Introduction aux espaces de types

Mikaël Cozic, Séminaire "Philosophie formelle",
28/04/03

1 Les jeux à information incomplète

2 Les espaces de type

3 L'hypothèse de common prior

4 Les espaces de types universaux

5 L'approche sémantico-hiérarchique de l'universalité

6 L'approche syntaxique de l'universalité

Bibliographie:

Aumann, "Interactive Epistemology", *International Journal of Game Theory*, 1999, 28, pp. 263-300

Aumann & Heifetz, "Incomplete information", dans Handbook of Game Theory, vol.II, 2002

Battigalli & Bonanno, "Recent Results on Blelief, Knowledge and the foundaitons of Game Theory", *Review of Economic Studies*, 1999

Meier, "An Infinitary Probability Logic for Type Spaces", Core Discussion Paper, 2001/61

Mertens & Zamir, "Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information", *International Journal of Game Theory*, 1985, 14, pp. 1-29

Mongin & Heifetz, "Probability Logic for Type Spaces", *Games and Economic Bahavior*, 2001, 35, pp. 31-53

1 Les jeux à information incomplète

Les espaces de types sont des structures utilisées dans la théorie des jeux en information incomplète.
Un jeu tel que le représente ordinairement la théorie des jeux est considéré comme transparent à ses participants: on fait l'hypothèse informelle que les actions possibles et les paiements qui en résultent *ie* la **structure du jeu** sont de connaissance commune entre les joueurs.
C'est évidemment une hypothèse très forte, et la théorie des jeux s'est intéressée depuis longtemps à la modélisation d'hypothèses plus faibles ie elle a essayé d'introduire des formes d'incertitudes structurelles parmi les participants.
L'incertitude la plus fréquemment examinée est l'incertitude que peuvent avoir les joueurs sur les paiements

Mais il est clair que ce genre d'incertitudes n'est pas le seul à être pertinent pour les décisions d'agents en interaction

Bref, quand on commence à chercher à traiter les jeux en information incomplète, on est naturellement conduits à des hiérarchies infinies de croyances; à chaque joueur correspondrait une telle hiérarchie. Le problème, c'est qu'une telle hiérarchie n'est pas un objet aisé à manipuler; en particulier, elle n'est pas conforme au paradigme bayésien qui traite l'incertitude comme une distribution de probabilités sur un espace.

2 Les espaces de type

Les articles séminaux d'Harsanyi 67-8 ont construit la notion de **type** en réponse à cette difficulté; le type d'un joueur est censé contenir toutes les caractéristiques d'un joueur pour le jeu, soit essentiellement une fonction de paiement u_i (type axiologique) et une hiérarchie de croyances (type épistémique).
La différence fondamentale entre le type épistémique d'un joueur et une hiérarchie de croyances est que le type épistémique d'un joueur se présente, conformément au paradigme bayésien, comme une distribution de probabilités sur un certain espace.

On présente sous différentes formes voisines ces espaces de type:

- l'espace de type produit: BB99

$PTS = <N, S, \{T_i\}_{I \in N}, \{\theta_I\}_{i \in N}>$
S un ensemble d'états de la nature
N un ensemble dejoueurs
T_i l'ensemble des types du joueurs i
$\theta_i: T_i \to \Delta (S \times T_{-I})$

- l'espace de type: Meier 01, HM 01, MZ 85

$TS = <N, \Omega, \{\pi_i\}_{i \leftrightarrow N}>$

N un ensemble de joueurs
Ω un ensemble d'états
$\pi_i: \Omega \to \Delta(\Omega)$ assigne au joueur i en chaque état de Ω sa distribution de probabilité sur Ω

l'espace de type basé sur un ensemble d'états de la nature S

S-TS = $<N, \Omega, \{\pi_i\}_{i\leftrightarrow N}, f>$
f: $\Omega \to S$ assigne à chaque état de l'espace de type un état de la nature

- l'espace de type pour un langage **L** basé sur des propositions atomiques **At**

L(At)-TS = $<N, \Omega, \{\pi_i\}_{i\leftrightarrow N}, v>$
v: $\Omega \times \mathbf{At} \to \{0,1\}$

un espace de type est le strict analogue probabiliste des structures de Kripke multi-agent: au lieu d'une relation d'accessibilité, on a une distribution de probabilité. On peut d'ailleurs définir une structure de Kripke induite à partir d'un espace de type.

exemple:

AH02

3 L'hypothèse de common prior

Quelques mots sur le résultat séminal de la théorie des jeux en information incomplète associé aux espaces de type.

