Le conditionnel de Stalnaker

M. Cozic (DEC, ENS) & P. Égré (CNRS, IJN)

1 Variétés de la nécessité

• Rappel : le conditionnel strict est un *conditionnel matériel nécessaire.* Nous avons proposé une première notion de nécessité comme vérité dans tous les mondes possibles. De quelle nécessité s'agit-il ?

• Dans le premier chapitre de *Counterfactuals*, D. Lewis distingue *plusieurs* notions de nécessité, notamment

1. *la nécessité logique.* Une formule ϕ est logiquement nécessaire ssi elle est vraie dans tous les mondes logiquement possibles
2. *la nécessité physique.* Soit T une théorie physique idéale, la théorie physique achevée du monde actuel. T n'est certainement pas logiquement nécessaire. (Si l'on suppose que l'énoncé de la force gravitationnelle est une loi appartenant à une théorie de ce genre, il est logiquement possible que deux corps ne s'attirent pas en raison inverse de leur distance.) Mais on peut considérer qu'une formule ϕ est physiquement nécessaire si elle vraie non pas dans tous les mondes logiquement possibles mais dans tous les mondes *physiquement possibles.* On peut concevoir ces mondes physiquement possibles comme les mondes qui obéissent à la théorie physique idéale T.

Question : comment représenter une nécessité comme la nécessité physique ?

• Idée : on ne voudra certainement pas de la sémantique "universaliste" que l'on a proposée dans le cours précédent : on n'exigera pas d'une formule ϕ qu'elle soit vraie dans tous les mondes (logiquement) possibles pour qu'elle soit physiquement nécessaire. Ce que l'on exigera, c'est plutôt que ϕ soit vraie *dans tous les mondes possibles où les lois physiques sont les mêmes que dans le nôtre.* (Si l'on reprend les termes du § précédent : ϕ doit être vraie dans tous les mondes où la théorie achevée du monde actuel T est vraie.)

• La quantification restreinte. L'opérateur de nécessité est un quantificateur universel sur les mondes (logiquement) possibles. Ce que suggère le paragraphe précédent, c'est que si l'on veut capturer plusieurs notions de nécessité, comme celle de nécessité physique, alors on doit se doter non pas simplement d'un quantificateur universel, mais d'un **quantificateur universel restreint**, c'est-à-dire un quantificateur qui ne s'appliquera qu'à une partie des mondes possibles.

• Bien sûr, cela vaut non seulement pour notre monde mais pour tout monde possible : en un monde quelconque w, éventuellement physiquement incompatible avec le nôtre, $\Box\phi$ est vrai ssi ϕ est vrai dans tous les mondes qui obéissent aux mêmes lois physiques que w.

La terminologie en vigueur est la suivante : on dit qu'un monde possible du point de vue de w étant donné la notion de nécessité en jeu est un monde **accessible** depuis w. On peut voir l'accessibilité comme une relation R : les mondes accessibles depuis w sont par définition les mondes w' tels que wRw'.

La restriction sur la quantification sur les mondes possibles s'opère donc *via* la relation d'accessibilité : $\Box\phi$ est vrai en w ssi ϕ est vraie dans tous les w' t.q. wRw'.

2 Sémantique de Kripke

2.1 Satisfaction des énoncés

On aboutit à ce que l'on appelle la **sémantique de Kripke** pour la logique modale.

Définition 1
*Un **modèle de Kripke** $M = \langle W, R, I\rangle$ pour $\mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ est un triplet constitué*

1. *d'un ensemble W de mondes possibles*
2. *d'une relation d'accessibilité $R \subseteq W \times W$*
3. *d'une valuation atomique $I : At \to \wp(W)$*

La définition de la relation de satisfaction est analogue à la précédente, à ceci près que les modalités sont désormais des quantificateurs restreints :

Définition 2 (Relation de satisfaction)

(i)	$M, w \models p$ *ssi* $w \in I(p)$
(ii)	$M, w \models \neg\phi$ *ssi* $M, w \not\models \phi$
(iii)	$M, w \models (\phi \wedge \psi)$ *ssi* $M, w \models \phi$ *et* $M, w \models \psi$
	$M, w \models (\phi \vee \psi)$ *ssi* $M, w \models \phi$ *ou* $M, w \models \psi$
	$M, w \models (\phi \to \psi)$ *ssi si* $M, w \models \phi$ *alors* $M, w \models \psi$
(iv)	$M, w \models \Box\phi$ *ssi pour tout* v *t.q.* vRw, $M, v \models \phi$
	$M, w \models \Diamond\phi$ *ssi il existe* v *t.q.* vRw *et* $M, v \models \phi$

