Thèse d'Adams et résultats de trivialité : approfondissements

M. Cozic (DEC, ENS) & P. Égré (CNRS, IJN)

1 La théorie de Bradley

1.1 La condition de préservation

Bradley s'appuie sur une condition de rationalité des croyances:

- La condition de préservation: si $Pr(A) > 0$ et $Pr(B) = 0$, alors $Pr(A \to B) = 0$.

ex: je crois possible que nous allions à la plage, et impossible que nous nous baignions. Puis-je alors croire possible que, si nous allons à la plage, nous nous baignions?

- Définition: un langage est non-trivial s'il contient trois énoncés A, B et $A \to B$ tels que ni A ni $A \to B$ n'impliquent B.

- Résultat de trivialité: si $\langle L, \leq \rangle$ est une algèbre de Boole où les énoncés de L sont ordonnés par la relation d'implication $\leq$; alors si la condition de préservation vaut pour toutes les distributions de probabilité Pr sur L, L est un langage trivial.

Remarque: la généralisation de Bradley donne lieu à l'analogie suivante:

$$\frac{\text{Bradley}}{\text{These de Preservation}} \equiv \frac{\text{Lewis}}{\text{These d'Adams}}$$

- Remarque: en quel sens la condition de préservation est-elle plus générale que la thèse d'Adams? C'est que si $Pr(A \to B) = Pr(B|A)$, alors si $Pr(A) > 0$ et $Pr(B) = 0$, clairement $Pr(A \to B) = 0$ (car $Pr(AB) = 0$ si $Pr(B) = 0$, et donc $Pr(B|A) = 0$). Donc, tout conditionnel qui satisfait la thèse d'Adams satisfait la condition de préservation, ie la classe des conditionnels-Adams est incluse dans la classe des conditionnels-Bradley. A-t-on la réciproque? Non, car on pourrait imaginer a priori que $Pr(A \to B) = Pr(A)Pr(B)$. Une telle règle de probabilité des conditionnels satisfait la condition de préservation, mais on voit qu'elle ne satisfait pas l'égalité d'Adams.

- D'où la question: pourrait-on montrer que si un conditionnel satisfait la condition de préservation, plus une autre condition (autre que la thèse d'Adams), alors il satisfait la thèse d'Adams? En d'autres termes, pourrait-on factoriser la thèse d'Adams? (réponse de Bradley lors de sa conférence: pas évident, car il semble qu'on retombe chaque fois sur la thèse d'Adams).

1.2 La partialité

Conception de Bradley: "conditionals, unlike factual sentences, determine propositions only in those contexts in which their antecedents are true".

• L'idée de Bradley est que les conditionnels indicatifs n'expriment pas de proposition si leur antécédent s'avère faux. Bradley propose donc une logique partielle, dans laquelle les conditionnels peuvent n'être ni vrais ni faux.

• L'autre point important concerne la signification: la signification d'un énoncé n'est plus simplement identique à ses conditions de vérité, mais s'apparente plutôt à la notion kaplanienne de caractère (une fonction qui associe à un contexte la proposition exprimée par l'énoncé dans ce contexte). Le sens d'un énoncé est donc une fonction propositionnelle.

On distingue donc: $[\![A]\!]$=fonction partielle qui associe à un monde une proposition.

En simplifiant exprès la présentation de Bradley : $[\![A \rightarrow B]\!](w) = [\![\text{AB}]\!](w)$ si $[\![A]\!](w)(w) = 1$, et n'exprime aucune proposition sinon. Supposons que A et B déterminent des fonctions totales. Alors on a:

$[\![A \rightarrow B]\!](w)(w) = 1$ si $[\![\text{A}]\!](w)(w) = [\![\text{B}]\!](w)(w) = 1$

$[\![A \rightarrow B]\!](w)(w) = 0$ si $[\![\text{A}]\!](w)(w) = 1$ et $[\![\text{B}]\!](w)(w) = 0$

$[\![A \rightarrow B]\!](w)(w) = \#$ si $[\![\text{A}]\!](w)(w) = 0$

1.3 Conséquences pour la trivialité

Selon Bradley, la probabilité d'un conditionnel est égale à la probabilité que le conditionnel soit vrai, *étant donné* qu'il exprime quelque chose de vrai. Si on note $[A] = \{w;\ [\![\text{A}]\!](w)(w) = 1\}$, alors on a: $[A \rightarrow B] = [AB]$. Cependant, il est faux que:

$$Pr(A \rightarrow B) = Pr([A \rightarrow B])$$

ie la probabilité d'un conditionnel, vue comme probabilité conditionnelle, n'est pas "la probabilité de l'ensemble des mondes où le conditionnel est vrai", tout simplement parce que $Pr([A \rightarrow B]) = Pr([AB]) \neq Pr([B]|[A])$.

