Bretagne gagne la 5è, un pastis sinon]

f' = [100 euros si Prince de Bretagne gagne la 5è, une bière sinon]
g' = [100 euros si Prince de Bretagne gagne la 5è, un pastis sinon]

Notons E^c = "Prince de Bretagne gagne la 5è" et E = "Prince de Bretagne ne gagne pas la 5è".

▷ *f et g sont identiques sur E^c : on le note $f =_{E^c} g$*
▷ *f' et g' sont aussi identiques sur E^c : $f' =_{E^c} g'$*
▷ *f et f' sont identiques sur E : $f =_E f'$*
▷ *g et g' sont identiques sur E : $g =_E g'$*

f et g ont une **partie commune** *: ce qui se passe sur E^c. On peut concevoir f' et g' comme des transformations identiques de cette partie commune : f et g sont modifiés, mais f' et g' ont toujours les mêmes conséquences sur E^c.*

PCS : Paul préfère f à g ssi il préfère f' à g'.

Notation 1
On note
- *$f =_E x$ si $f(s) = x$ pour tout $s \in E$ (f est constant sur E),*
- *$f =_E g$ si $f(s) = g(s)$ pour tout $s \in E$ (f et g sont identiques sur E), et*
- *$f = xEy$ si $f =_E x$ et $f =_{E^c} y$.*

L'idée qui commande le PCS est que pour déterminer ses préférences entre deux actions qui ont une partie commune, on se base uniquement sur la partie qui n'est pas commune aux deux actions (ici E). En toute généralité, le principe s'énoncé comme suit :

$$\boxed{\text{(P2) si } f =_E f',\ g =_E g',\ f =_{E^c} g \text{ et } f' =_{E^c} g', \text{ alors } f \succ g \text{ ssi } f' \succ g'}$$

Proposition 1
Si une relation de préférence se laisse représenter par le MESU, alors elle obéit au principe de la chose sûre.

Exemple 7
Voici une représentation matricielle des deux paires d'actions de l'exemple précédent :

	E	E^c
f	c_f	c_c
g	c_g	c_c
f'	c_f	c'_c
g'	c_g	c'_c

Supposons que les utilités et probabilités soient les suivantes :

	0.8	*0.2*
f	*10*	*1000*
g	*5*	*1000*
f'	*10*	*100*
g'	*5*	*100*

Dans ce cas Paul préfère f à g : $ESU(f) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 1000 = 208$ et $ESU(g) = 0.8 \times 5 + 0.2 \times 1000 = 204$. Le PCS serait violé si g' était préféré à f' ; il est clair que ce n'est pas le cas : $ESU(f') > ESU(g')$.

Preuve. Rappel : nous traitons uniquement le cas où S est fini. Par hypothèse, $ESU(f) > ESU(g)$ pour une certaine fonction d'utilité $u(.)$ et une certaine distribution de probabilité $P(.)$. Cela implique que

$\sum_{x\in E} P(x) \times u(f(x)) + \sum_{y\in E} P(y) \times u(f(y)) > \sum_{x\in E^c} P(x) \times u(g(x)) + \sum_{y\in E^c} P(y) \times u(g(y))$

Mais puisque pour tout $y \in E^c$, $f(y) = g(y)$,

$\sum_{x\in E} P(x) \times u(f(x)) > \sum_{x\in E^c} P(x) \times u(g(x))$ (*)

Comparons maintenant $ESU(f')$ et $ESU(g')$.

$ESU(f') = \sum_{x\in E} P(x) \times u(f'(x)) + \sum_{y\in E} P(y) \times u(f'(y))$
$ESU(f') = \sum_{x\in E} P(x) \times u(f(x)) + \sum_{y\in E} P(y) \times u(f'(y))$

Symétriquement,

$ESU(g') = \sum_{x \in E} P(x) \times u(g(x)) + \sum_{y \in E} P(y) \times u(g'(y))$

Par hypothèse, $f' =_{E^c} g'$ donc $\sum_{y \in E} P(y) \times u(f'(y)) = \sum_{y \in E} P(y) \times u(g'(y))$ et par conséquent

$ESU(f') > ESU(g')$ ssi $\sum_{x \in E} P(x) \times u(f(x)) > \sum_{x \in E} P(x) \times u(g(x))$.

