Les résultats de trivialité

M. Cozic (DEC, ENS) & P. Égré (CNRS, IJN)

1 Introduction

Lewis (1976), "Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities", repr. in *Philosophical Papers II*, Oxford UP.

- Lewis distingue deux thèses :

1. la thèse d'Adams *stricto sensu* selon laquelle l'*assertabilité* d'un conditionnel (indicatif) "Si A, alors C" dépend de la probabilité conditionnelle $P(C|A)$.

   Selon cette thèse, en général, un locuteur est prêt à asserter "Si A, alors C" (ou prêt à acquiescer à l'assertion de "Si A, alors C") quand $P(C|A)$ est élevé.

2. la thèse d'identification de la probabilité du conditionnel à la probabilité conditionnelle ("la Thèse" chez Edgington (1995), "l'Hypothèse" ou CCCP chez Hajek & Hall (1994), "l'Equation" chez Bennett 2003 - nous suivrons Edgington) selon laquelle

   (T) $P(A \Rightarrow C) = P(C|A)$

   La Thèse permet d'*expliquer* la thèse d'Adams : si de manière générale on asserte un énoncé quand on l'estime très probable, alors si la probabilité d'un conditionnel est la probabilité conditionnelle, nécessairement on asserte un conditionnel quand on estime la probabilité conditionnelle correspondante très forte.

   NB : dans la littérature, on parle souvent de "thèse d'Adams" pour désigner ce que nous nommons désormais "la Thèse".

- A partir de (T), on peut expliciter de différentes façons la Thèse. Voici les principales versions selon Hajek & Hall (1994) :

(i) **Version Universelle** ($\exists\forall$) : il existe un conditionnel $\Rightarrow$ qui satisfait (T) pour toute fonction probabiliste $P(.)$. (Chez Lewis : il existe un conditionnel probabiliste universel. Attaqué par le premier résultat de trivialité de Lewis)

(ii) **Version Doxastique** ($\exists\forall$) : il existe un conditionnel $\Rightarrow$ qui satisfait (T) pour toute fonction probabiliste $P(.)$ qui peut représenter les croyances d'un agent rationnel (Attaqué par le second résultat de trivialité de Lewis.)

(iii) **Version Universelle "sur mesure"** ($\forall\exists$) : pour toute fonction de probabilité $P(.)$; il existe un conditionnel $\Rightarrow$ qui satisfait (T)

(iv) **Version Doxastique "sur mesure"**($\forall\exists$) : pour toute fonction de probabilité $P(.)$ qui peut représenter les croyances d'un agent rationnel, il existe un conditionnel $\Rightarrow$ qui satisfait (T)

Lewis (1976) établit deux résultats qui montrent que la Thèse, sous les versions (i) et (ii), n'est pas tenable :

> "there is no way to interpret a conditional connective so that, with sufficient generality, the probabilities of conditionals will equal the appropriate conditional probabilities."

Lewis en conclut :

> "The quest for a probability conditional is futile, and we must admit that assertability does not go by absolute probability in the case of indicative conditionals."

Autrement dit, si la thèse d'Adams *stricto sensu* est correcte, on ne peut pas l'expliquer en invoquant la probabilité qu'un conditionnel soit vrai.

2 Les résultats de trivialité de Lewis

• Cadre formel :

✓ l'ensemble des formules du langage $Form(\mathcal{L}(At))$ est défini ainsi :

$$\phi ::= p|\bot|\top|\neg\phi|(\phi \vee \psi)|(\phi \wedge \psi)|(\phi \Rightarrow \psi)$$

✓ une **fonction de probabilité** est une fonction $P : Form(\mathcal{L}(At)) \rightarrow [0, 1]$ t.q.

(i) $1 \geq P(\phi) \geq 0$
(ii) Si $[[\phi]] = [[\psi]]$, alors $P(\phi) = P(\psi)$
(iii) Si $[[\phi]] \cap [[\psi]] = [[\bot]]$, alors $P(\phi \wedge \psi) = P(\phi) + P(\psi)$
(iv) Si $[[\phi]] = [[\top]]$, $P(\phi) = 1$

Remarque 1 : dans ce langage, $\Rightarrow$ est un connecteur binaire comme les autres ; on autorise en particulier les conditionnels *composés*.
Remarque 2 : Lewis utilise des probabilités "logiques" (définies sur des formules) et non pas ensemblistes (définies sur des σ-algèbres). Ce n'est pas essentiel pour les résultats : Hajek & Hall (1994) reformulent les principaux résultats de trivialité en termes d'algèbres basées sur un ensemble de mondes possibles W
Remarque 3 : la définition des fonctions de probabilité repose sur une sémantique laissée implicite pour le langage. $[[\phi]]$ désigne la valeur sémantique de ϕ - penser par exemple à l'ensemble des valuations qui rendent ϕ vraie ou l'ensemble des mondes possibles où ϕ est vraie. On s'appuie sur $\bot$ pour représenter la notion d'incompatibilité entre deux formules et sur $\top$ pour représenter la notion de formule nécessairement vraie.