On restreint d'abord la classe des TS aux espaces de types d'Harsanyi *ie* l'ensemble des espaces de types où les agents jouissent d'une propriété d'introspection probabiliste.

$w' \in Supp(\pi_i(w'))\quad \pi_i(w') = \pi_i(w)$

Conséquence: $\pi_I(w)\ ([\pi_i(w)]) = 1$

Soit $I_i(w) = \{w' : \pi_i(w') = \pi_i(w)\}$; $I_i(w)$ s'appelle l'ensemble d'information de i en w

Un espace de type TS satisfait à l'hypothèse de common prior ssi il existe $\pi \in\Delta(\Omega)$ t.q.

$E \subseteq \Omega\quad \pi_i(w)(E) = \pi(E \cap I_i(w)) / \pi(I_i(w))$

$= \pi(E\ / I_i(w))$

Ie l'hypothèse de C.P.est satisfaite s'il existe une distribution de probabilité sur Ω t.q. la distribution de probabilité de chaque joueur puisse s'obtenir par conditionnalisation à partir de π et de l'événement . Les différences de croyance sont donc dues à des différences d'information; plus précisément, puisque $I_i(w)$ n'est rien d'autre que l'événement que i est du type épistémique qu'il a en w, le type d'un joueur en w résulte du C.P. conditionnalisée par l'apprentissage de son type.

Sous hypothèse de C.P., un jeu sous forme normale à information incomplète pour N peut être transformé en un jeu sous forme extensive pour N+Nature; la Nature choisit d'abord un état w conformément à π et informe chaque joueur de son type = $I_i(w)$; au second coup, tous les joueurs choisissent une stratégie.
Un EqBay est une fonction s_i^*: $T_i \to A_i$ qui attribue à chaque type une action telle que $s_i^*(t_i)$ est une meilleure réponse étant donné la probabilité associée par t_i et s_{-i}^*.

Le résultat qui garantir le bien fondé de cette transformation est le suivant:
Les EqBay du jeu original sont les EqNash du jeu transformé.

4 Les espaces de types universaux

Chaque état $w \in \Omega$ induit

un **état du monde hiérarchisé** si l'on se place dans un S-TS ie un état de la nature et une hiérarchie infinie de croyances pour chaque joueur

une **description dans L d'un état du monde** si l'on se place dans un L-TS = l'ensemble des énoncés de L vrais en w

On peut voir l'état du monde hiérachisé et la L-description d'un état du monde comme une **explicitation** de w; ce sont des exemples d'états du monde explicites.
En particulier, les deux explications nous fournissent en chaque état du monde un type épistémique explicite pour chaque joueur:

- Une hiérarchie de distribution de probabilités dans le premier cas: un élément de $\Delta(S)$, un élément de $\Delta(S \times [\Delta(S)]^{n-1})$, etc…
- Un ensemble de formules préfixées par p_i^α pour tout α rationnel dans le second cas

Le point important: en chaque monde $w \in \Omega$, $\pi_i(w)$ **contient** un type épistémique explicite (une hiérarchie de croyances ou un ensemble de formules) complet du joueur i mais **consiste** en un état de croyances de niveau 1 par rapport à l'espace de type Ω.

L'intérêt des économistes pour l'axiomatisation des espaces de type provient essentiellement de soucis méthodologiques et conceptuels à l'endroit de ce contraste.