Or on a vu (*) que tel était le cas donc puisque $\succ$ est représenté par P et u, il suit que $f' \succ g'$. La réciproque qui montre que si $f' \succ g'$ alors $f \succ g$ procède de la même façon. ♠

2.4 Révélation des croyances

• En démontrant le théorème de représentation pour le MEU, nous avons vu comment on pouvait en principe révéler les utilités (sur les conséquences) d'un décideur qui se conforme aux axiomes à partir de ses préférences : l'utilité d'une loterie dégénérée δ_x est α_{δ_x} si le décideur est indifférent entre δ_x et un α_{δ_x}-mixage de la meilleure et de la pire loterie. Le point crucial est que les probabilités, données, sont indispensables dans cette procédure. Et les probabilités, c'est précisément ce que l'on a pas dans le cas incertain.

▷ F. Ramsey (1926)

> "...le degré de croyance est une propriété causale de la croyance, qu'on peut vaguement définir comme étant la propension à agir sur la base de cette croyance."

Exemple 8 (inférer les utilités à partir des probabilités)
Scénario : trois conséquences : thon $\succ$ jambon $\succ$ oeuf. On veut connaître l'utilité du jambon relativement à l'intervalle $[u(oeuf), u(thon)] = [0, 1]$. Pour un événement E de probabilité connue p, on s'intéresse aux actes a_1, a_2 tq

	E p	$\neg E$ *1 - p*
a_1	*thon*	*oeuf*
a_2	*jambon*	*jambon*

- *quand p est forte, Pierre préfère a_1 : $p > x$*
- *quand p est faible, Pierre préfère a_2 : $p < x$*
- *on peut proposer par alternance des p moins fortes et moins faibles ; on obtient alors une estimation de plus en plus précise de x*
- *avec un jeu de 52 cartes, on peut estimer l'utilité du jambon à 1/52 près*
- *si $a_1 \sim a_2$, alors $x = p$ et on infère donc l'utilité de jambon !*

Exemple 9 (révéler les probabilités à partir des utilités)
Supposons que les utilités soient connues :

	brouillard *p*	*pas de brouillard* *1 - p*
train	*7*	*7*
avion	*0*	*12*

Supposons en outre que Pierre soit indifférent entre le train et l'avion ; alors
$7 = 12 - 12p$
$p = 5/12$

• Une manière de procéder (celle de Savage) consiste à *commencer par révéler les croyances* à partir des préférences - les utilités sur C seront révélées ensuite. Il s'agit donc de révéler P probabilité sur S à partir des préférences $\succ$ sur les actes F.

• La façon usuelle de procéder décompose la démarche en deux étapes. Ce qui est directement révélé n'est pas une distribution de probabilité mais une **probabilité qualitative**. Cette probabilité qualitative a ensuite des propriétés qui lui permettent d'être représentée par une probabilité quantitative. Une probabilité qualitative $>\subseteq \wp(S) \times \wp(S)$ signifie intuitivement "...est estimé plus probable que ...". Voici la manière dont elle est révélée à partir des préférences :

A partir de la relation de préférence sur les actes, on définit deux relations de préférence dérivées :

Définition 2
La relation de ***préférence sur les actes conditionnelle à*** *E, notée $\succ_E$, est définie ainsi :*

$$f \succ_E g \text{ si } \forall f', g' \in F, \text{ si } f' =_E f,\ g' =_E g \text{ et } f' =_{E^c} g', \text{ alors } f' \succ g'$$

Définition 3
La relation de ***préférence sur les conséquences*** *est définie ainsi :*

$$x \succ y \text{ ssi } f \succ f' \text{ où } \forall s \in S,\ f(s) = x \text{ et } f'(s) = y$$

$$\boxed{\text{(Def} >\text{) } E_1 > E_2 \text{ ssi } \exists x, y \in C \text{ tels que } x \succ y,\ xE_1y \succ xE_2y}$$

(Def $>$) est une manière de révéler une probabilité qualitative entre E_1 et E_2 : un agent estime E_1 plus probable que E_2 exactement quand, s'il préfère une conséquence à une autre, il préfère le pari où la conséquence préférée est obtenue conditionnellement à E_1 plutôt que le pari où elle est obtenue conditionnellement à E_2. Bien sûr, pour que cette approche fonctionne, il faut d'abord qu'il existe deux telles conséquences :

(P5) il existe certains $z, y \in C$ tels que $x \succ y$

Il faut ensuite que le résultat soit le même quelles que soient les conséquences x, y que l'on choisissse. C'est ce que garantit l'axiome suivant :

(P4) si $x \succ y$ et $x' \succ y'$, alors $xEy \succ xE'y$ ssi $x'Ey' \succ x'E'y'$

• Les préférences du décideur sont évidemment supposées rationnelles (au sens technique du moins), ce qu'on appelle (P1) dans ce contexte ; de (Def $>$), (P1)-(P5) on peut montrer qu'on a bien fait la moitié du chemin i.e. que $>$ est une relation de probabilité qualitative. Voici la définition formelle :

Définition 4
La relation $>$ sur $\wp(S)$ est une ***probabilité qualitative*** *si pour tout $E, E', E'' \in \wp(S)$,*

(i) $>$ est un ordre faible,
(ii) $S > \emptyset$,
(iii) $\neg(\emptyset > E)$, et
(iv) si $(E \cup E') \cap E'' = \emptyset$, alors $E > E'$ ssi $E \cup E'' > E' \cup E''$.