2.1 Premier résultat de trivalité de Lewis

Définition 1

*$\Rightarrow$ est un **conditionnel probabiliste** pour une classe $\mathfrak{P}$ de fonctions de probabilité ssi pour toute fonction $P \in \mathfrak{P}$ et pour tous énoncés A, C avec $P(A) > 0$, alors*

$P(A \Rightarrow C) = P(C|A)$ (T)

*$\Rightarrow$ est un conditionnel probabiliste **universel** si c'est une conditionnel probabiliste pour la classe de toutes les fonctions de probabilité.*

Remarque : s'il existe un conditionnel probabiliste universel au sens qui vient d'être défini, alors la Version Universelle de la Thèse est vraie.

• La prémisse centrale du résultat de Lewis est l'**hypothèse de factorisation (HF):**

$$P(A \Rightarrow C|B) = P(C|AB), \text{ si } P(AB) \text{ est positif}$$

2 façons de concevoir (HF):

1. *(HF) et conditionalisation* : supposons que $P(.)$ et la fonction obtenue à partir de $P(.)$ par conditionalisation sur B soit $P(.|B)$ (ou $P_B(.)$) obéissent toutes deux à (T). Alors $P(A \Rightarrow C|B) = P_B(A \Rightarrow C) = P_B(C|A) = P(C|AB)$ si $P(AB) > 0$

2. *(HF) et la loi d'import-export (LIE)*:

   Supposons que (T) vaut pour $P(.)$ et $\Rightarrow$. Alors (HF) est équivalent à

   $$P(B \Rightarrow (A \Rightarrow C)) = P(AB \Rightarrow C), \text{ si } P(AB) \text{ est positif (LIEP)}$$

   Considérons maintenant la loi d'import-export (LIE) qui est au coeur de l'argument de Gibbard :

   $$[[(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))]] = [[(AB \Rightarrow C)]]$$

   Il est clair que (LIEP) est une conséquence immédiate de la (LIE) et de la clause (ii) de la définition des fonctions de probabilité selon laquelle si deux formules sont logiquement équivalentes, elles ont la même probabilité. On peut voir (HF) de deux façons quasi-identiques:

   - sous l'hypothèse (T), l'hypothèse de factorisation est équivalente à la version probabiliste de la loi d'import-export (LIEP)
   - l'hypothèse de factorisation est une conséquence de (T) et de la loi d'import-export (LIEP)

Ces 2 façons de concevoir (HF) signifie qu'on peut lui donner (au moins) 2 types de justification (voir McGee 1989) : (i) on peut considérer que (T) doit survivre à un changement rationnel de croyance ; (ii) on peut considérer que (LIE) est un principe du conditionnel.

• On peut maintenant passer au coeur de la preuve. Soit P une fonction de probabilité, et A et C des énoncés tels que:

$$P(AC) > 0, P(A\overline{C}) > 0$$

On a :
(1) $P(A \Rightarrow C) = P(C|A)$ (T)
(2) $P(A \Rightarrow C|C) = P(C|AC) = 1$ (HF)
(3) $P(A \Rightarrow C|\overline{C}) = P(C|A\overline{C}) = 0$ (HF)
(4) $P(A \Rightarrow C) = P(A \Rightarrow C|C) \cdot P(C) + P(A \Rightarrow C|\overline{C}) \cdot P(\overline{C})$ (expansion par cas)
(5) $P(C|A) = 1 \cdot P(C) + 0 \cdot P(\overline{C}) = P(C)$ (par (1), (2), (3) et (4))

Remarque : l'expansion par cas est une conséquence des axiomes qui définissent les probabilités. Dans le cas général,

$$P(\phi) = P(\phi|\psi).P(\psi) + P(\phi|\neg\psi).P(\neg\psi)$$

Conséquence: si $P(AC)$ et $P(A\overline{C})$ sont positifs, alors A et C sont probabilistiquement indépendants.

Rappel: par définition, A et C sont **probabilistiquement indépendants** ssi $P(AC) = P(A) \cdot P(C)$ ssi $\frac{P(AC)}{P(A)} = P(C)$ ssi $P(C|A) = P(C)$.

Exemple: P= probabilité associée au lancer d'un dé non-pipé
A="obtenir un nombre pair"
C="obtenir un six" $P(AC) = \frac{1}{6}$, $P(A\overline{C}) = \frac{1}{3}$
$P(C|A) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{6}$: A et C ne sont pas indépendants.

