

# 1 Introduction

- situation d'incertitude *lato sensu* : l'agent ne sait pas quelle sera la conséquence  $c \in C$  qui adviendra s'il choisit l'action  $a \in A$ .

- Il y a néanmoins des formes très diverses d'incertitudes. Les situations de **risque** sont les situations où le décideur a connaissance de relations probabilistes entre actions et conséquences. Plus précisément, il sait pour toute action  $a$  et pour toute conséquence  $c$  avec quelle probabilité l'action  $a$  produit la conséquence  $c$ . Voici un exemple de choix risqué :

## Exemple 1 (deux tickets de loterie)



- En théorie du choix risqué, on identifie les actions aux distributions de probabilités qu'elles induisent (par hypothèse) sur les conséquences. Dans le cas où  $C$  est fini, on peut voir une action  $P$  comme une fonction  $P : C \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\sum_{c \in C} P(c) = 1$ .

- Remarque 1 : on fait usage ici d'une notion de probabilité qui n'est pas la notion générale dont on se sert habituellement (mesure  $\sigma$ -additive définie sur une  $\sigma$ -algèbre). On se rapprochera de cette notion plus générale en théorie du choix incertain.
- Remarque 2 : les conséquences  $c \in C$  doivent se concevoir comme mutuellement exclusives.
- Remarque 3 : les conséquences  $c \in C$  ne sont pas nécessairement monétaires ; dans le cas particulier où elles le sont toutes, on parlera de "loterie monétaire".
- Remarque 4 : pour désigner les probabilités en jeu dans le modèle d'espérance d'utilité en situation de risque, on parle souvent de *probabilité objective* et de *modèle d'espérance objective d'utilité*. C'est assez trompeur, car les relations entre les probabilités des situations dites de risque et l'interprétation objective des probabilités (fréquence, propension, etc.) sont loin d'être évidentes. Il y a un sens d'"objectivité" qui est pertinent, c'est le suivant : les probabilités ne sont pas censées différer d'un décideur à l'autre. Les préférences, les utilités peuvent changer d'un décideur à l'autre, pas les probabilités. Ce que l'on suppose en fait, c'est que les probabilités sont exogènes ("données" aux décideurs) et partagées (par tous les décideurs).

## 2 Le modèle d'espérance de gain

- Question : comment déterminer la valeur d'une action risquée ? comment choisir entre différentes actions risquées ?

- proposition fondamentale : (dans le cas de loteries monétaires) pondérer les différents gains possibles par la probabilité qu'ils arrivent

▷ Arnauld & Nicole, *Logique de Port-Royal* (1662) :

“...pour juger de ce que l'on doit faire pour obtenir un bien ou pour éviter un mal, il ne faut pas seulement considérer le bien ou le mal en soi, mais aussi la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas, et regarder géométriquement la proportion que toutes ces choses ont ensembles”

### Exemple 2



$$EG(L_1) = (0.6 \times 5) + (0.4 \times 3) = 4.2$$

$$EG(L_2) = (0.1 \times 10) + (0.9 \times 2) = 2.8$$

- Formule générale : l'espérance de gain d'une action identifiée à la loterie monétaire  $P$  définie sur  $C$  est

$$EG(P) = \sum_{x \in C} P(x) \cdot x$$

La règle de décision associée est la suivante : choisir l'action dont l'espérance de gain est maximum.

- Le modèle d'espérance de gain rencontre un certain nombre de difficultés dont la plus célèbre est sans doute le **paradoxe de Saint-Petersbourg**. Une pièce non-biaisée est lancée de manière répétée jusqu'à ce qu'elle tombe sur face ( $F$ ). Les paiements (et probabilités induites) sont comme suit :

| série  | F   | PF  | PPF | ... | P...PF           | ... |
|--------|-----|-----|-----|-----|------------------|-----|
| proba. | 1/2 | 1/4 | 1/8 | ... | 1/2 <sup>n</sup> | ... |
| gain   | 2   | 4   | 8   | ... | 2 <sup>n</sup>   | ... |

Question : quelle est la valeur du pari de St-Petersbourg ?

Selon le (MEG),  $EG(StP) = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$

- Proposition de Daniel Bernoulli (1738) : distinguer le gain monétaire (la conséquence, disons  $x$ ) et la satisfaction que l'agent en retire ou l'utilité (disons  $u(x)$ ). On peut alors substituer  $u(x)$  à  $x$  dans l'espérance de gain pour obtenir l'espérance d'utilité :

$$EU(P) = \sum_{x \in C} P(x).u(x)$$

Comment est-ce cela permet de résoudre le Paradoxe de Saint-Petersbourg ? En imposant certaines conditions sur  $u(.)$  : on suppose que l'argent a une utilité marginale décroissante. On peut considérer par exemple  $u(x) = \log(x)$ . Dans ce cas, l'espérance d'utilité  $EU(StP) \simeq 0.6$  et la valeur monétaire du Pari est (environ) 4 euros.

- rem 1 : on peut construire un super-paradoxe de St-Petersburg pour l'utilité (subjective) : si la pièce tombe sur  $F$  au  $n$ -ème lancer, l'agent reçoit l'équivalent de  $2^n$  "utiles"
- rem 2 : la notion d'utilité change de signification par rapport à celle qui servait simplement à représenter les préférences ; elle reflète désormais l'*intensité* des désirs



- supposons que les conséquences soient évaluées en "utiles" ; alors cette fois Pierre doit choisir  $a_3$  et non  $a_1$

### 3 Le modèle d'espérance d'utilité

#### 3.1 Les loteries

- Les objets de choix de l'agent sont des **loteries** c'est-à-dire des distributions de probabilité sur l'ensemble des conséquences  $C$ . Si l'on suppose  $C$  fini, alors l'ensemble  $\mathbf{P}$  des loteries se ramène à l'ensemble des fonctions  $P : C \rightarrow [0, 1]$  telles que  $\sum_{x \in C} P(x) = 1$ . Si l'on numérote les conséquences  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ , alors on peut écrire une loterie  $P$  de la manière suivante :

$$P = (c_1, p_1; \dots; c_n, p_n) \text{ ou } P = (P(c_1), \dots, P(c_n)) \text{ ou } P = (p_1, \dots, p_n)$$

- Le triangle de Marschak-Machina

Dans le cas particulier où  $|C| = 3$ , on peut même se contenter de spécifier les loteries en donnant deux des trois probabilités sur les conséquences puisque la troisième se déduit de la donnée des deux premières. Pour  $|C| = 3$ , on a une élégante représentation dans le plan et de l'ensemble  $\mathbf{P}$  des loteries, et des propriétés du MEU. Cette représentation s'appelle le triangle de Marschak-Machina.