• Question: qu'implique l'approche de Bradley touchant la notion de probabilité d'un conditionnel? touchant les théories non-vériconditionnalistes?

Il semble que Bradley maintient que les conditionnels ont des conditions de vérité d'une part, et d'autre part il maintient aussi la thèse d'Adams. Mais son idée est que les conditionnels expriment des fonctions propositionnelles partielles (et non pas simplement des propositions).

L'approche de Bradley a en commun ave NTV qu'on rejette l'idée qu'un conditionnel exprime une proposition. Mais pour Bradley cela signifie quelque chose de tout à fait différent: cela ne signifie pas que les conditionnels n'ont pas de conditions de vérité; cela signifie qu'un conditionnel, en un contexte donné w peut très bien exprimer une proposition différente de la proposition qu'il exprime en un contexte w'. Supposons que $A(w)(w) = A(w')(w') = 1$. Il se peut cependant que $A(w) \neq A(w')$. Et aussi, cela signifie qu'un conditionnel peut ne pas exprimer de proposition dans certains cas.

2 Kaufmann sur la thèse d'Adams

Kaufmann (2004) discute plusieurs contre-exemples à la thèse d'Adams. On propose ici l'examen de l'un de ces exemples, et une discussion de l'incidence de ce type d'exemple pour la thèse d'Adams et le résultat de Lewis.

2.1 Un contre-exemple à la thèse d'Adams

Scenario (Kaufmann 2004, ex. 1): on doit tirer une boule d'une urne, X ou Y. L'urne X contient 10 boules rouges, dont 9 marquées d'une tache noire, et 2 boules blanches. L'urne Y contient 10 boules rouges, dont 1 marquée d'une tache noire, et 50 boules blanches. Le choix de l'urne est aléatoire: il y a 1 chance sur 4 de tirer X, et 3 chances sur 4 de tirer Y.

Problème: quelle est la probabilité du conditionnel suivant:

(1) Si je tire une boule rouge, elle aura une tache noire

• Réponse majoritaire des sujets testés par Kaufmann:

$$\begin{aligned} P(R \to N) &= P(R \to N|X)P(X) + P(R \to N|Y)P(Y) \\ &= P(N|RX)P(X) + P(N|RY)P(Y) \\ &= 9/10 \times 1/4 + 1/10 \times 3/4 = 0.3 \end{aligned}$$

• Quelle est la probabilité conditionnelle, ie $P(N|R)$?

$$\begin{aligned} P(N|R) &= P(NR)/P(R) \\ &= P(N|RX)P(X|R) + P(N|RY)P(Y|R) \\ &= 9/10 \times 5/8 + 1/10 \times 3/8 = 0.6 \end{aligned}$$

Les deux probabilités obtenues sont pondérées différemment: dans un cas par $P(X)$ et $P(Y)$, dans l'autre par $P(X|R)$ et $P(Y|R)$. Kaufmann appelle la première probabilité du conditionnel la probabilité *locale*, et la seconde la probabilité *globale*.

Kaufmann fait plusieurs observations sur cet exemple:

• La probabilité du conséquent (avoir une tache noire) dépend non seulement de la probabilité de l'antécédent (être une boule rouge), mais d'une troisième variable (être tiré dans X ou dans Y).

• Le raisonnement n'est pas le même d'un cas à l'autre. Dans le cas de la probabilité locale, le raisonnement informel pourrait être du type (la reconstruction n'est pas exactement celle de Kaufmann):

(2) a. Soit la boule rouge provient du sac X, soit elle provient du sac Y.
b. Si elle provient du sac X, il y a 9 chances sur 10 qu'elle ait une tache noire.
c. Si elle provient du sac Y, il y a 1 chance sur 10 qu'elle ait une tache noire.

• Dans le cas de la probabilité globale, le raisonnement serait du type (reconstruction de Kaufmann):

(3) a. Il est improbable que je tire une boule rouge.

b. Mais supposons que ce soit le cas.

c. Alors c'est probablement qu'elle aura été tirée du sac X.

d. Et alors la probabilité qu'elle ait une tache noire, sachant qu'elle est rouge, est relativement élevée.