Mais, sous les hypothèses de Lewis: si on suppose que la probabilité de "si c'est un nombre pair, ce sera un six" ($P(A \Rightarrow C)$) est celle de "que ce soit un six, sachant que c'est un nombre pair" ($P(C|A)$), alors on prédit que la probabilité "que ce soit un six" ($P(C)$) est la même que celle de "que ce soit un six, sachant que ce sera un nombre pair" ($P(C|A)$).

• Lewis propose une "recette" générale pour construire des cas où toutes les hypothèses sont satisfaites et où pourtant $P(C|A) \neq P(C)$:

✓ C, D, E sont des énoncés (a) incompatibles deux à deux et (b) possibles (en termes ensemblistes : (a) il n'y a aucun monde possible où deux de ces énoncés sont vrais à la fois et (b) chaque énoncé est vrai au moins en un monde ; en termes probabilistes : (a) la probabilité de la conjonction de deux de ces énoncés est nulle et (b) chacun de ces énoncés a une probabilité non-nulle)

✓ $A = (C \vee D)$ - on vérifie que les hypothèses du résultat sont alors satisfaites

✓ $P(C|A) = P(C|(C \vee D)) \neq P(C)$ - intuitivement, le poids des $\bar{A}$-mondes (donc au moins des E-mondes) est redistribué sur les A-mondes donc entre autres sur les C-mondes. Donc $P(C|A) > P(C)$.

• Un langage qui ne comporte pas de tels énoncés C, D, E est dit **trivial**. Le résultat montre donc que si un langage a un conditionnel probabiliste universel, c'est un langage trivial.

2.2 Le second résultat de trivialité

• On peut constester la portée du premier résultat de trivialité en mettant en avant le fait que la Thèse porte sur les degrés de croyances donc sur les fonctions de probabilités qui sont susceptibles de représenter les croyances (d'agents rationnels). Autrement dit, ce serait la Version doxastique et non pas la Version Universelle de la Thèse qu'il faudrait attaquer.

• La Version doxastique de la Thèse n'est pas évidente à discuter parce qu'il n'est pas évident de déterminer quelles conditions une fonction de probabilité doit satisfaire pour pouvoir représenter les degrés de croyances d'un agent rationnel - pour être une fonction de probabilité doxastique.
Lewis retient une contrainte : la classe des fonctions probabilistes doxastiques est **close par l'opération de conditionalisation** : si P est dans la classe, et B est une formule, $P(\cdot|B)$ est aussi dans la classe

• Mais on peut se rendre compte facilement que le premier résultat (outre le fait que A et C sont des énoncés tels que $P(AC) \geq 0, P(A\overline{C}) \geq 0$) ne suppose rien d'autre que l'hypothèse de factorisation. Or l'hypothèse de factorisation est satisfaite dès que la classe de fonctions de probabilité est close sous conditionnalisation.
Considérons en effet une fonction de probabilité $P \in \mathfrak{P}$ où $\mathfrak{P}$ est close par conditionalisation. Soit un énoncé B tel que $P(B) > 0$. Par hypothèse, la fonction de probabilité $P_B = P(\cdot|B) \in \mathfrak{P}$. Si l'on applique alors (T) à P_B, on obtient

$P_B(A \Rightarrow C) = P_B(C|A) = P(C|AB)$ si $P(AB) > 0$

Donc

$P(A \Rightarrow C|B) = P(C|AB)$ si $P(AB) > 0$

• On aboutit ainsi au second résultat de trivialité de Lewis : si un langage a un conditionnel probabilistes pour une classe de fonctions probabilistes closes par conditionalisation, le langage est trivial.

En outre, une fonction de probabilité P compatible avec le résultat ne peut assigner de probabilité positive à plus de deux énoncés incompatibles et donc ne peut assigner que **4 valeurs numériques** différentes (si F et G sont ces formules, alors les 4 valeurs sont celles de F, $\neg F$, G et $\neg G$). Lewis appelle une telle fonction de probabilité une **fonction de probabilité triviale**. Une classe de fonctions de probabilité close par conditionalisation ne peut avoir un conditionnel probabiliste que si elle n'est constituée que de fonctions de probabilité triviales.
Preuve : $P(.)$ aura toujours 0 et 1 parmi ses valeurs. Supposons qu'il existe F et G telles que $P(F) = x$ et $P(G) = y$ avec $x + y \neq 1$. (Cela implique notamment que F et G ne sont pas la

négation l'une de l'autre.) Donc $x \neq y$ et par conséquent $(1-x) \neq (1-y)$. Il se peut que $x = .5$ ou $y = .5$, mais pas les deux. On a donc au moins 5 valeurs pour $P(.)$.
(a) Supposons que $x + y < 1$, si l'on pose $H = \neg F \wedge \neg G$, alors $P(H) > 0$. En outre H est incompatible avec F comme avec G.