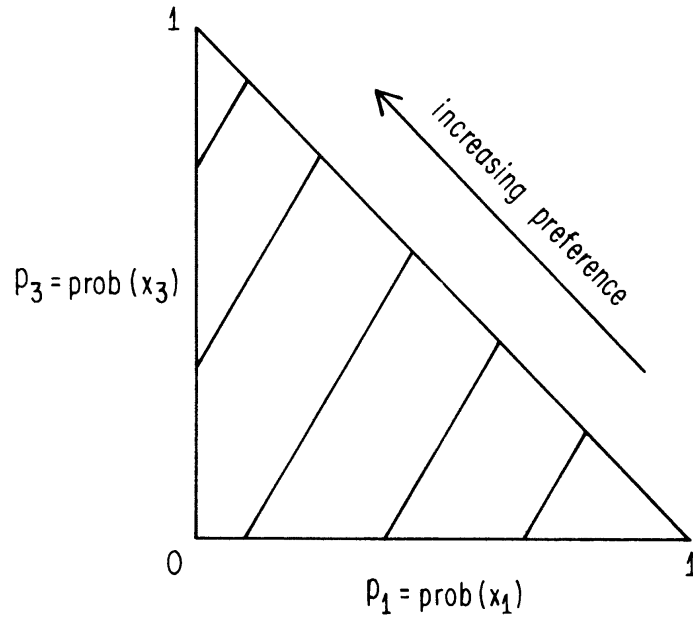


Fig. 2. Expected utility indifference curves in the triangle diagram

Tout point du triangle correspond à une distribution de probabilité sur  $C$ . Un point de l'un des côtés du triangle est une distribution qui attribue une probabilité nulle à l'une des trois conséquences. Les trois distributions dégénérées  $\delta_1 = (1, 0)$ ,  $\delta_2 = (0, 0)$  et  $\delta_3 = (0, 1)$  correspondent aux trois extrémités du triangle.

Conventionnellement,  $p_3$  est en ordonnée et  $p_1$  en abscisse; et  $\delta_3 \succ \delta_2 \succ \delta_1$ , ce qui signifie que l'agent préfère la conséquence 3 à la conséquence 2 et la conséquence 2 à la conséquence 1 (je reviendrai plus bas sur la notation  $\delta$ ).

Dans le triangle, les courbes d'indifférence sont les loteries entre lesquelles l'agent est indifférent. Deux distributions de probabilités  $(p_1, p_3)$  et  $(p'_1, p'_3)$  appartiennent à la même courbe d'indifférence ssi l'agent est indifférent entre elles ssi  $EU(p_1, p_3) = EU(p'_1, p'_3)$ . Une courbe d'indifférence est l'ensemble des distributions de probabilités qui ont la même espérance d'utilité (disons  $\bar{u}$ ).

Les courbes d'indifférence sont données par des équations de la forme :

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^3 u(c_i) \cdot p_i = u(c_1)p_1 + u(c_2)(1 - p_1 - p_3) + u(c_3)p_3$$

Toutes les courbes d'indifférence sont des droites de pente

$$u(c_2) - u(c_1) / u(c_3) - u(c_2)$$

En effet,

$$(u(c_2) - u(c_1)).p_1 + \bar{u} = (u(c_3) - u(c_2)).p_3$$

$$p_3 = u(c_2) - u(c_1) / u(c_3) - u(c_2).p_1 + \bar{u} / u(c_3) - u(c_2)$$

### 3.2 Mixages de loteries et indépendance

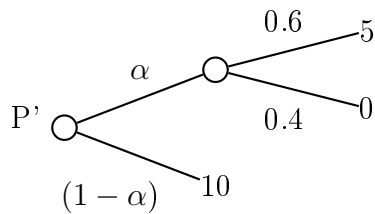
#### Définition 1

Soit  $P$  et  $Q$  deux distributions de probabilités sur  $C$  ; pour  $\alpha \in [0, 1]$ , on appelle  $\alpha$ -**mixage** de  $P$  et  $Q$  la distribution de probabilité notée  $\alpha P \oplus (1 - \alpha)Q$  et définie ainsi :

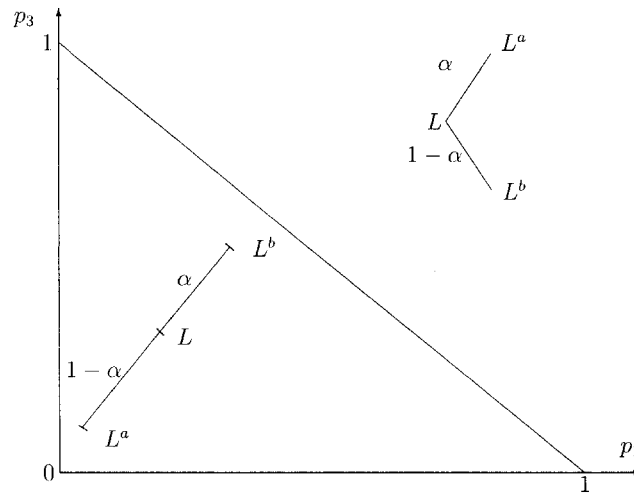
$$\forall x \in C, \alpha P \oplus (1 - \alpha)Q(x) = \alpha P(x) + (1 - \alpha)Q(x).$$

Noter tout d'abord qu'un  $\alpha$ -mixage de loteries est une loterie, i.e. une distribution de probabilité sur  $C$ . L'ensemble des loteries sur  $C$  est donc clos par  $\alpha$ -mixage. Analogie : l'ensemble des entiers naturels est clos par l'addition.