(P1), (P3), (P4) et (P5) permettent de montrer (i)-(ii). Le coeur de la définition est l'analogue qualitatif de l'additivité i.e. (iv). C'est là qu'intervient le principe de la chose sûre (P2). Supposons que (iv) ne soit pas satisfait i.e. $(E \cup E') \cap E'' = \emptyset$, $E > E'$ et $E \cup E'' < E' \cup E''$. Et supposons que $x \succ y$. Soient

$$f = xEy,\ g = xE'y,\ f' = xE \cup E''y \text{ et } g' = xE' \cup E''y$$

Clairement $f =_{E''^c} f'$ et $g =_{E''^c} g'$ et $f =_{E''} g$ et $f' =_{E''} g'$. On satisfait donc l'antécédent de (P2). On peut donc en conlure que $f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g'$. Par hypothèse $E > E'$ donc par (Def $>$) $f \succ g$ donc $f' \succ g'$ donc $E \cup E'' > E' \cup E''$. Contradiction.

Un autre point intéressant concerne la démonstration de (iii) $\neg(\emptyset > E)$: l'évenement impossible n'est pas strictement plus probable qu'un événement quelconque. Pour que cela soit le cas il faudrait que pour $x \succ y$, $x\emptyset y \succ xEy$. Mais $x\emptyset y$ n'est rien d'autre que l'acte constant y. Donc il faudrait que $y \succ xEy$ avec $x \succ y$! Intuitivement, il y a deux possibilités : ou bien E a une probabilité nulle et dans ce cas $\emptyset \sim E$ ou bien E a une probabilité non-nulle et dans ce cas $E > \emptyset$. La difficulté, c'est bien évidemment que l'on ne

dispose pas encore de probabilité quantitative pour distinguer les événements à proba.nulle des autres. Comment faire ?
Idée de base : trouver un type de préférence qui révèle que l'agent a une probabilité nulle vis-à-vis d'un événément.

Définition 5
Pour tout $E \in \wp(S)$, E est ***nul*** *si $f \sim g$ quand $f =_{E^c} g$*

La signification intuitive est simple : un événement est nul pour un agent si ce qui se passe sur cet événement lui indiffère complètement. Autrement dit, si deux actes qui sont identiques sur le complémentaire de l'événement en question sont indifférents.
Reprenons le raisonnement. (a) Supposons que E est nul. Considérons $x \succ y$; xEy et $x\emptyset y$. On l'a vu $x\emptyset y = y = yEy$. Puisque E est nul, $xEy \sim yEy = x\emptyset y$. Donc $E \sim \emptyset$. (b) Supposons que E est non-nul. Considérons $x \succ y$, xEy et $x\emptyset y = y$. On retombe sur le point de tout à l'heure. C'est un axiome qui exclut cette situation (P3) :

$$\boxed{\text{(P3) si } E \text{ n'est pas nul, } f =_E x \text{ et } g =_E y, \text{ alors } f \succ_E g \text{ ssi } x \succ y}$$

(P3) nous permet de conclure que $xEy \succ_E x\emptyset y = y$. Mais comme ces deux actes sont identiques sur E^c, on peut en conclure que $xEy \succ x\emptyset y = y$ donc que $E > \emptyset$.

• Toute probabilité qualitative ne se laisse pas représenter par une distribution de probabilité. Il faut des propriétés supplémentaires pour le garantir. Voici d'abord comment $P(.)$ est définie. Soit E un événement. Supposons qu'il existe une partition de S en 2^n éléments équiprobables[1] $C_1^n, ..., C_{2^n}^n$. Pour tout n, il existe un plus petit k tel que l'union des k premiers éléments de la partition est strictement plus probable que E : $\bigcup_{j=1}^k C_j^n > E$; notons $k(n)$ ce nombre.

Si une probabilité quantitative représente $>$, l'événement $\bigcup_{j=1}^k C_j^n$ devra avoir comme probabilité $k(n)/2^n$.