1. si F et G sont incompatibles, alors F, G et H sont toutes incompatibles entre elles et de probabilité non-nulle
2. si F implique G, alors F, $G \wedge \neg F$ et H sont toutes incompatibles entre elles et de probabilité non-nulle ; même raisonnement si G implique F
3. si F et G ne sont pas incompatibles sans que l'une des deux formules implique l'autre, alors $F \wedge \neg G$, $G \wedge \neg F$ et H sont toutes incompatibles entre elles et de probabilité non-nulle

(b) Supposons maintenant que $x + y > 1$. Alors $F \wedge G$, $F \wedge \neg G$ et $\neg F \wedge G$ sont toutes incompatibles entre elles et de probabilité non-nulle.
Conclusion : dans tous les cas de figure, on satisfait les prémisses de l'argument de trivialité de Lewis. Il est clair que si P a plus de 4 valeurs, alors il existe x, y tels que $x + y \neq 1$. Donc on aboutit au résultat de trivialité.

• Hajek & Hall (1994) dérivent les deux premiers résultats de trivialité de Lewis (ainsi que le troisième publié de Lewis (1986)) d'un théorème qui repose sur le coeur de l'argument de Lewis (l'hypothèse de factorisation) et qu'ils appellent le "Strenghtened Lewis Result" : si P est une fonction de probabilité non-triviale, si P_B est dérivée de P par conditionalisation, distincte de P et non-triviale et si enfin $\Rightarrow$ est interprété uniformément sur P et P_B, alors (T) ne peut valoir simultanément pour P et P_B.

3 L'industrie des résultats de trivialité

• Depuis l'article initial de Lewis, de nombreux autres résultats de trivialité ou de limitation ont été découverts. On en trouve une présentation dans Hajek & Hall (1994).

1. Résultat de Milne (*Basic Triviality Result*, 2003)

   $P(A \Rightarrow C|(A \rightarrow C)) = P(C|A \wedge (A \rightarrow C))$ (par (HF))

   $P(A \Rightarrow C|(A \rightarrow C)) = P(C|A \wedge C) = 1$ si $P(AC) > 0$

   Cette propriété très simple a un intérêt intrinsèque : elle signifie que (sous (HF)) la certitude du conditionnel implique la certitude de $\Rightarrow$.

   Or,

   $P(A \Rightarrow C) = P((A \Rightarrow C) \wedge (A \rightarrow C)) + P((A \Rightarrow C) \wedge \neg(A \rightarrow C))$

   $P(A \Rightarrow C) \geq P((A \Rightarrow C) \wedge (A \rightarrow C)) = P(A \Rightarrow C|(A \rightarrow C)).P(A \rightarrow C)$

   $P(A \Rightarrow C) \geq P(A \rightarrow C)$ si $P(AC) > 0$

   Or on sait que de manière générale $P(A \rightarrow C) \geq P(A \Rightarrow C)$ avec $P(A \rightarrow C) = P(A \Rightarrow C)$ quand $P(A) = 1$ ou $P(C|A) = 1$.

   On sait également que de manière générale, si $P(A) > 0$ et $P(AC) = 0$, $P(C|A) = 0$.

D'où le résultat de trivialité : quand $1 > P(A) > 0$, $P(.|A)$ est bivalente (i.e. ne prend que les valeurs 0 et 1). On peut dériver les résultats de Lewis du résultat de Milne - le premier résultat de Lewis est même logiquement équivalent au résultat de Milne.

Remarque : la preuve de Milne montre que sous (HF), si $P(AC) > 0$, alors $P(A \Rightarrow C) = P(A \rightarrow C)$. On a vu par ailleurs que (HF) pouvait se dériver de la loi d'import-export (LIE). On a vu enfin que la (LIE) était la prémisse centrale de l'argument de Gibbard qui exhibait certaines conditions telles que si un conditionnel les satisfait, alors il se confond avec le conditionnel matériel. De ce point de vue, le résultat de Milne n'est pas si surprenant.

2. Résultat d'orthogonalité (Hall 1994): si P et P' satisfont (T), alors P et P' sont orthogonales i.e. il existe un énoncé A tel que $P(A) = 1$ et $P'(A) = 0$.

   Ce résultat implique les résultats de trivialité de Lewis parce que deux fonctions de probabilité telles que l'une provient de l'autre par conditionalisation ne peuvent être orthogonales. L'intérêt du résultat tient également dans le fait que d'autres révision des croyances probabilistes comme la conditionnalisation de Jeffrey sont incompatibles avec l'orthogonalité.

3. Résultat de finitude (Hajek 1989) : il ne peut y avoir de fonctions de probabilité satisfaisant (T) et non-triviales si l'ensemble de mondes possibles sous-jacents est fini.

   Plus précisément : si W est un ensemble de mondes, F une σ-algèbre sur W close par $\Rightarrow$, alors l'ensemble des fonctions de probabilité P sur $(W, F, \Rightarrow)$ qui satisfont (T) et qui sont non-triviales est vide si W est fini.