On peut concevoir les  $\alpha$ -mixages de distributions de probabilité comme des *loteries composées* où la loterie  $P$  est tirée avec probabilité  $\alpha$  et la loterie  $Q$  avec probabilité  $(1 - \alpha)$ . Voici par exemple une manière de représenter l' $\alpha$ -mixage  $P'$  de  $P$  et de la loterie dégénérée qui donne 10 euros avec probabilité 1 :



- On peut représenter l' $\alpha$ -mixage dans le triangle MM :



**Figure 1.1**  
Compound lottery,  $L = \alpha L^a(1 - \alpha)L^b$ , in the Machina triangle

• Chaque loterie peut être conçue comme un mixage de loteries dégénérées, i.e. de loteries qui produisent l'une des conséquences  $x \in C$  avec certitude. On note génériquement une telle loterie  $\delta_x$ . Soit  $P \in \mathbf{P}$  une loterie. Alors on peut vérifier que

$$P = \sum_{x \in C} P(x) \cdot \delta_x$$

- où la “somme” se comprend comme un mixage à  $|C|$  arguments.

Le critère d'espérance d'utilité satisfait la propriété de **préservation par mixage** (ou linéarité) : l'espérance d'utilité d'un  $\alpha$ -mixage de  $P$  et  $Q$  est la somme pondérée (par  $\alpha$  et  $(1 - \alpha)$ ) de l'espérance d'utilité de  $P$  et de celle de  $Q$ . En d'autres termes,

$$EU(\alpha P + (1 - \alpha)Q) = \alpha EU(P) + (1 - \alpha)EU(Q)$$

*Preuve.*

$$EU(\alpha P + (1 - \alpha)Q) = \sum_{x \in C} [\alpha P(x) + (1 - \alpha)Q(x)] u(x)$$

$$= \sum_{x \in C} \alpha P(x) \cdot u(x) + \sum_{x \in C} (1 - \alpha)Q(x) \cdot u(x)$$

$$= \alpha EU(P) + (1 - \alpha)EU(Q) \spadesuit.$$

C'est une propriété très importante, et la réciproque est vraie : si  $V : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction d'utilité qui satisfait la préservation de mixage, alors  $V(\cdot)$  a une forme d'utilité espérée. En effet, étant donné que l'on peut voir toute loterie  $P$  comme  $\sum_{x \in C} P(x) \cdot \delta_x$ , si l'on applique ensuite la préservation de mixage on obtient

$$V(P) = \sum_{x \in C} P(x) \cdot V(\delta_x)$$

Il suffit alors de prendre comme fonction d'utilité  $v : C \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $v(x) = V(\delta_x)$ .

### Définition 2

Une fonction d'utilité  $U : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  a une forme d'utilité espérée s'il existe une fonction d'utilité  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour toute loterie  $P$ ,

$$U(P) = \sum_{x \in C} u(x) \cdot P(x)$$

La remarque précédente s'énonce rigoureusement dans la proposition suivante :

### Proposition 1

Une fonction d'utilité  $U : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  a une forme d'utilité espérée ssi elle satisfait la préservation par mixage.

• Un autre corrolaire fondamental de la préservation de mixage est la propriété d'indépendance

### Proposition 2

Soient des loteries  $P, Q, R$  et  $\alpha \in ]0, 1]$ .  $EU(P) > EU(Q)$  ssi  $EU(\alpha P \oplus (1 - \alpha)R) > EU(\alpha Q \oplus (1 - \alpha)R)$

*Preuve.*

En vertu de la préservation par mixage, on sait que  $EU(\alpha P \oplus (1 - \alpha)R) = \alpha EU(P) + (1 - \alpha)EU(R)$ . Si  $\alpha \in ]0, 1]$ ,

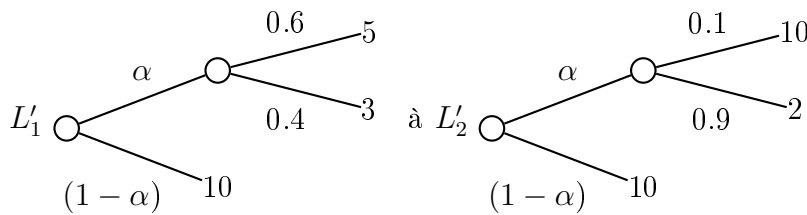
$$\begin{aligned} EU(P) > EU(Q) &\Leftrightarrow \alpha EU(P) > \alpha EU(Q) \\ &\Leftrightarrow \alpha EU(P) + (1 - \alpha)EU(R) > \alpha EU(Q) + (1 - \alpha)EU(R) \\ &\Leftrightarrow EU(\alpha P \oplus (1 - \alpha)R) > EU(\alpha Q \oplus (1 - \alpha)R) \end{aligned}$$

Interprétation en termes de loteries composées : les préférences entre deux loteries ne changent pas quand on compose chaque loterie avec une même troisième dans les mêmes proportions

– exemple : si Pierre préfère



alors il préfère également



**Remarque 1 (Maximin et indépendance (Rubinstein 2006))**

Voici une règle de décision qui viole l'axiome d'indépendance : supposons que l'agent ait une fonction d'utilité  $v : C \rightarrow \mathbb{R}$  et qu'il évalue une loterie selon la pire des conséquences qu'elle puisse produire. Autrement dit,

$$V(P) = \min_{\{x \in C : P(x) > 0\}} v(x)$$

Supposons que  $L_1 \succ L_2$ . Il suit de l'axiome d'indépendance que  $1/2L_1 \oplus 1/2L_2 \succ L_2$ . Impossible.

• Quand nous avons étudié le modèle de choix certain, nous avons montré que lorsqu'une fonction d'utilité  $U(\cdot)$  représentait  $\succeq$ , toute transformation croissante la représentait également. En situation de risque, quand on s'intéresse à des fonctions d'utilités v.N-M (i.e. qui ont une forme d'espérance d'utilité), ce n'est pas vrai. Toute transformation croissante d'une fonction d'utilité v.N-M  $U(\cdot)$  n'est pas une fonction d'utilité v.N-M. Il faut (et il suffit) que cette transformation soit une transformation affine croissante.

**Proposition 3**

Soit  $U : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction d'utilité v.N-M qui représente une relation de préférence  $\succeq$  sur  $\mathbf{P}$ . Alors  $V : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  est également une fonction d'utilité v.N-M qui représente  $\succeq$  ssi il existe  $a > 0$  et  $b$  tels que pour tout  $P \in \mathbf{P}$ ,

$$V(L) = aU(L) + b$$

Attention : si  $V$  est une transformation croissante mais non affine de  $U$ ,  $V$  représente (quand même) la relation de préférence  $\succeq$  - c'est le résultat qu'on avait vu pour le modèle de choix certain. Simplement  $V$  ne sera pas une fonction d'utilité v.N-M. Une autre façon de voir la distinction, c'est en considérant les fonctions d'utilité sur les conséquences  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 3**

Une fonction d'utilité de Bernoulli  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$  EU-représente la relation de préférences  $\succeq$  sur  $\mathbf{P}$  ssi l'espérance d'utilité  $EU_u$  définie sur  $u(\cdot)$  représente  $\succeq$ .