On a vu que tout état d'un TS induisait dans un S-TS un état du monde hiérarchisé et dans un L-TS une description d'un état du monde; mais
est-ce que les S-TS ont la capacité d'engendrer tous les états du monde sans perte de généralité ?
est-il possible d'avoir un espace de type qui contiendrait tous les états du mondes hiérarchisés ou toutes les L-descriptions d'un état du monde possible ?

Ce que l'on veut, c'est donc

1/ définir précisément une notion d'état du monde explicite; elle doit notamment être telle qu'à tout état d'un espace de type on puisse associer un tel état du monde explicite

2/ se donner une structure
i/ dont l'espace d'états soit l'ensemble des états du monde explicites au sens précédent
ii/ qui soit un espace de type (donc qui ait une distribution de probabilité par monde et par joueur)
iii// qui "contienne" les autres espaces de types
iv/ où en chaque état w, pour chaque joueur i, le type épistémique implicite de i en w soit induit par w
v/ éventuellement: complétude épistémique: pour tout $p \in \Delta(\Omega)$ il existe $w \in \Omega$ tel que $\pi_i(w) = p$

La propriété iii est appelée **universalité**; c'est la propriété cardinale et la construction d'une structure qui satisfait les propriétés précédentes est appelée construction d'un espace de type universel.

sa définition exacte dépend du genre d'explicitation (sémantico-hiérarchique ou syntaxique) que l'on choisit.

Définition: un L-TS LTS* est **universel** si pour tout LTS il existe un unique morphisme de type de LTS dans LTS*

Un LTS* est donc universel s'il contient exactement une "copie" de tous les ensembles d'états du monde possibles.

Il est facile de montrer que le LTS canonique est universel (M01, p.27, AH02)

2 approches principales pour répondre à ces questions

approche hiérarchique MZ85

5 L'approche sémantico-hiérarchique de l'universalité

défauts:
hypothèses topologiques

6 L'approche syntaxique de l'universalité

approche syntaxique A99, M01

inspiré des modèles canoniques de la logique modale; un modèle canonique en logique multi-épistémique peut est en effet tel que pour toute description (dans un langage **L**) complète et cohérente d'un état du monde il existe un monde qui la rend vraie axiomatisation des espaces de type

Soit $\Gamma = \{p_i^{1/2-r}(\psi): r \in Q\}$ et $\varphi := \neg p_i^{1/2}(\psi)$
il n'existe aucun espace de type qui soit modèle de $\Gamma \cup \varphi$ donc $\Gamma \models \neg\varphi$
mais il n'existe aucun sous-ensemble fini Γ_0 tel que $\Gamma_0 \cup \varphi$ n'ait pas de modèle
Supp que |- soit sound par rapport à |=; alors si $\Gamma_0 \not\models \neg\varphi$, non $\Gamma_0 \vdash \varphi$; donc si l'on veut que $\Gamma \vdash \neg\varphi$, la relation |- ne peut pas être construite à partir d'une axiomatisation finitaire.

conséquence: pas de modèle canonique: quelle proba attribuer dans les mondes w où $\Gamma \cup \varphi \subseteq w$?

HM98 donnent une axiomatisation finitaire qui n'est pas fortement complète; il utilisent la méthode de filtration et non la méthode des modèles canonique

propriété d'universalité:
M01, P.25; AH02, p.10

Soient deux L- espaces de types L-TS1 et L-TS2
$LTS1 = <N, \Omega^1, \{\pi^1{}_i\}_{i\leftrightarrow N}, v^1>$
$LTS2 = <N, \Omega^2, \{\pi^2{}_i\}_{i\leftrightarrow N}, v^2>$

Un **morphisme de type** est une fonction $f: \Omega^1 \to \Omega^2$ telle que
$v^1(w, p) = v^2(f(w), p)$
$\pi_i^1(w)(f^{-1}(E)) = \pi_i^2(f(w))(E)$

Bref, le morphisme de type preserve les caractéristiques des différents états du monde (doxastiques ou pas). Conséquence: la satisfaction d'une formule en un état w d'un L-TS est préservée par morphisme de type.