   Version "intuitive" de Adams, adaptée de Hajek : On suppose un ensemble fini de mondes possibles W, avec 10^6 mondes. On suppose que C correspond à une proposition qui représente 300000 mondes, idem pour A, et AC 100000 mondes. Chaque monde a la même probabilité. Donc, $P(AC), P(A\overline{C}) \geq 0$.

   Par définition: $P(C|A) = P(AC)/P(A) = 100000/300000 = 1/3$.

   Si $(A \Rightarrow C)$ exprime une proposition et que sa probabilité est égale à $P(C|A)$, alors $(A \Rightarrow C)$ devrait contenir $10^6/3$ mondes (ie $P(A \Rightarrow C)$ est la probabilité d'être dans un monde dans lequel $A \Rightarrow C$ est vrai) : mais c'est un impossible, par définition, une proposition contient un nombre entier de mondes.

   "Un rapport entre des aires n'est pas nécessairement une aire", de même "une probabilité conditionnelle n'est pas nécessairement la probabilité du conditionnel".

4. Soit une algèbre conditionnelle $(W, F, \Rightarrow)$ qui obéit aux trois principes suivants :

   (L1) $A \cap (A \Rightarrow B) \subseteq AB$ pour tous $A, B \in F$ [*modus ponens*]

   (L1') $\phi \wedge (\phi \Rightarrow \psi) \models \psi$

   (L2) $(A \Rightarrow B) \cap (A \Rightarrow C) \subseteq A \Rightarrow BC$ pour tous $A, B, C \in F$

   (L2') $(\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\phi \Rightarrow \chi) \models (\phi \Rightarrow (\psi \wedge \chi))$

(L2) $(A \Rightarrow B) \cap (B \Rightarrow A) \cap (B \Rightarrow C) \subseteq (A \Rightarrow C)$ [transitivité faible]

(L3') $(\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi) \models (\phi \Rightarrow \chi)$

alors il n'existe pas de fonction de probabilité non-triviale P sur $(W, F, \Rightarrow)$ qui satisfait (T).

On peut dériver (L1'), (L2') et (L3') du système **C2** de Stalnaker. Le résultat implique donc que, sauf cas triviaux, le conditionnel de Stalnaker ne peut obéir à la thèse (T).

4 Interprétations & réactions

4.1 Affaiblissements et aménagements de la Thèse

• Considérons la Version Doxastique de la Thèse. Elle peut survivre au premier résultat de Lewis, mais le second résultat de trivialité est directement dirigé contre elle. Hajek & Hall (1994) considèrent alors deux façons d'aménager la Version Doxastique qui neutralisent le second résultat de trivialité :
(1) affaiblir l'exigence d'uniformité sémantique du conditionnel. Lewis (1976) rejette une telle stratégie :

> "Even if there is a probability conditional for each probability function in a class, it does not follows that there is one probability conditional for the entire class. Different members of the class might require different interpretations of $\Rightarrow$ to make the probabilities of conditionals and the conditional probabilities come out equal. But presumably our indicative conditional has a fixed interpretation, the same for speakers with different beliefs, and for one speaker before and after a change in his beliefs. Else how are disagreements about a conditional possible, or changes of mind?"

Voir aussi Edgington (1995), p. 271:

> "We seek an X such that $P(X)$ and $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ cannot coherently come apart: an interpretation such that for all consistent distributions of belief over relevant domain, $P(X) = P(AB)/P(A)$. In a given belief distribution, there may be of course a proposition C (or several such propositions) which you believe to the same degree as you believe B given A. But if someone else, or you in a different information state, may consistently think C more, or less, likely than B given A, C is not the X we week."

L'idée est la suivante : s'il n'existe pas de $\Rightarrow$ qui satisfasse (T) pour tout $P \in \mathfrak{P}$, il se peut qu'il existe un conditionnel $\Rightarrow_P$ qui satisfasse (T) pour chaque $P \in \mathfrak{P}$. Dans le cas général, pour deux fonctions de probabilité P et P', $\Rightarrow_P$ et $\Rightarrow'_P$ sont alors différents. Selon Lewis, une telle absence d'uniformité n'est pas tenable : elle rendrait impossible le désaccord et le changement de croyances.

Hajek & Hall rejettent l'argument de Lewis : il est tout à fait possible que deux locuteurs soient d'accord ou en désaccord sur des énoncés dont le sens précis diffèrent pour l'un et pour l'autre. Il suffit vraisemblablement que le sens qu'ils attribuent à l'énoncé soit assez similaire. Pourquoi ne pas avoir une telle tolérance avec $\Rightarrow$? Si l'on adopte cette stratégie, il faut néanmoins montrer qu'il y a un sens dans lequel $\Rightarrow$ conserve à peu près le même sens dans l'ensemble de la classe $\mathfrak{P}$.