**Proposition 4**

Soit  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction d'utilité de Bernoulli qui EU-représente la relation de préférences  $\succeq$  sur  $\mathbf{P}$ . Alors la fonction d'utilité de Bernoulli  $v : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  EU-représente également la relation de préférences  $\succeq$  ssi il existe  $a > 0$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in C$ ,

$$v(x) = au(x) + b$$

Ces Propositions sont importantes du point de vue interprétatif. Les fonctions d'utilités de Bernoulli (sur les conséquences) ne sont plus ordinales mais **cardinales** : il n'y a pas que la manière qu'elles ont de classer les conséquences qui est pertinente, mais également la différence de valeur entre les conséquences.

### Exemple 3

Soient deux loteries  $L_1$  et  $L_2$  qui mettent en jeu 4 conséquences :  $c_1, c_2, c_3, c_4$  :



Soient deux fonctions d'utilité de Bernoulli  $u(.)$  et  $v(.)$  :

|       | $u$ | $v$ |
|-------|-----|-----|
| $c_1$ | 2   | 2   |
| $c_2$ | 3   | 3   |
| $c_3$ | 5   | 5   |
| $c_4$ | 10  | 50  |

$u(.)$  et  $v(.)$  classent de la même façon les conséquences. Mais, si l'on se base sur l'espérance d'utilité, elles ne classent pas de la même façon les loteries :

$$EU_u(L_1) = (0.6 \times 5) + (0.4 \times 3) = 4.2; EU_u(L_2) = (0.1 \times 10) + (0.9 \times 2) = 2.8$$

$$EU_v(L_1) = (0.6 \times 5) + (0.4 \times 3) = 4.2; EU_v(L_2) = (0.1 \times 50) + (0.9 \times 2) = 6.8$$

### Exemple 4 (Celsius et Fahrenheit)

Les mesures Celsius et Fahrenheit de température sont des échelles d'intervalle. L'ordre est évidemment préservée entre les deux mesures :  $(a)^\circ C > (b)^\circ C$  ssi  $(a)^\circ F > (b)^\circ F$ . Les ratios ne sont pas préservés : il se peut par exemple que

$$(a)^\circ C / (b)^\circ C \neq (a)^\circ F / (b)^\circ F$$

Cela ne fait donc pas sens de dire que la température de  $a$  est deux fois plus élevée que celle de  $b$ . Si  $(a)^\circ F = 100$  et  $(b)^\circ F = 50$ , alors  $(a)^\circ C = 37.38$  et  $(b)^\circ C = 10$ . En revanche, les **ratios de différences** de température sont préservés :

$$[(a)^\circ C - (b)^\circ C] / [(b)^\circ C - (c)^\circ C] = [(a)^\circ F - (b)^\circ F] / [(b)^\circ F - (c)^\circ F]$$

**Proposition 5 (invariance des ratios de différences)**

Soit deux fonctions d'utilité de Bernouilli  $u$  et  $v$  qui  $E$ -représentent  $\succ$ . Soit quatre conséquences  $x_1, x_2, x_3, x_4$  avec  $x_3 \neq x_4$ . Les ratios de différences sont invariants de  $u$  à  $v$ .

$$(v(x_1) - v(x_2)) / (v(x_3) - v(x_4)) = (a \cdot u(x_1) + b - a \cdot u(x_2) - b) / (a \cdot u(x_3) + b - a \cdot u(x_4) - b) = a \cdot ((u(x_1) - u(x_2)) / (u(x_3) - u(x_4))) = (u(x_1) - u(x_2)) / (u(x_3) - u(x_4))$$

Une interprétation possible : l'identité  $(u(x_1) - u(x_2)) / (u(x_3) - u(x_4)) = \lambda$  vaut quand le changement causé par le gain de  $x_1$  et la perte de  $x_2$  est  $\lambda$  fois le changement causé par le gain de  $x_3$  et la perte de  $x_4$ .

## 4 Attitudes par rapport au risque

### 4.1 Illustration par le triangle de Marschak-Machina

- Dans le cas où les conséquences  $c_1, c_2, c_3$  sont des montants monétaires, le triangle de Marschak-Machina permet de visualiser l'attitude du décideur par rapport au risque.

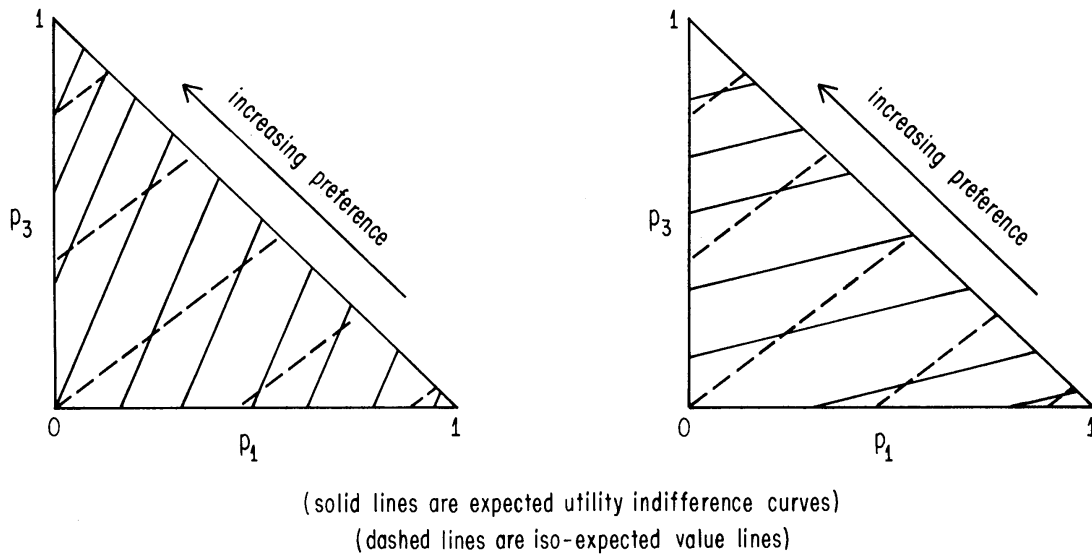


Fig. 3a. Relatively steep indifference curves of a risk averter

Fig. 3b. Relatively flat indifference curves of a risk lover

L'attitude par rapport au risque se manifeste quand on compare la pente des courbes d'indifférence du décideur aux *courbes d'iso-espérance de gain*, c'est-à-dire les courbes qui relient les points qui ont la même espérance de gain. Ces courbes sont décrites par des équations de la forme suivante :

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^3 c_i \cdot p_i = c_1 \cdot p_1 + c_2 \cdot (1 - p_1 - p_3) + c_3 \cdot p_3$$

Un décideur dont la pente des courbes d'indifférence est supérieure à celle des courbes iso-espérance de gain est un décideur qui est **risquophobe**.