Si l'on note $R(w)$ l'ensemble (éventuellement vide) des mondes accessibles depuis w et $[[\phi]]$ l'ensemble des mondes où ϕ est vraie (ou ϕ-mondes), alors on peut reformuler en termes ensemblistes les clauses modales de la relation de satisfaction :

(iv')	$M, w \models \Box\phi$ ssi $R(w) \subseteq [[\phi]]$
	$M, w \models \Diamond\phi$ ssi $R(w) \cap [[\phi]] \neq \emptyset$

Les conditions de vérité du conditionnel strict sont alors les suivantes :

$$M, w \models \Box(\phi \to \psi) \text{ ssi } R(w) \cap [[\phi]] \subseteq [[\psi]]$$

La définition de la validité reste inchangée.

Proposition 1
$\models (\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi))$ *(K)*

2.2 Propriétés de la relation d'accessibilité

Dans la définition des modèles de Kripke, nous n'avons absolument pas contraint la relation d'accessibilité : nous ne lui supposons aucune propriété particulière. Revenons pourtant sur la nécessité physique. On avait proposé la chose suivante : un monde est physiquement accessible depuis w s'il a les mêmes lois de la nature que w. Si l'on suit cette caractérisation, alors on attribue certaines propriétés à la relation d'accessibilité :

1. w est accessible depuis w donc R est réflexive
2. si w a les mêmes lois physiques que w', w' a les mêmes lois physiques que w donc R est symétrique
3. si w a les mêmes lois physiques que w' et si w' a les mêmes lois physiques que w'', alors w a les mêmes lois physiques que w'' donc R est transitive

Autrement dit, la relation d'accessibilité correspondant à la nécessité physique, telle qu'on l'a envisagée jusqu'à présent, est une **relation d'équivalence**. Par conséquent, elle induit une partition parmi les mondes possibles.

On voit que selon la modalité que l'on a en tête, on peut désirer que la relation d'accessibilité ait telle ou telle propriété. Le point important, c'est que *les formules valides varient en fonction des propriétés de la relation d'accessibilité.*

Exemple :
$(\Box\phi \rightarrow \phi)$ (T)
Une formule comme (T) est une formule désirable quand on songe à la nécessité logique ou physique.
(T) n'est pas valide dans les modèles de Kripke. Voici un contre-exemple : $W = \{w_1, w_2\}$, $\phi := p$, $I(p) = \{w_2\}$ et $R(w_1) = \{w_2\}$
Dans le contre-exemple, R n'est pas réflexive. Mais dès que R est réflexive, (T) devient une formule valide. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un modèle M et un monde w dans les mondes possibles de M tels que $M, w \nvDash (\Box\phi \rightarrow \phi)$. Donc en tout monde w' accessible depuis w, ϕ est vraie et en w, ϕ n'est pas vraie. Ce qui est impossible si R est réflexive.

• De manière générale, il existe des **correspondances** entre, d'une part, les propriétés de la relation d'accessibilité et, d'autre part, les formules valides. C'est précisément la branche de la logique modale appelée la "théorie de la correspondance" qui étudie systématiquement ces correspondances. Voici quelques-uns des résultats les plus célèbres.

propriété de R	Schéma de formules valide
R réflexive	(T) $\Box\phi \rightarrow \phi$
R transitive	(4) $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$
R euclidienne	(5) $\neg\Box\phi \rightarrow \Box\neg\Box\phi$
R sérielle	(D) $\Box\phi \rightarrow \neg\Box\neg\phi$
R symétrique	(B) $\phi \rightarrow \Box\neg\Box\neg\phi$

Lecture du tableau : si telle propriété de la relation d'accessibilité est satisfaite, alors telle (schéma) de formule est valide.

3 Retour au conditionnel strict

3.1 Le conditionnel strict et le conditionnel matériel

• Si l'on adopte la sémantique Carnap de la logique modale (pas de relation d'accessibilité, ou une relation universelle), on voit que: $\Box(\phi \rightarrow \psi) \models (\phi \rightarrow \psi)$, mais la réciproque est fausse. Le conditionnel strict est donc plus fort que le conditionnel matériel.