(2) amender la contrainte doxastique de clôture par conditionalisation : on a vu que la façon dont Lewis traduit la Version Doxastique, c'est en exigeant que la classe $\mathfrak{P}$ des fonctions de probabilités doxastiques soit close par conditionalisation. Mais on peut contester que la conditionalisation soit une bonne contrainte doxastique. Exemple : Appiah pour qui une fonction de croyance doit être **régulière** i.e. n'attribuer un poids nul à aucun monde possible. Or quand on conditionnalise sur B, la probabilité des $\bar{B}$-mondes devient nulle.

La réponse de Lewis correspond au 4ème résultat de trivialité de Lewis (1986) qui montre un résultat de trivialité pour une autre règle de changement de croyance, la règle de Jeffrey. D'après Hajek & Hall (1994), le résultat d'orthogonalité montre qu'une très large classe de règles de changement de croyances aboutissent à un résultat de trivialité.

• On peut se replier sur la Version Doxastique "sur mesure". Le problème, c'est que les résultat de trivialité "non-lewisien" imposent des contraintes très fortes sur la Version doxastique "sur mesure" ($\forall\exists$): de telles fonctions de croyances doivent porter sur un ensemble de mondes possibles infini ; elles doivent être complètes si elles satisfont (L1) (i.e. pour tout événement A, pour tout $r \in (0, P(A))$, il existe $B \subset A$ tq $P(B) = r$) ; elles ne peuvent satisfaire (L1)-(L3) ; si l'agent apprend une information, il doit vraisemblablement adopter une autre interprétation de $\Rightarrow$ (orthogonalité).

• On va passer désormais aux réactions qui, d'une manière ou d'une autre, acceptent le message négatif des résultats de trivialité : il ne se peut pas que $A \Rightarrow C$ soit une proposition et que sa probabilité soit (toujours) égale à $P(C|A)$. Ceux qui interprètent de cette façon les résultats de trivialité se trouvent face au choix suivant :

1. les conditionnels ne sont pas des propositions (thèse de non-propositionnalité ou encore thèse NTV (*No Truth Value*)).
2. la Thèse n'est pas vraie : la probabilité d'un conditionnel n'est pas la probabilité conditionnelle. Il faut cependant expliquer pourquoi la Thèse *semble* correcte. La stratégie principale consiste à rejeter la Thèse mais accepter la thèse d'Adams pour l'assertabilité.

4.2 *No Truth Value*

• Comme en témoignent ces extraits de Lewis et Edgington, rejeter la propositionnalité des conditionnels est une réaction très naturelle aux résultats de trivialité :

> "Assertability goes in general by probability because probability is probability of truth and the speaker wants to be truthful. If this is not so for indicative conditionals, perhaps the reason is that they have no truth values, no truth conditions,

> and no probabilities of truth. Perhaps they are governed not by a semantic rule of truth but by a rule of assertability." Lewis (1976)
>
> "If we stick to the Thesis, we must not think of conditionals as propositions, as truth bearers... Your degree of belief that B is true, on the supposition that A is true, cannot be consistently and systematically equated to your degree of belief that something is true, simpliciter." Edgington (1995)

• La thèse NTV est la suivante : les condionnels (indicatifs) ne n'expriment pas des propositions, ce ne sont pas des porteurs de valeur de vérité. C'est une thèse défendue notamment par A. Gibbard, E. Adams, D. Edgington, J. Bennett.

Pourquoi voir dans les résultats de trivialité un argument décisif en faveur de la thèse NTV ?

- si l'on adopte un cadre ensembliste (Hajek, Hall) plutôt que logique (Lewis, Adams), un conditionnel $A \Rightarrow C$ appartient à l'algèbre sur laquelle est définie la distribution de probabilité - c'est donc du point de vue sémantique un ensemble de mondes possibles.
- dans le cadre ensembliste comme dans le cadre logique, on autorise les conditionnels composés. Si les conditionnels sont des propositions, alors des connecteurs propositionnels peuvent les prendre comme arguments.

• Pour Lewis, la thèse NTV est trop forte:

> "I have no conclusive objection to the hypothesis that indicative conditionals are non-truth-valued sentences, governed by a special rule of assertability that does not involve their nonexistent probabilities of truth. I have an inconclusive objection, however: the hypothesis requires too much of a fresh start." (Lewis 1976, p. 141).

L'une des difficultés essentielles que Lewis voit dans la thèse NTV est le statut des conditionnels enchâssés: si l'on conçoit la probabilité conditionnelle non pas comme la probabilité de la vérité du conditionnel mais comme la probabilité que le conséquent soit vrai alors que l'antécédent l'est, dans ce cas il faut que l'antécédent et le conséquent soient des énoncés susceptibles d'être vrais ou faux. Donc par hypothèse cela exclut les conditionnels.