Intuitivement : considérons l'origine 0 c'est-à-dire la loterie (dégénérée) qui donne  $c_2$  avec certitude. Un décideur est risquophobe s'il préfère cette loterie à loterie qui a la même espérance de gain, en particulier à la loterie  $L_0$ , intersection de la droite d'iso-espérance de gain qui passe par 0 et de la droite (1,1). Puisque la pente des courbes d'indifférence est supérieure à celle de la droite d'iso-espérance de gain, cela signifie que la courbe d'indifférence qui passe par l'origine coupe (1,1) *au-dessus* de  $L_0$ . Cela signifie que le décideur est indifférent entre  $c_2$  avec certitude et une loterie dont l'espérance de gain est supérieure à  $c_2$ .

Un décideur dont la pente des courbes d'indifférence est inférieure à celle des courbes iso-espérance de gain est un décideur qui est **risquophile**.

## 4.2 Définitions générales

### Notation 1

Soit  $P \in \mathbf{P}$  une loterie monétaire et soit  $EG(P)$  l'espérance de gain de  $P$ . Par hypothèse, l'espérance de gain de  $P$  appartient au domaine des conséquences ( $EG(P) \in C$ ). On peut dès lors considérer la loterie dégénérée qui produit  $EG(P)$  avec certitude, que l'on note  $\delta_{EG(P)}$

### Définition 4

- Une relation de préférence est **risquophobe** (ou averse au risque) si pour toute loterie  $P \in \mathbf{P}$ ,  $\delta_{EG(P)} \succeq P$
- Une relation de préférence est **neutre à l'égard du risque** si pour toute loterie  $P \in \mathbf{P}$ ,  $\delta_{EG(P)} \sim P$
- Une relation de préférence est **risquophile** si pour toute loterie  $P \in \mathbf{P}$ ,  $\delta_{EG(P)} \preceq P$

• Si l'agent se conforme au modèle d'espérance d'utilité, alors son attitude à l'égard du risque se laisse représenter par la forme géométrique de la fonction d'utilité  $u(\cdot)$

### Définition 5

Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ ;

- $f$  est **concave** si pour tous  $x, y \in C$  et  $a \in [0, 1]$ ,  $u(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$
- $f$  est **affine** s'il existe  $a, b$  tels que  $f(x) = ax + b$
- $f$  est **convexe** si pour tous  $x, y \in C$  et  $a \in [0, 1]$ ,  $u(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$

Le point important est que l'on peut mettre en relation de manière précise les deux trios de notions :

**Proposition 6**

Soit  $\succ$  une relation de préférence qui se laisse représenter par une fonction d'utilité  $U(\cdot)$  de forme espérance d'utilité pour  $u(\cdot)$  ;

- $\succ$  est risquophobe ssi  $u(\cdot)$  est concave
- $\succ$  est neutre à l'égard du risque ssi  $u(\cdot)$  est affine
- $\succ$  est risquophile ssi  $u(\cdot)$  est convexe

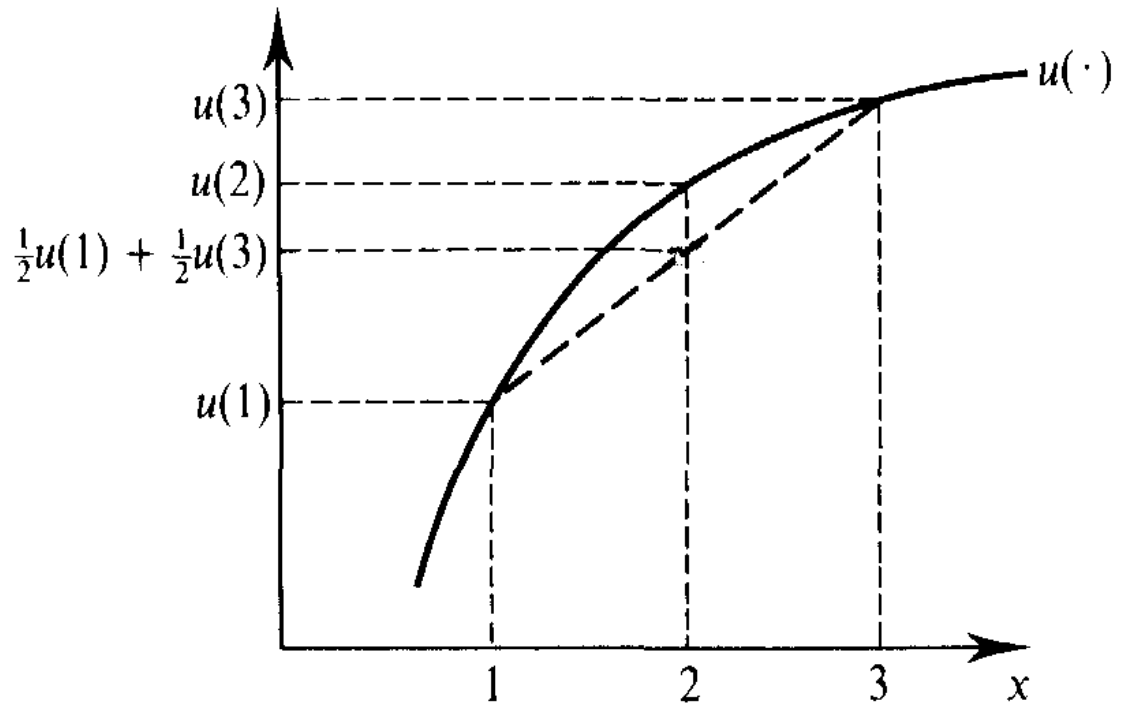


FIG. 1 – risquophobie

La Figure “Risquophobie” (tirée de Mas-Collel & ali 1995) permet de bien comprendre le lien entre aversion pour le risque, concavité et utilité marginale décroissante. Utilité marginale décroissante signifie grossièrement que plus l’agent a de richesse (monétaire), moins l’incrément d’une unité monétaire lui procure d’utilité. Plus précisément, cela signifie que la dérivée  $u'(\cdot)$  est non croissante ou encore que la dérivée seconde  $u''(\cdot)$  est non positive. Si  $u(\cdot)$  est concave, alors (étant donné les conditions mathématiques appropriées),  $u'(\cdot)$  est non croissante.