• Si l'on adopte la sémantique de Kripke, alors il se peut que $M, w \models \Box(p \rightarrow q)$, sans que $M, w \models (p \rightarrow q)$. Il suffit d'imaginer que w ne satisfait pas le conditionnel matériel, que tout monde accessible satisfait le conditionnel, et que w n'est pas accessible à lui-même.

Si la relation d'accessibilité R est réflexive, alors tout modèle de Kripke basé sur R satisfait $\Box\phi \rightarrow \phi$, et donc on retrouve le fait que le conditionnel strict est plus fort que le conditionnel matériel.

3.2 Propriétés du conditionnel strict

Nous avons vu que le conditionnel reproduit, sous une autre forme, certains des "paradoxes" de l'implication matérielle. On peut montrer de la même façon que certaines des propriétés du conditionnel matériel valent pour le conditionnel strict, en particulier. Par ailleurs, les jugements de validité ou de non-validité des inférences varient de façon essentielle selon la façon dont on fait varier les contextes (cf. la monotonie):

• **Transitivité:**
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \models (p \rightarrow r)$
$(p \hookrightarrow q), (q \hookrightarrow r) \models (p \hookrightarrow r)$

Preuve: supposons $M, w \models \Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \rightarrow r)$. Tout monde w' accessible de w satisfait $(p \rightarrow q)$ et $(q \rightarrow r)$. Donc par transitivité du conditionnel matériel, tout monde accessible depuis w satisfait $(p \rightarrow r)$, ie $M, w \models \Box(p \rightarrow r)$.

• **Monotonie:**
$(p \rightarrow r) \models (p \wedge q) \rightarrow r$
$(p \hookrightarrow r) \models (p \wedge q) \hookrightarrow r$

Preuve: supposons $M, w \models \Box(p \rightarrow r)$. Alors tout monde accessible depuis w satisfait $(p \rightarrow r)$, et par monotonie du conditionnel matériel, satisfait $(p \wedge q) \rightarrow r$. Donc $M, w \models \Box(p \wedge q) \rightarrow r$.

• **Contraposition:**
$(p \rightarrow q) \models (\neg q \rightarrow \neg p)$
$(p \hookrightarrow q) \models (\neg q \hookrightarrow \neg p)$
Preuve: exercice.

3.3 Inadéquations

Chacune de ces propriétés, cependant, pose problème lorsqu'on considère certains énoncés conditionnels de la langue naturelle. Les exemples qui suivent sont classiques. Les jugements de validité varient, cependant, selon qu'on considère des conditionnels indicatifs ou contrefactuels:

• **Transitivité**

(1) Si Hoover était communiste, ce serait un traître. Si Hoover était né en Russie, il serait communiste. Si Hoover était né en Russie, ce serait un traître. [Stalnaker]

(2) Si Marie vient à la fête, elle fera plaisir à Jean. Si Marie fait plaisir à Jean, elle mettra Albert en colère. Si Marie vient à la fête, elle mettra Albert en colère.

- **Contraposition**

(3) Si Pierre avait fait attention, Marie ne serait pas tombée.

Si Marie était tombée, Pierre n'aurait pas fait attention.

(4) Si les Etats-Unis arrêtent les bombardements, le Nord-Vietnam ne sera pas d'accord pour négocier.

Si le Nord-Vietnam est d'accord pour négocier, les Etats-Unis n'auront pas arrêté les bombardements. [Stalnaker]

(5) Si Pierre se dépêche, il aura son train.

Si Pierre n'a pas son train, il ne sera pas dépêché.

- **Monotonie:**

(6) Si j'avais gratté cette allumette, elle se serait enflammée.

Si j'avais plongé cette allumette dans l'eau et que je l'avais grattée, elle se serait enflammée. [Goodman]

(7) Si je gratte cette allumette, elle s'enflammera.

Si je plonge cette allumette dans l'eau et que je la gratte, elle s'enflammera.