En augmentant n, on obtient des approximations de plus en plus fines de la probabilité de E. On peut alors définir la probabilité quantitative $P(E)$ de E comme étant la limite des probabilités de $\bigcup_{j=1}^k C_j^n$ quand n augmente (donc quand on trouve des événements de plus en plus proches de E) :

$$\text{(Def } P\text{) } P(E) = \lim_{n\to\infty} k(n)/2^n$$

Le détail est compliqué, mais c'est l'axiome

[1] L'équiprobabilité est, à cet endroit, évidemment définie en termes de probabilité qualitative.

(P6) si $f \succ g$, alors, étant donné x, il existe une partition finie de S telle que, pour tout membre S_i de la partition, si $f' =_{S_i} x$ et $f' =_{S_i^c} f$ alors $f' \succ g$, et si $g' =_{S_i} x$ et $g' =_{S_i^C} g$, alors $f \succ g'$

qui garantit les partitions uniformes qui sont à la base de la construction. Pris ensemble, les axiomes garantissent, d'une part, que l'on peut définir une telle distribution $P(.)$ et, d'autre part, qu'elle représente bien la probabilité qualitative $>$:

$$E_1 > E_2 \Leftrightarrow P(E_1) > P(E_2) \tag{1}$$

2.5 Axiomatisation du modèle d'espérance subjective d'utilité

Modèle d'espérance d'utilité en situation d'incertitude (MEU-I)

(MEU-I) L'agent peut choisir entre les différents actes $f \in F$, où F est l'ensemble des fonctions $f : S \to S$.

(MEU-I P1) $\succ$ est un ordre asymétrique et négativement transitif sur F

(MEU-I P2) si $f =_E f'$, $g =_E g'$, $f =_{E^c} g$ et $f' =_{E^c} g'$, alors $f \succ g$ ssi $f' \succ g'$

(MEU-I P3) si E n'est pas nul, $f =_E x$ et $g =_E y$, alors $f \succ_E g$ ssi $x \succ y$

(MEU-I P4) si $x \succ y$ et $x' \succ y'$, alors $xEy \succ xE'y$ ssi $x'Ey' \succ x'E'y'$

(MEU-I P5) $\exists x, y \in C$ tels que $x \succ y$

(MEU-I P6) si $f \succ g$, alors, étant donné x, il existe une partition finie de S telle que, pour tout membre S_i de la partition, si $f' =_{S_i} x$ et $f' =_{S_i^c} f$ alors $f' \succ g$, et si $g' =_{S_i} x$ et $g' =_{S_i^C} g$, alors $f \succ g'$.

(MEU-I P7) si, pour tous $s \in E$, $f \succ_E g(s)$, alors $f \geq_E g$; et si, pour tous $s \in E$, $f(s) \succ_E g$, alors $f \geq_E g$

(MEU-I C) L'agent, s'il en existe au moins un, choisit un acte $\succ$-maximal

Comme dans le modèle d'espérance en situation de risque, on dispose d'un théorème de représentation pour le modèle d'espérance en situation d'incertitude *s.s.* ; c'est un résultat plus fort, puisqu'il garantit l'existence non seulement d'une fonction d'utilité $u(.)$ sur les conséquences, mais également d'une distribution de probabilité subjective sur l'espace d'états S.

Théorème 1 (théorème de représentation)
Si la relation $\succ$ sur F satisfait (MEU-I P1)-(MEU-I P7), alors

(i) il existe une unique distribution de probabilité finiment additive P sur $(S, \wp(S))$ telle que (a) $P(E) > P(E')$ ssi $xEy > xE'y$ quand $x \succ y$ et (b) $P(E) = 0$ quand E est un événement nul.

(ii) il existe une fonction bornée $u : C \to \mathbb{R}$, unique à une transformation affine croissante près, telle que
$\forall f, g \in F,\ f > g$ *ssi* $E[u(f(s)), P] > E[u(g(s)), P]$

La partie (i) du théorème de représentation, qui concerne la probabilité subjective, nous avons montré dans les grandes lignes comment elle procède des axiomes dans la section précédente. La démonstration de la partie (ii) est essentiellement une adaptation du théorème de représentation pour le MEU (voir Fishburn 1970 ou Kreps 1988).

3 Références

- P. Fishburn (1970), *Utility Theory for Decision Making*, Wiley

- P. Fishburn (1994), "Utility and Subjective Probability", in Aummann & Hart, *Handbook of Game Theory*, vol.2, Elsevier

- D. Kreps (1988), *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press

- L. Savage (1954/1972), *The Foundations of Statistics*, Dover