L’utilité marginale décroissante signifie que, à un niveau donné de richesse, l’augmentation d’utilité procurée par le gain d’1 euro est inférieure à la perte d’utilité infligée par la perte d’1 euro. C’est ce que met en évidence la figure pour un niveau de départ de 2

euros :  $u(3) - u(2) < u(2) - u(1)$  soit  $u(2) > (u(3) + u(1))/2$ . De cela suit que l'agent qui a cette fonction d'utilité préfère le statu quo à la loterie  $L = 1/2(\delta_3) \oplus 1/2(\delta_1)$ . En effet,  $EU(\delta_2) = u(2)$  tandis que  $EU(L) = (u(3) + u(1))/2$ . Donc  $EU(\delta_2) > EU(L)$ . Graphiquement,  $EU(L)$  correspond au milieu du segment  $(u(3), u(1))$ .

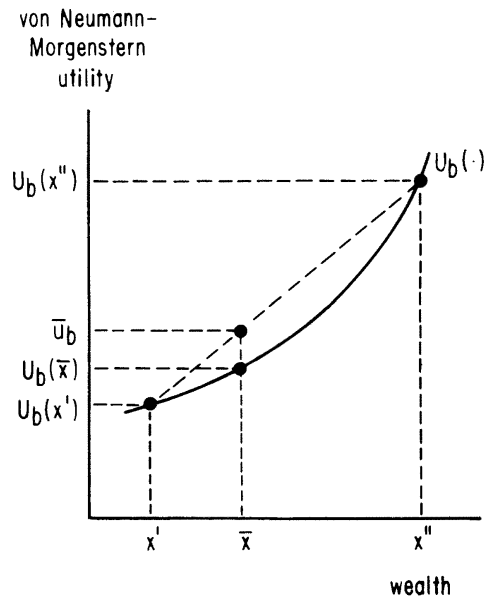
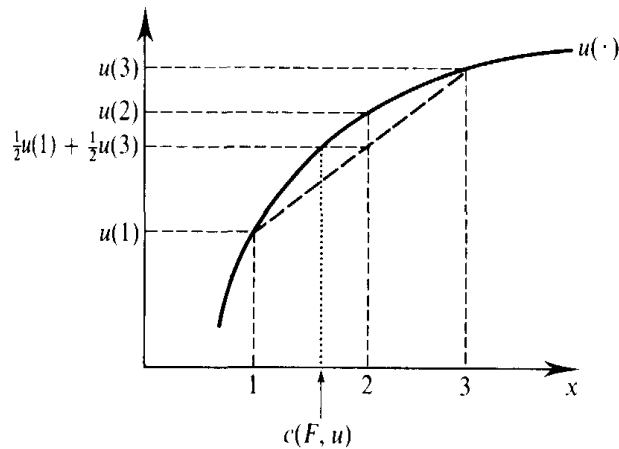


Fig. 1b. Convex utility function of a risk lover

### Définition 6

Soit  $P$  une loterie; l'ensemble des équivalents-certains de  $P$ , noté  $C(P)$ , est l'ensemble des conséquences  $x \in C$  telles que l'agent est indifférent entre la loterie dégénérée qui produit  $x$  avec certitude et  $P$  :

$$C(P) = \{x \in C : \delta_x \sim P\}$$



### Exemple 5 (équivalent certain)

On revient à l'exemple précédent et l'on s'intéresse à l'équivalent certain de la loterie  $L = 1/2(\delta_3) \oplus 1/2(\delta_1)$ . On sait que l'agent est risphobe donc  $C(L) < EG(L)$ .  $C(L)$  s'obtient en prenant l'inverse de  $(u(3) + u(1))/2$  (l'utilité espérée de  $L$ ) par la fonction  $u(\cdot)$  :  $C(L) = u^{-1}((u(3) + u(1))/2)$ .

Supposons que  $C(P)$  soit un singleton - c'est le cas, par exemple, si  $u(\cdot)$  est concave et strictement croissante. Dans ce cas on peut définir la **prime de risque** comme la différence entre l'espérance de gain de  $P$  et son équivalent certain :  $R(P) = EG(P) - C(P)$ . Intuitivement, la prime de risque est le montant que l'agent est prêt à payer pour remplacer  $P$  par son espérance de gain avec certitude.

interprétation de l'utilité voir Elster 2007, chap.11

## 5 Axiomatisation du modèle d'espérance d'utilité

- La dernière partie de cette introduction au modèle d'espérance d'utilité est consacrée à ce qui constitue l'avancée contemporaine à proprement parler : *l'axiomatisation du modèle d'espérance d'utilité*.

- On connaît un ensemble d'axiomes AX sur les préférences entre actions (loteries) tel que **si** les préférences d'un agent sur les loteries (sur  $\mathbf{P}$ ) satisfont AX, **alors** il existe une fonction d'utilité de Bernoulli sur  $\mathcal{C}$  telle que

$$P \succ Q \text{ ssi } EU_u(P) > EU_u(Q)$$

Modèle d'espérance d'utilité en situation de risque (C fini)<sup>a</sup>

(MEU-R )L'agent peut choisir entre les distributions de probabilités  $P \in \mathbf{P}$  sur l'ensemble fini  $C$  des conséquences

L'agent dispose d'une relation de préférence  $\succ$  sur  $\mathbf{P}$  telle que

(MEU-R P1)  $\succ$  est asymétrique et négativement transitive

(MEU-R P2) indépendance :  $\forall P, Q, R \in \mathbf{P}$  et  $\alpha \in ]0, 1]$ , si  $P \succ Q$  alors  $\alpha P \oplus (1 - \alpha)R \succ \alpha Q \oplus (1 - \alpha)R$

(MEU-R P3) continuité ou archimédianité :  $\forall P, Q, R \in \mathbf{P}$ , si  $P \succ Q \succ R$ , alors  $\exists \alpha, \beta \in ]0, 1[$  tq  $\alpha P \oplus (1 - \alpha)R \succ Q \succ \beta P \oplus (1 - \beta)R$ .