4 La logique des conditionnels de Stalnaker

R.C. Stalnaker, 1968, "A Theory of Conditionals", *Studies in Logical Theory* , Blackwell ; repris dans W.L. Harper et ali. (eds.), *Ifs*, Reidel, 1981

4.1 Heuristique : le test de Ramsey (*)

• Objet central de l'article : la logique des conditionnels $\approx$ la sémantique des conditionnels $\approx$ l'analyse des conditions de vérité des énoncés de type "si P, alors Q"

• Intuition de départ : se laisser guider par les conditions d'acceptabilité des conditionnels pour élaborer leurs conditions de vérité. Ramsey 1929 fait une proposition à propos des conditions d'acceptabilité des conditionnels connue sous le nom de **test de Ramsey (*)**

• F.P. Ramsey, 1929, "Law and Causality", trad.fr. J. Leroux "Les propositions générales et la causalité" dans *Logique, philosophie et probabilités*, Vrin, 2003, p. 246 :

> "If two people are arguing "If A will C ?" and are both in doubts as to A, they are adding A hypothetically to their stock of knowledge and arguing on that basis about C..."
>
> "Si deux personnes débattent de la question "Si p, est-ce que q ?" et qu'elles ont toutes les deux des doutes sur p, elles ajoutent p de façon hypothétique à leur stock respectif de connaissances et argumentent pour ou contre q sur cette base..." [tr. modifiée]

• Reconstruction par Stalnaker du test de Ramsey pour un conditionnel "si P alors Q" :

1. ajouter P à ses croyances
2. ajuster ses croyances de manière à les rendre cohérentes
3. vérifier si Q est le cas ou non

• Comment passer des conditions d'acceptabilité aux conditions de vérité de "Si P, alors Q" ? Stalnaker fait intervenir la notion de **monde possible** : "a possible world is the ontological analogue of a stock of hypothetical beliefs".

1. croyances de départ $\rightsquigarrow$ monde d'évaluation w
2. ajouter P à ses croyances et ajuster ses croyances de manière à les rendre cohérentes $\rightsquigarrow$ passer à un monde w' qui 1) rend P vraie et 2) diffère minimalement de w
3. vérifier si Q est le cas ou non $\rightsquigarrow$ "Si P alors Q" est vrai en w si Q est vrai dans le monde w' qui diffère minimalement de w parmi ceux qui rendent vrai P

4.2 Morphologie

Le langage de la logique des conditionnels, $\mathcal{L}_>$ consiste en le langage de la logique propositionnelle $\mathcal{L}$, augmenté du symbole $>$.

Règles de formation de formules:

(i) si ϕ est un atome, alors ϕ est une formule.
(ii) si ϕ est une formule, $\neg\phi$ est une formule.
(iii) si ϕ et ψ sont des formules, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ et $(\phi \rightarrow \psi)$ sont des formules.
(iv) si ϕ et ψ sont des formules, $(\phi > \psi)$ est une formule.
(v) rien d'autre n'est une formule.

4.3 Sémantique

Définition 3
*Un **modèle de Stalnaker** $M = \langle W, R, I, f, \lambda \rangle$ pour $\mathcal{L}_>$ est un n-uplet constitué*

1. *d'un ensemble W de mondes possibles*
2. *d'une relation d'accessibilité $R \subseteq W \times W$ réflexive*

3. *d'une valuation atomique* $I : At \to \wp(W)$

4. *d'une fonction de sélection* $s : \wp(W) \times W \to W$ *qui associe à une paire constituée d'une proposition et d'un monde possible un monde possible et qui satisfait les conditions suivantes :*

   (cl1) $f([[\phi]], w) \in [[\phi]])$

   (cl2) $f([[\phi]], w) = \lambda$ *slt s'il n'existe pas de monde* w' *t.q.* wRw' *et* $w' \in [[\phi]]$

   (cl3) si $w \in [[\phi]]$, *alors* $f([[\phi]], w) = w$

   (cl4) si $f([[\phi_2]], w) \in [[\phi_1]]$ *et* $f([[\phi_1]], w) \in [[\phi_2]]$, *alors* $f([[\phi_2]], w) = f([[\phi_1]], w)$

   (cl5) si* $f([[\phi]], w) \neq \lambda$, *alors* $f([[\phi]], w) \in R(w)$

5. *d'un monde absurde* λ *qui n'est accessible depuis aucun monde* $w \in W$ *et depuis lequel aucun monde* $w \in W$ *n'est accessible*

- Commentaires sur les 4 clauses de la fonction de sélection :

(cl1) ϕ est vraie dans le monde sélectionné par l'antécédent

(cl2) le monde absurde n'est sélectionné que s'il n'existe pas de monde possible où l'antécédent est vrai

(cl3) si ϕ est vraie en w, alors w est le monde sélectionné depuis w quand ϕ est l'antécédent. Un monde se ressemble plus à lui-même qu'à tout autre.