La prémisse a est justifiée par le fait que $P(R) = P(R|X)P(X) + P(R|Y)P(Y) = 1/3$, et c l'est par le fait que $P(X|R) = \frac{P(R|X)P(X)}{P(R)} = 5/8$.

• Le passade de b à c est une inférence de type abductive, dont on rend compte par la règle de Bayes, et donc par la probabilité conditionnelle $P(R|X)$. Ce que dit Kaufmann, c'est que la probabilité globale est plus adaptée à une forme de raisonnement abductif dans lequel on pourrait effectivement observer l'antécédent (c'est une boule rouge). En revanche, le probabilité locale, manifestement préférée des locuteurs, est apparemment plus adaptée à une forme de raisonnement hypothétique.

2.2 Remarques

• Kaufmann défend l'idée selon laquelle l'usage de la probabilité locale, plutôt que de la conditionnalisation bayésienne, n'est pas simplement une erreur, due à une illusion, mais un mode de calcul dont la rationalité est défendable.

• La probabilité globale, obtenue par conditionnalisation dans ce scénario, correspond à la *probabilité conditionnelle*. La probabilité locale, qui relève de l'heuristique intuitive des sujets, est ici la probabilité (intuitive) *du* conditionnel.

• On pourrait essayer de présenter autrement la notion de probabilité locale de Kaufmann, en essayant de décrire un peu différemment la manière dont les sujets répondent à la question: "quelle est la probabilité pour que, si R, alors N?".

Imaginons que les sujets se disent: pour calculer la probabilité de "si la boule est rouge, elle aura une tâche noire", calculons la probabilité du conséquent "la boule aura une tâche noire" *sous l'hypothèse que la boule est rouge*. Imaginons donc que ce qui intéresse les sujets, c'est une certaine "probabilité de N, sous l'hypothèse que R", qu'on noterait $P_R(N)$. Il se pourrait que les sujets raisonnent effectivement par cas, mais en se disant:

(4) $P_R(N) = P_R(NX) + P_R(NY) = P_R(N|X)P_R(X) + P_R(N|Y)P_R(Y)$ (soit la boule en question vient de X, soit elle vient de Y)

Il suffit de supposer que les sujets supposent:
$P_R(N|X) = 9/10$ ("si cette boule provient de X, il y a 9 chances sur 10 qu'elle soit noire")
$P_R(N|Y) = 1/10$ ("si cette boule provient de Y, il y a 1 chance sur 10 qu'elle soit noire")
$P_R(X) = 1/4$ ("la probabilité de tirer X est de 1/4")
$P_R(Y) = 3/4$ ("la probabilité de tirer Y est de 3/4").

Notons que dans ce cas, cela revient à considérer comme non-pertinentes les probabilités d'avoir une boule rouge ou d'avoir une boule blanche. Cette façon de présenter les choses est très proche de celle de Kaufmann, mais néanmoins distincte: ce qu'elle suggère, c'est que les sujets ne distinguent pas $P_R(X)$ de $P(X)$, c'est-à-dire, en effet, que les sujets ne raisonnent pas de façon bayésienne dans ce scénario: la probabilité a priori que la boule soit dans X et la probabilité que la boule soit dans X, sous l'hypothèse qu'elle est rouge, sont les mêmes. Mais si on présente de cette façon les choses, alors on doit dire qu'en raisonnant comme indiqué en (4), le raisonnement des sujets est valide. Ce qu'on peut leur reprocher, en revanche, c'est éventuellement de partir de prémisses fausses (ie contester que $P_R(X)$ a la valeur 1/4).

• La conclusion que tire Kaufmann est: "there is no denying that the probabilities of conditionals are not always the corresponding conditional probabilities". La distinction que fait Kaufmann entre "observer" et "supposer" est par ailleurs attestée du point de vue linguistique. Noter le contraste entre:

(5) Si cette boule est rouge, la probabilité de tirer X est de 1/4.

(6) Si cette boule est rouge, la probabilité d'avoir tiré X est de 1/4.

Il semble qu'en passant de la probabilité locale à la probabilité globale, il y ait exactement la même différence de sens. En identifiant $Pr_R(X)$ à $P(X)$ plutôt qu'à $P(X|R)$, les sujets se réfèrent manifestement au premier sens (probabilité a priori de X, indépendante de R, par opposition à la probabilité a posteriori de X, dependante de R).