(MEU-R RAT) L'agent choisit une distribution de probabilité  $\succ$ -maximale.

<sup>a</sup>Kreps (1988), pp. 43 et sq.

Reamarque sur l'axiome de continuité ou d'archimédianité (Kreps (1990), pp. 44-6) :

- il n'y a pas de loterie  $P$  qui soit si supérieure aux autres loteries que pour deux loteries  $Q \succ R$ , une petite proportion de  $P$  et une grande proportion de  $R$  ne soit pas moins bonne que  $Q$

- il n'y a pas de loterie  $R$  qui soit si inférieure aux autres loteries que pour deux loteries  $P \succ Q$  une petite proportion de  $R$  et et une grande proportion de  $P$  ne soit pas meilleure que  $Q$

(Mais supposons que  $P$ = 1000 euros avec certitude,  $Q$ =10 euros avec certitude et  $R$ = la mort avec certitude.)

### **Théorème 1 (Théorème de représentation)**

Une relation de préférence  $\succ$  sur  $\mathbf{P}$  satisfait (MEU-R P1)-(MEU-R P3) ssi il existe une fonction d'utilité (de Bernouilli)  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$P \succ Q \text{ ssi } \sum_{c \in C} u(c)P(c) > \sum_{c \in C} u(c)Q(c)$$

En outre, si  $u$  est une telle fonction, alors toute fonction  $u'(\cdot) = a.u(\cdot) + b$  où  $a > 0$  est également une telle fonction (ou encore :  $u$  est unique à une transformation affine positive près).

- Avant de passer à la technique, quelques mots sur la forme du théorème de représentation et sur ses usages possibles. Sur la forme : il s'agit de conditions sur les préférences qui garantissent un certain type de représentation (par l'espérance d'une fonction d'utilité définie sur les conséquences). Les préférences sont censées être beaucoup plus "révélabes" que les utilités de Bernoulli, lesquelles sont en général conçues comme des constructions théoriques qui prennent leur sens uniquement dans le contexte du choix risqué.

- Quels usages pour le théorème de représentation ? Il y a principalement deux usages :
  - usage normatif : l'axiomatisation sert à évaluer normativement le modèle d'espérance d'utilité. En effet, pourquoi après tout obéir à la maximisation de l'espérance d'utilité ? Pourquoi ne pas suivre une autre règle ? Le théorème suggère que si l'on trouve les axiomes sur les préférences plausibles, alors l'espérance d'utilité s'en trouve justifiée.
  - usage descriptif : les préférences entre loteries sont quasiment observables ; par conséquent, une axiomatique comme celle que nous venons de présenter permet de déterminer les implications observables du modèle. Typiquement, quand on veut tester le modèle d'espérance d'utilité, on sélectionne un ou plusieurs axiomes (testables) et on observe le comportement des agents.

Dans ce qui suit on suppose qu'il existe une "meilleure" loterie  $\bar{P}$  et une "pire" loterie  $\underline{P}$  telles que pour tout  $P \in \mathbf{P}$ ,  $\bar{P} \succeq P \succeq \underline{P}$ . Si  $C$  fini et les préférences sont rationnelles, une telle configuration est garantie.

### Lemme 1 (calibration)

Si  $\succ$  satisfait (A1)-(A3), alors pour toute loterie  $P$  il existe un unique  $\alpha_P$  t.q.

$$P \sim \alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P}$$

*Preuve.*

(a) Existence.

Soit  $\alpha_P = \sup\{\alpha \in [0, 1] : \alpha \bar{P} \oplus (1 - \alpha) \underline{P} \preceq P\}$ . On va montrer qu' $\alpha_P$  ainsi défini satisfait bien la propriété désirée :  $P \sim \alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P}$ . Etant donné les hypothèses, il existe trois cas possibles :

(i).  $\alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P} \succ P \succ \underline{P}$ . L'axiome de continuité nous conduit à une contradiction. Notons d'abord que pour tout  $\alpha < \alpha_P$ ,  $P \succ \alpha \bar{P} \oplus (1 - \alpha) \underline{P}$ . Or, par l'axiome de continuité,

le cas (i) implique l'existence de  $\beta \in (0, 1)$  tel que  $\beta(\alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P}) \oplus (1 - \beta) \underline{P} \succ P$ . Mais  $\beta(\alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P}) \oplus (1 - \beta) \underline{P} = \beta \alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \beta \alpha_P) \underline{P}$ . Puisque  $\beta \alpha_P < \alpha_P$ , contradiction.

(ii).  $\bar{P} \succ P \succ \alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P}$ . L'axiome de continuité nous conduit derechef à une contradiction par un argument analogue.

(iii).  $P \sim \alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P}$  est le seul cas restant.

(b) Unicité. Pour établir l'unicité, on montre d'abord que pour tout  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ,

$$\beta \bar{P} \oplus (1 - \beta) \underline{P} \succ \alpha \bar{P} \oplus (1 - \alpha) \underline{P} \text{ ssi } \beta > \alpha$$

( $\Rightarrow$ ). Supposons que  $\beta > \alpha$ . On peut réécrire

$$\beta \bar{P} \oplus (1 - \beta) \underline{P} = \gamma \bar{P} \oplus (1 - \gamma) [\alpha \bar{L} \oplus (1 - \alpha) \underline{P}] \text{ où } \gamma = (\beta - \alpha) / (1 - \alpha)$$

$$\bar{P} \succ \alpha \bar{L} \oplus (1 - \alpha) \underline{P}$$

$$\gamma \bar{P} \oplus (1 - \gamma) [\alpha \bar{L} \oplus (1 - \alpha) \underline{P}] \succ \alpha \bar{P} \oplus (1 - \alpha) \underline{P} \text{ ssi } \beta > \alpha$$

$$\beta \bar{P} \oplus (1 - \beta) \underline{P} \succ \alpha \bar{P} \oplus (1 - \alpha) \underline{P} \text{ ssi } \beta > \alpha$$