(cl4) clause de "cohérence" sur la distance entre mondes possibles

soit w_1 le monde le plus proche où ϕ_1 est vraie ; par hypothèse, ϕ_2 est vraie en w_1

cela n'exclut pas qu'il existe un monde w_2 qui soit le plus proche où ϕ_2 est vraie mais qui soit distinct de w_1

mais par hypothèse également, ϕ_1 est vraie en w_2.

Par conséquent, s'il existe une même relation de similitude sous-jacente, il semble qu'il faille que w_2 et w_1 soient en réalité identiques. C'est cela l'idée de cohérence entre sélections.

(cl5*) cette clause ne figure pas dans les conditions explicitement formulées par Stalnaker ; il faut toutefois l'ajouter (voir ci-après) et Nute (1980), *Topics in Conditional Logic*, p. 54.

- Remarque : le choix de la fonction de sélection relève pour Stalnaker non des règles sémantiques mais de la pragmatique des conditionnels, de la même façon que le choix d'un domaine de quantification ne serait pas déterminé par les règles sémantiques. Voir Section V.

Définition 4 (Relation de satisfaction)
Soit $M = \langle W, R, I, f, \lambda \rangle$ *un modèle de Stalnaker ; pour tout* $w \in W$, *on définit ainsi la relation de satisfaction :*

(i)	$M, w \models p$ *ssi* $w \in I(p)$
(ii)	$M, w \models \neg\phi$ *ssi* $M, w \not\models \phi$
(iii)	$M, w \models (\phi \wedge \psi)$ *ssi* $M, w \models \phi$ *et* $M, w \models \psi$
	$M, w \models (\phi \vee \psi)$ *ssi* $M, w \models \phi$ *ou* $M, w \models \psi$
	$M, w \models (\phi \rightarrow \psi)$ *ssi si* $M, w \models \phi$ *alors* $M, w \models \psi$
(iv)	$M, w \models (\phi > \psi)$ *ssi* $M, f([[\phi]], w) \models \psi$

Pour toute formule ϕ, $M, \lambda \models \phi$.

4.4 Syntaxe

• Stalnaker propose un *système axiomatique* (ou "système à la Hilbert") pour les modèles de Stalnaker ; il le nomme le **système C2**.

$\Box\phi =_{df} (\neg\phi > \phi)$ $\Diamond\phi =_{df} \neg(\phi > \neg\phi)$ $(\phi <> \psi) =_{df} ((\phi > \psi) \wedge (\psi > \phi))$
(PROP) Instances de tautologies (K) $(\Box\phi \wedge \Box(\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \Box\psi$ (MP) De ϕ et $(\phi \rightarrow \psi)$ inférer ψ (RN) De ϕ inférer $\Box\phi$
(a3) $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi > \psi)$ (a4) $\Diamond\phi \rightarrow ((\phi > \psi) \rightarrow \neg(\phi > \neg\psi))$ (a5) $(\phi > (\psi \vee \chi)) \rightarrow ((\phi > \psi) \vee (\phi > \chi))$ (a6) $((\phi > \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$ (a7) $((\phi <> \psi) \rightarrow ((\phi > \chi) \rightarrow (\psi > \chi))$

Définition 5
L'ensemble des théorèmes de C2 est l'ensemble des formules que l'on peut engendrer à partir des schémas d'axiomes et des règles d'inférences de C2. On note $\vdash_{C2} \phi$ *le fait que* ϕ *est un théorème de C2.*

• Commentaires sur le système C2 :

le second bloc n'est rien d'autre que le système K qui axiomatise les modèles de Kripke : la logique de Stalnaker est donc une extension de la logique modale usuelle

le troisième bloc contient les axiomes propres à la logique des conditionnels

les axiomes (a3) et (a6) mettent en avant les relations logiques entre les trois types de conditionnels : conditionnel strict, conditionnel de Stalnaker et conditionnel matériel. Le conditionnel de Stalnaker occupe une position intermédiaire entre les deux :

- il peut y avoir conditionnel matériel sans conditionnel de Stalnaker, mais dès qu'il y a conditionnel de Stalnaker, il y a conditionnel matériel
- il peut y avoir conditionnel de Stalnaker sans conditionnel strict, mais dès qu'il y a conditionnel strict, il y a conditionnel de Stalnaker