3 No Truth Value

3.1 Introduction

• La thèse NTV est une thèse extrêmement radicale :

> "In asserting or believing a conditional, we do not aim at its being *true*: to assert it is not to assert that it is *true*, to believe it is not to believe that it is *true*, to think it probable is not to think that it is probably *true*..." (Edgington, Ms.)

En quoi consiste l'assertion que si A alors C ou la croyance que si A alors C s'il ne s'agit pas de l'assertion ou de la croyance que quelque chose est vrai ? Edgington a recours à une notion de d'**assertion** (ou d'attitude propositionnelle) **conditionnelle**: asserter "Si A alors C" n'est pas asserter qu'une certaine proposition exprimée par "Si A alors C" est vraie mais asserter C conditionnellement à A :

> "Believing that if A, C is not taking the attitude of belief to a proposition, $A * C$; it is believing that C under the supposition that A" (Edgington, Ms.)
>
> "An affirmation of the form "if p then q" is commonly felt less as an affirmation of a conditional than as a conditional affirmation of the consequent." (Quine, 1952)

Que signifient ces notions d'assertions ou de croyances conditionnelles ?

> "A conditional assertion "if A, B" is an assertion of B when A is true, and an assertion of nothing when A is false. It is natural, then, to say my conditional assertion is true if A and B, and false if A is true and B is not, and has no truth value when A is false." (Edgington 1995)
>
> ... we can say this: to assert a conditional is to assert that it is *true* on condition that it has *truth* value. To believe a conditional it to believe that it is *true* on

> the supposition that it has a *truth* value. It has a *truth* value iff its antecedent is true...to believe it is to believe that $A \wedge C$ is true on the supposition that A is." (Edgington, Ms.)

• Nous avons vu que les résultats de trivialité motivaient une thèse radicale sur les conditionnels (indicatifs), la thèse de non propositionnalité ou *No Truth Value*. Selon Bennett (2003, § 41), il existe *4 principaux arguments en faveur de NTV :*

1. les résultats de trivialité (Lewis, Hajek, etc.)
2. la violation du Principe de Préservation (Bradley)
3. l'argument d'Edgington (1986)
4. l'argument de Gibbard : le scénario de Sly Pete

Nous avons vu les arguments 1. et 2. ; nous allons nous intéresser désormais à l'argument de Gibbard qui met en avant la *subjectivité* des conditionnels.

3.2 Le scénario de Gibbard (Sly Pete)

• Le scénario de Gibbard (1981) :

> Sly Pete and Mr. Stone are playing poker on a Mississippi riverboat. It is now up to Pete to call or fold. My henchman Zack sees Stone's hand, which is quite good, and signals its content to Pete. My henchman Jack sees both hands, and sees that Pete's hand is rather low, so that Stone's is the winning hand. At this point, the room is cleared. A few minutes later, Zack slips me a note which says "If Pete called, he won", and Jack slips me a note which says "If Pete called, he lost". I know that these notes both come from my trusted henchmen, but do not know which of them sent which note. I conclude that Pete folded.

Remarque 1 : voici la situation épistémique selon Gibbard:
(a) Pete a la main perdante
(b) Pete connaît sa main ainsi que celle de Stone
(c) Pete est disposé à se coucher s'il sait qu'il a la main perdante
(d) Pete s'est couché
Zack sait (b) et (c) et peut soupçonner que (a) donc que (d)
Jack sait (a) et (c) et peut soupçonner que (b) donc que (d)
Remarque 2 : comme Gibbard le remarque, la Thèse s'accorde bien avec le scénario. La probabilité de Zack en C étant donné A (et ses informations) est élevée, celle de Jack en $\neg C$ étant donné A (et ses informations) également.

• **Loi de Non-Contradiction Conditionnelle :** $A \Rightarrow C$ et $A \Rightarrow \neg C$ sont incompatibles La (LNCC) est valide dans la sémantique de Stalnaker comme dans celle de Lewis. Le scénario de Sly Pete est présenté comme une exception à (LNCC) - ou du moins comme une "anomalie" du point de vue de (LNCC). Bien sûr, (LNCC) *n'est pas* validée par le conditionnel matériel.

• Selon Gibbard, aucun des deux conditionnels ne peut être faux. Pourquoi ? Parce que chacun des deux conditionnels est assertable par Zack et Jack respectivement étant donné leurs croyances respectives. Or, aucune de leurs croyances n'est fausse. Selon Gibbard, on ne peut sincèrement asserter quelque chose de faux que si l'on a certaines croyances fausses :

> "For one sincerely asserts something false only when one is mistaken about something germane. In this case, neither Zack nor Jack has any relevant false beliefs."

