Exercice 1 (Morphologie)
Pour chacune des formules suivantes, dites (a) quelle est la portée de chaque quantificateur (b) quelles occurences de variable sont libres (c) s'il s'agit d'un énoncé.

1. $(Fx \land \forall x(Gx \land \neg \forall x Jx))$
2. $(\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \land (\exists x Gx \leftrightarrow (Hx \land Jc)))$
3. $\forall x(Fx \rightarrow \exists x(\neg Gx \land Hx))$
4. $\exists x(\exists x Fx \rightarrow Gx)$

Exercice 2 (Interprétation et satisfaction)
Soit le langage $\mathcal{L} = (I, P, N, c_0, c_1)$. *On considère la* $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{M} = (\mathbb{M} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, I^{\mathcal{M}})$ *où*

- $I^{\mathcal{M}}(I) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $I^{\mathcal{M}}(P) = \{2, 3, 5, 7\}$
- $I^{\mathcal{M}}(N) = \{0, 1, 2, 3\}$
- $I^{\mathcal{M}}(c_0) = 0$
- $I^{\mathcal{M}}(c_1) = 1$

On note g_i *l'assignation qui associe le nombre* i $(0 \leq i \leq 10)$ *à la variable* x.

1. *Par quelles assignations sont respectivement satisfaites les formules (a)* $\neg Ix$, *(b)* $(Px \land Nx)$ *et (c)* $(\neg Ix \lor Px)$ *?*
2. *Les énoncés suivants sont-ils vrais dans* $\mathcal{M}$ *:*
   - $\forall x(Px \rightarrow Ix)$
   - $\exists x(Nx \land Px)$
   - Pc_0
   - Nc_1
   - $\exists x(Px \land \neg Ix)$
   - $\exists x(Px \land (\neg Ix \land \neg Nx))$
3. *Donnez une formule qui est exactement satisfaite par les assignations* g_0, g_1, g_2, g_3 *et* g_9.

Exercice 3 (Contre-exemples)
Montrez que les formules ci-dessous ne sont pas valides en construisant des contre-exemples, c'est-à-dire des $\mathcal{L}$*-structures où ces formules sont fausses.*

1. $((\exists x Px \land \exists x Qx) \rightarrow \exists x(Px \land Qx))$
2. $(\forall x(Px \lor Qx) \rightarrow (\forall x Px \lor \forall x Qx))$
3. $(\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow \exists x(Px \land Qx))$
4. $((\exists x(Px \land Qx) \land \exists x(Qx \land Rx)) \rightarrow \exists x(Px \land Rx))$

Exercice 4 (Validité en LPO)
Montrez que les formules suivantes sont valides :

1. $(\forall x Px \rightarrow Pc)$
2. $((\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \wedge \psi))$
3. $((\exists x(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\phi \wedge \exists x\psi))$
4. $(\forall x\phi \rightarrow \exists x\phi)$