Preuve de la validité de (a3) : supposons qu'il existe un modèle de Stalnaker M et un monde de ce modèle w tels que (a3) ne soit pas satisfait *i.e.* tels que $M, w \nvDash \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi > \psi)$. Cela est équivalent à $M, w \models \Box(\phi \rightarrow \psi)$ et $M, w \nvDash (\phi > \psi)$. La seconde condition est équivalente à $f([[\phi]], w) \notin [[\psi]]$; et la première à (def) $M, w \models \neg(\phi \rightarrow \psi) > (\phi \rightarrow \psi)$ soit $f([[\neg(\phi \rightarrow \psi)]], w) \in [[(\phi \rightarrow \psi)]]$. Cela implique que $\neg(\phi \rightarrow \psi)$ n'est vraie dans aucun monde accessible depuis w (puisque l'on a aussi $f([[\neg(\phi \rightarrow \psi)]], w) \in [[\neg(\phi \rightarrow \psi)]]$). Cela implique que l'on a aucun w' tq wRw' et $M, w' \models \phi$ et $M, w' \nvDash \psi$. Mais cela contredit la seconde solution selon laquelle $f([[\phi]], w) \notin [[\psi]]$, *à condition que* $f([[\phi]], w) \in R(w)$. ♣

Preuve de la validité de (a6) : supposons qu'en un monde w d'un modèle M on ait $M, w \models (\phi > \psi)$ et $M, w \nvDash (\phi \rightarrow \psi)$. La seconde condition est équivalente à $w \in [[\phi]]$ et $w \notin [[\psi]]$. Mais si $w \in [[\phi]]$, en vertu des clauses portant sur la fonction de sélection, $f([[\phi]], w) = w$; donc $M, w \nvDash (\phi > \psi)$. Contradiction. ♣

• On peut bien sûr concevoir d'autres systèmes équivalents à C2 (dont les théorèmes sont les mêmes que ceux de C2) ; Nute (1984) propose en particulier un système qui rend la comparaison avec les autres théories des conditionnels plus aisée. Appelons-le **C2'**.

$\Box\phi =_{df} (\neg\phi > \phi)$ $\Diamond\phi =_{df} \neg(\phi > \neg\phi)$ $(\phi <> \psi) =_{df} ((\phi > \psi) \wedge (\psi > \phi))$
(PROP) Instances de tautologies (MP) De ϕ et $(\phi \rightarrow \psi)$ inférer ψ
(ID) $(\phi > \phi)$ (a6) $((\phi > \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$ (MOD) $((\neg\phi > \phi) \rightarrow (\psi > \phi))$ (CSO) $(((\phi > \psi) \wedge (\psi > \phi)) \rightarrow ((\phi > \chi) \leftrightarrow (\psi > \chi)))$ (CV) $(((\phi > \psi) \wedge \neg(\phi > \neg\chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \chi) > \psi)))$ (CEM) $((\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi))$
(RCEC) De $(\phi \leftrightarrow \psi)$ inférer $((\chi > \phi) \leftrightarrow (\chi > \psi))$ (RCK) De $(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi)$ inférer $((\chi > \phi_1) \wedge ... \wedge (\chi > \phi_n)) \rightarrow (\chi > \psi))$

Théorème 1 (Théorème de complétude)
Soit ϕ une formule du langage $\mathcal{L}_>$; ϕ est valide dans les modèles de Stalnaker ssi ϕ est un théorème du système $C2$ soit

$$\boxed{\models_{Sta} \phi \text{ ssi } \vdash_{C2} \phi \text{ ssi } \vdash_{C2'} \phi}$$

Preuve : Stalnaker & Thomason (1970).

4.5 Propriétés de la logique de Stalnaker

4.5.1 Propriétés "négatives"

Transitivité

Fait 1
$(\phi > \psi), (\psi > \chi) \nvDash_{Sta} (\phi > \chi)$

"Hoover est né en Russie" $\rightsquigarrow \phi$
"Hoover est communiste" $\rightsquigarrow \psi$
"Hoover est un traître" $\rightsquigarrow \chi$

On peut construire un modèle de Stalnaker $M, w \models (\phi > \psi), (\psi > \chi)$ mais $M, w \nvDash (\phi > \chi)$. Cela est équivalent à : $f([[\phi]], w) \in [[\psi]], f([[\psi]], w) \in [[\chi]]$ mais $f([[\phi]], w) \notin [[\chi]]$. Ce ne serait bien sûr pas le cas si $f([[\phi]], w) = f([[\psi]], w)$. Mais sinon, c'est possible. Intuitivement, ce qui bloque la transitivité, c'est le fait que le monde possible le plus proche où Hoover est né en Russie peut ne pas être le monde possible le plus proche où il est communiste. Ce peut être par exemple, un monde où Hoover est américain mais où au lieu d'avoir la vie qu'il a eu, il a fait des rencontres subversives, etc.