• On abordera lors de la prochaine séance les arguments que peuvent faire valoir les tenants de la thèse NTV. Il n'est pas sûr que le statut des conditionnels enchâssés les déservent :

> "Lewis remarked in passing that his triviality results might be evaded by restrictions on embedding, calling such restrictions a high price to pay, and offering this as an 'inconclusive objection' to the thesis that indicative conditionals do not have truth values. Against this, I submit that the intuitive linguistic data assemblent by Gibbard and others show this to be not a drawback but a merit in the Adams theory." Bennett (2003), p. 104

4.3 Théories pragmatiques (Grice, Lewis, Jackson): vérité vs. assertabilité

• Voici les grandes lignes de la théorie de Lewis (1976) :

1. les conditionnels (indicatifs) ont des conditions de vérité
2. les conditions de vérité des conditionnels (indicatifs) sont celles du conditionnel matériel
3. les conditions d'assertabilité du conditionnel diffèrent de ses conditions de vérité
4. les conditions d'assertabilité du conditionnel obiéssent à la thèse d'Adams, i.e. un conditionnel est assertable quand la probabilité conditionnelle correspondante est élevé

• L'une des difficultés intrinsèques de la thèse est bien sûr d'expliquer l'écart entre la probabilité que $(A \Rightarrow C)$ soit vrai (i.e. la probabilité que $(\neg A \vee C)$ soit vrai) et l'assertabilité de $A \Rightarrow C$: *pourquoi l'assertabilité du conditionnel correspond à la probabilité du conditionnel, plutôt qu'à la probabilité que le conditionnel matériel soit vrai.* ?

A la suite de Grice, Lewis fait intervenir des *facteurs pragmatiques*. Si $A \Rightarrow C$ est un conditionnel matériel, alors il est vrai dès que l'antécédent est faux. Dans une conversation normale, d'après Lewis, la seule motivation d'un locuteur pour asserter $A \Rightarrow C$ n'est pas qu'il croit (fortement) que A est faux - sinon il dirait simplement $\neg A$. Un tel cas de figure induit en erreur l'interlocuteur. Lewis en tire que plus la probabilité de $\neg A$ est forte, moins $A \Rightarrow C$ est assertable.

$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = P(A \rightarrow C) - P(\bar{A}).(P(\bar{C}A)/P(A))$$
$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = P(\bar{A} \vee C) - P(\bar{A}).(P(\bar{C}A)/P(A))$$
$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = P\overline{(\bar{C}A)} - P(\bar{A}).(P(\bar{C}A)/P(A))$$
$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = 1 - P(\bar{C}A) - P(\bar{A}).(P(\bar{C}A)/P(A))$$
$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = (P(A) - P(A).P(\bar{C}A) - P(\bar{A}).P(\bar{C}A))/P(A)$$
$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = (P(A) - (P(\bar{C}A).(P(A) + P(\bar{A})))/P(A)$$
$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = (P(A) - (P(\bar{C}A))/P(A)$$
$$\mathcal{A}(A \Rightarrow C) = P(CA)/P(A) = P(C|A)$$

Ce premier facteur pragmatique que Lewis fait intervenir correspond au paradoxe de la fausseté de l'antécédent. Mais on devrait s'attendre à un facteur symétrique concernant la vérité du conséquent - ce n'est pas le cas. Exemple de Jackson (1979) : supposons que l'on est convaincu que Carter sera réélu, que Reagan se présente ou non. Alors

(1) Si Reagan se présente, Carter sera réélu

(2) Si Reagan ne se présente pas, Carter sera réélu

ne devraient pas être assertable.
D'où la conclusion pour le moins tempéré de Lewis:

> "The best I can do to account for the absence of a marked diminution in the case of the probable consequent is to concede that considerations of conversational pointlessness are not decisive...
>
> Truth conditions plus general conversational considerations are not quite the whole story." (p. 307-8)

• Autre difficulté : • Problème avec cette analyse (van Rooij 2005, Grice 1989):

Yog et Zog jouent aux échecs. Yog a les blancs 9 fois sur 10.

Sur 100 parties, Yog a gagné 80 fois quand il avait les blancs, et perdu 10 fois quand il avait les noirs.

(3) Si Yog a eu les blancs, il y a une probabilité de 8/9 qu'il ait gagné.

(4) Si Yog n'a pas gagné, il y a une probabilité de 1/2 qu'il n'ait pas eu les blancs.

Problème si on donne portée large à l'opérateur de probabilité, sur le conditionnel matériel:
$P(B \to G) = 8/9$
$P(\neg G \to \neg B) = 1/2$

Les énoncés sont matériellement équivalents, mais la probabilité n'est pas la même. Lewis doit traiter le conséquent et l'antécédent du conditionnel de façon symétrique eu égard à la vérité, mais non symétrique eu égard à l'assertabilité.