Si aucun des deux énoncés ne peut être faux et si les deux ne peuvent pas être vraies (LNCC), alors cela remet en question le fait que les énoncés aient des valeurs de vérité :

> "Although "If Pete called, he won" has a clear acceptance condition, it does not have clear truth conditions. Suppose that in fact, as Zack suspects, Pete did not call, because he know he held a losing hand. It is not clear what then has to be true for "If Pete called, he won" to be true."

3.3 Le scénario d'Edgington (1995)

Problème avec le scénario de Sly Pete : on a reproché à la situation de Jack et Zack de ne pas être symétrique. On peut penser que la croyance de Jack est meilleure que celle de Zack ou que le conditionnel de Jack est vrai alors que celui de Zack est faux. C'est par exemple la réaction de Lycan (2001):

> "Unlike Zack and Jack themselves, we know all the facts of the riverboat situation. Relative to those facts, which of our two conditionals is the correct one ? *Given that Pete's hand was in fact worse than Stone's*, I think we have to conclude with Jack that if Pete called, he lost. There is simply no sense in which it is true that if Pete called he won."

Edgington offre l'exemple suivant pour corriger les défauts de Sly Pete :

> "In a game, (1) all red square cards are worth 10 points, and (2) all large square cards are worth nothing. X caught a glimpse as Z picked a card and saw that it was red. Knowing (1), he believes "If Z picked a square card, it's worth 10 points". Y, seeing it bulging under Z'jacket, where Z is keeping it out of view, knows it's large. Knowing (2), he believes "If Z picked a square card, it's worth nothing". (Someone who knows all the relevant facts knows it isn't square, and has no use for a conditional beginning "If it's square".)"

Selon Edgington, (a) la situation est symétrique, les croyances de X ne sont pas meilleures que celles de Y et réciproquement ; (b) ni X ni Y ne fait d'erreur et il paraît pour le moins étrange de considérer que les deux croyances sont fausses.

> " [X and Y's beliefs] can't both be true, they can't both be false, and it can't be that just one of them is true. Truth and falsity are not suitable terms of assessment for conditionals."

• Quelle est la portée du phénomène de Gibbard ? Selon Edgington, pour tout conditionnel contingent, le monde peut être tel que le phénomène de Gibbard apparaisse - que ce conditionnel soit indicatif ou non. Plus précisément, dès que l'antécédent A du conditionnel entre en conflit avec certains faits, on peut obtenir une situation à la Gibbard.

• L'**objectivité sans la vérité :**

> "...it is hard to accept that for all those traditionally classified as indicative conditional judgments, there is no objectively correct opinion, depending on how the world is. I say 'If you touch the wire, you will get a shock' or 'If you eat those, you will be ill'...I seem to be saying something objective about which I can be right or wrong, independently of the truth value of the antecedent." Edgington (Ms.)

Si A est exclu et qu'on accepte la notion de probabilité objective ou de chance, alors $Ch(A) = 0$. Mais cela implique que pour n'importe quelle formule C, $Ch(C|A)$ est non définie. Par conséquent, si l'on associe à la probabilité du conditionnel la probabilité (objective) conditionnelle, alors il n'y a pas de guide "objectif" pour "Si A alors C".

> "The present objective chance of C given A exists only if the present objective chance of A is non-zero. If A is false and concerns the past, then its present objective chance is zero. Then objectivity goes by the board. That, to my mind, is the lesson of Gibbard's argument."

Que signifie exactement la suspension de l'objectivité quand $Ch(A) = 0$? Que pour toute formule B, aussi bien $A \Rightarrow B$ que $A \Rightarrow \neg B$ sont acceptables ?

4 Références

- Bennett, J. (2003), *A Philosophical Guide to Conditionals*, chap. 6
- Bradley, R. (2002), Indicative Conditionals, *Erkenntnis*.
- Edgington, D. (1995) "On Conditionals", *Mind*, vol. 104, n°414, 1995, pp. 235-329, § 6
- Edgington, D. (Ms.) "Conditionals, Truth and Objectivité", Manuscrit
- Gibbard, A. (1980) "Two Recent Theories of Conditionals", dans Harper, W.L. & ali. *Ifs*, Dordrecht, 1980
- Kaufmann, S. (2004), Conditioning against the Grain, *Journal of Philosophical Logic*, 33: 583-606, 2004.
- Lycan, W. (2001) *Real Conditionals*, Oxford UP, chap. 4 & 8