Monotonie

Fait 2
$(\phi > \psi) \nvDash_{Sta} ((\phi \wedge \chi) > \psi)$

"Je gratte cette allumette" $\rightsquigarrow \phi$
"Je plonge cette allumette dans l'eau" $\rightsquigarrow \chi$
"L'allumette s'enflammera" $\rightsquigarrow \psi$

• Remarques similaires : si le monde le plus proche où je gratte cette allumette est le même que celui où je la gratte et la plonge dans l'eau, alors la monotonie vaut. Mais sinon (et c'est plausible !), alors rien n'oblige à ce que $(\phi > \psi)$ et $((\phi \wedge \chi) > \psi)$ aient même valeur de vérité.

• La logique de Stalnaker valide toutefois une forme affaiblie de monotonie comme en témoigne l'axiome (CV) du système **C2'**. L'axiome (CV) est une forme renforcée de monotonie : la monotonie n'est pas garantie dans tous les cas, mais seulement quand la formule qui vient renforcer l'antécédent est "compatible" avec l'antécédent. Etant donné (CEM), on a même le schéma suivant : on peut passer de $(\phi > \psi)$ à $((\phi \wedge \chi) > \psi)$ quand $(\phi > \chi)$.

Ce n'est pas le cas dans l'exemple de l'alumette car on a pas : "Si je gratte cette allumette, je la plonge dans l'eau".

Contraposition

Fait 3
$(\phi > \psi) \nvDash_{Sta} (\neg\psi > \neg\phi)$

4.5.2 Propriétés "positives"

Négation

Proposition 2
Soient ϕ, ψ des formules du langage de la logique des conditionnels ; alors

$$\boxed{\Diamond\phi \models_{Sta} \neg(\phi > \psi) \leftrightarrow (\phi > \neg\psi)}$$

(8) Si les socialistes gagnent les prochaines législatives, ils abrogeront le CPE

(9) Il est faux que si les socialistes gagnent les prochaines législatives, ils abrogeront le CPE

(10) Si les socialistes gagnent les prochaines législatives, ils n'abrogeront pas le CPE

Tiers-exclu conditionnel

Proposition 3
Soient ϕ, ψ des formules du langage de la logique des conditionnels ; alors

$$\boxed{\models_{Sta} (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)}$$

Preuve : supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un modèle de Stalnaker M et un monde possible w tels que
$M, w \not\models (\phi > \psi) \vee (\phi > \neg\psi)$
ssi $M, w \not\models (\phi > \psi)$ et $M, w \not\models (\phi > \neg\psi)$
ssi $f([[\phi]], w) \notin [[\psi]])$ et $f([[\phi]], w) \notin [[\neg\psi]])$
ssi $f([[\phi]], w) \notin [[\psi]])$ et $f([[\phi]], w) \notin [[\psi]]^c)$
ce qui est impossible. ♣

Modus ponens

Fait 4
$\phi, (\phi > \psi) \models_{Sta} \psi$

Preuve : si $M, w \models \phi$, alors en vertu de la clause (cl3), $w = f([[\phi]], w)$. Puisque $M, w \models (\phi > \psi)$, $M, w \models \psi$. ♣

Impossibilité de l'antécédent

Fait 5
$\models_{Sta} (\neg\Diamond\phi \rightarrow (\phi > \psi))$

Preuve : supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe M tel que en un certain monde w, $M, w \not\models (\neg\Diamond\phi \rightarrow (\phi > \psi))$. Cela est équivalent à $M, w \models \phi$ et $M, w \not\models (\phi > \psi)$. En vertu de la clause (cl2) de la fonction de sélection, on a donc $f([[\phi]], w) = \lambda$: puisque ϕ est impossible en w, le monde sélectionné est le monde absurde λ. Or en λ, toute formule est satisfaite donc on ne peut pas avoir $M, w \not\models (\phi > \psi)$ - il faudrait que ψ ne soit pas satisfaite en λ. Contradiction. $\clubsuit$.