• Lewis (1986) n'accepte plus la conception d'inspiration gricéenne mais se range derrière Jackson. Pour Jackson, les conditions de vérité du conditionnel sont toujours celles du conditionnel matériel. Mais de même que les conditions d'assertabilité de "...et..." sont différentes de celles de "...mais..." alors que leurs conditions de vérité sont les mêmes, de même les conditions d'assertabilité de "Si A alors C" sont différentes de celles de "Non A ou C".

Quand un locuteur asserte "Si A alors C", il croit (fortement) $A \to C$ et indique que sa croyance est **robuste** relativement à l'antécédent A : le locuteur n'abandonnerait pas sa croyance que $A \to C$ s'il s'avérait que A est vrai. Cela signifie que l'assertabilité de $(A \Rightarrow C)$ dépend de

$$P(A \to C|A) = P(\neg A \lor C|A) = P(AC|A) = P(C|A)$$

Puisque $P(A \to C) \geq P(C|A)$, dès que $P(C|A)$ est élevé, $A \Rightarrow C$ est assertable.

• Problèmes :

1. cas pathologiques :

   (5) If Reagan worked out for the KGB, I'll never find out

   Si on apprend la prémisse, alors on accepte plus le conditionnel. Le principe de robustesse est donc mis en défaut. Il y a des problèmes plus graves :

2. Edgington fait valoir que l'analogie avec et/mais n'est pas plausible : si l'on dit

   (6) Pierre est bien portant mais il est heureux

   on considèrera peut-être que l'énoncé est vrai même s'il est inapproprié d'employer "mais". Mais quelqu'un qui pense que les Républicains ne vont pas gagner la prochaine élection et qui entend

(7) Si les Républicains gagnent, ils vont doubler l'impôt sur le revenu

ne considèrera pas que c'est sans doute vrai quoique inapproprié. Il considèrera que c'est probablement faux.

3. Jackson et Lewis ne prennent en compte que les conditions d'assertabilité, mais la thèse d'Adams semble également supportée dans le cas des croyances (la Thèse à proprement parler) :

> "In restricting the application of Adams' Thesis to the assertabilities of conditionals, Lewis and Jackson ignore the fact that his claim is also supported by evidence as to what we are disposed to believe. For instance, I doubt very much that if I enter the next Olympic Games I will win a gold medal, even though it is very unlikely that I will enter. On the contrary I believe that if I enter I will lose miserably. It seems very artificial to insist that I nonetheless believe that the sentence "If I enter the next Olympic Game, I will win a gold medal" to most likely be true." Bradley (2002)

4.4 La théorie de Bradley : intuitions de départ

• Pour finir, quelques mots sur la théorie de R. Bradley qui l'exposera plus en détails vendredi prochain
• Il y a des énoncés comme ceux qui contiennent des indexicaux, auxquels sont associés des propositions uniquement quand un contexte (d'énonciation) est donné. On peut distinguer la **signification** et la **proposition** qu'elle exprime dans un contexte donné : une proposition est un ensemble de mondes possibles (l'ensemble des mondes possibles où, étant donné le contexte d'énonciation, l'énoncé est vrai) ; la signification est une fonction de contextes vers les propositions. Ici les contextes ne sont rien d'autre que des mondes possibles.
• Un conditionnel ne détermine une proposition que dans les contextes où leurs antécédents sont vrais. Si l'antécédent n'est pas satisfait, aucune proposition n'est déterminée.

- la signification d'un énoncé factuel est représentée par une fonction constante **constante** - dans tout monde, un énoncé factuel détermine une proposition
- la signification d'un conditionnel est représentée par une fonction constante **partielle** : si A est vrai en w, $A \Rightarrow C$ exprime $[[AC]]$, sinon aucune proposition n'est déterminée et le conditionnel n'est ni vrai ni faux.

5 Références

- Bradley, R. (2002) "Indicative Conditionals", *Erkenntnis*, vol. 56, pp. 343-78
- Edgington, D. "On Conditionals", *Mind*, vol. 104, n°414, 1995, pp. 235-329, § 6
- Hajek, A. & Hall, N. (1994), "The Hypothesis of the Conditional Construal of Conditional Probability", pp. 75-111
- Jackson, F. (1979) "On Assertion and Indicative Conditionals", *The Philosophical Review*, vol.88, n°4, pp. 565-89

- Lewis, D. (1976), "Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities", repr. in *Philosophical Papers II*, Oxford UP.
- Lewis, D. (1986),"Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities II", *The Philosophical Review*, vol. 85, n°4, pp. 581-89
- McGee, V. (1989), "Conditional Probabilities and Compounds of Conditionals", *The Philosophical Review*, vol.98, n°4, pp. 485-541
- Milne, P. (2003), "The Simplest Lewis-Style Triviality Proof Yet?", *Analysis*, vol.63, vol.4