( $\Leftarrow$ ). Laissé à votre sagacité. ♠

## Lemme 2

Soit  $U : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $U(P) = \alpha_P$  ;

(i)  $U(\cdot)$  représente  $\succ$

(ii)  $U(\cdot)$  est préservée par mixage i.e.  $U(\beta P \oplus (1 - \beta)Q) = \beta U(P) + (1 - \beta)U(Q)$

*Preuve.* (i) Par le Lemme de calibration, une telle fonction  $U(\cdot)$  est bien définie. Le fait que  $U(\cdot)$  représente  $\succ$  découle de la propriété que nous avons utilisée pour montrer qu'il existe un unique  $\alpha_P$  : pour tous  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ,  $\beta \bar{P} \oplus (1 - \beta) \underline{P} \succ \alpha \bar{P} \oplus (1 - \alpha) \underline{P}$  ssi  $\beta > \alpha$ .

(ii) On peut immédiatement calculer que  $\beta U(P) + (1 - \beta)U(Q) = \beta \alpha_P + (1 - \beta)\alpha_Q$ . En vertu du Lemme de calibration, on sait que

$$- P \sim \alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P} \text{ et}$$

$$- Q \sim \alpha_Q \bar{P} \oplus (1 - \alpha_Q) \underline{P}$$

$$\beta P \oplus (1 - \beta)Q \sim \beta [\alpha_P \bar{P} \oplus (1 - \alpha_P) \underline{P}] + (1 - \beta) [\alpha_Q \bar{P} \oplus (1 - \alpha_Q) \underline{P}]$$

$$\sim [\beta \alpha_P + (1 - \beta)\alpha_Q] \bar{P} \oplus [1 - \beta \alpha_P - (1 - \beta)\alpha_Q] \underline{P}$$

Or, par application de la définition de  $U$ ,  $U(\beta P \oplus (1 - \beta)Q) = \beta \alpha_P + (1 - \beta)\alpha_Q$  soit exactement  $\beta U(P) + (1 - \beta)U(Q)$ . ♠.

## 5.1 Révélation des utilités

• Le théorème de représentation montre comment (en principe) on peut *mesurer* l'utilité vis-à-vis des différentes conséquences (utilité de Bernoulli)

### Exemple 6

Soient 3 conséquences :  $j, r, b$  classées ainsi :

$$\delta_j \succ \delta_b \succ \delta_r$$

• fixons conventionnellement  $u(j) = 1$  et  $u(r) = 0$ .

• comment mesurer  $u(b)$  ? On utilise les loteries :

$$(j, 3/4; r, 1/4) \succ b$$

$$(j, 1/4; r, 3/4) \prec b$$

dans ce cas,  $3/4 \succ u(b) \succ 1/4$

$$u(b) = \alpha \text{ où } b \sim (j, \alpha; r, (1 - \alpha))$$

l'utilité obtenue est cardinale = unique à une transformation affine près - cf température

Les axiomes garantissent qu'il existe une paire de conséquences  $c_*, c^*$  telle que pour toute loterie  $P$ ,

$$\delta_{c^*} \succeq P \succeq \delta_{c_*} \quad (1)$$

où  $\delta_{c^*}$  (resp.  $\delta_{c_*}$ ) est la loterie dégénérée qui a pour seule conséquence possible  $c^*$  (resp.  $c_*$ ). On peut alors définir pour une loterie quelconque  $P$  l'**utilité comportementale**  $f(P)$  de  $P$  :

$$f(P) = \alpha \quad (2)$$

où

$$P \sim \alpha \delta_{c^*} \oplus (1 - \alpha) \delta_{c_*} \quad (3)$$

En vertu des axiomes,  $\alpha$  est unique donc  $f(\cdot)$  est bien définie une fois que  $f(\delta_{c^*})$  et  $f(\delta_{c_*})$  sont fixés ; et  $f(\cdot)$  représente  $\succ$  :

$$P \succ Q \Leftrightarrow f(P) > f(Q) \quad (4)$$

## 6 Le “paradoxe” d'Allais

• Soient les deux situations de choix suivantes :

Choix 1 :



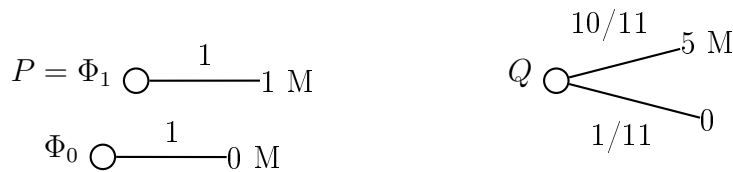
Choix 2 :



Comportement modal :  $a_1 \succ a_2$  et  $a_3 \succ a_4$

Intuition : dans le Choix 1, il ne vaut pas la peine de repartir avec 0 euro pour avoir une chance modérée d'obtenir 5M. Donc  $a_1$ . Dans le Choix 2, on a dans tous les cas une très grande chance de repartir avec 0 euro. Dans ce cas, autant sacrifier une petite partie de sa probabilité de gagner pour gagner vraiment beaucoup dans l'éventualité où l'on gagne. Donc  $a_3$ .

• Qu'est-ce qui ne va pas (du point de vue du MEU) avec le comportement modal ?  
On peut concevoir  $a_1, \dots, a_4$  comme des loteries composées. Considérons en effet les loteries  $P, Q, \Phi_0, \Phi_1$  :



On peut facilement vérifier que

$$\begin{aligned} \triangleright a_1 &= 0.11P \oplus 0.89\Phi_1 \\ \triangleright a_2 &= 0.11Q \oplus 0.89\Phi_1 \\ \triangleright a_3 &= 0.11Q \oplus 0.89\Phi_0 \\ \triangleright a_4 &= 0.11P \oplus 0.89\Phi_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  **le comportement modal viole l'axiome d'indépendance**

• Une première représentation des quatre loteries :

|       | 0.01 | 0.89 | 0.1 |
|-------|------|------|-----|
| $a_1$ | 1M   | 1M   | 1M  |
| $a_2$ | 0    | 1M   | 5M  |
| $a_4$ | 1M   | 0    | 1M  |
| $a_3$ | 0    | 0    | 5M  |

- Seconde représentation : le triangle de Marschak-Machina correspondant

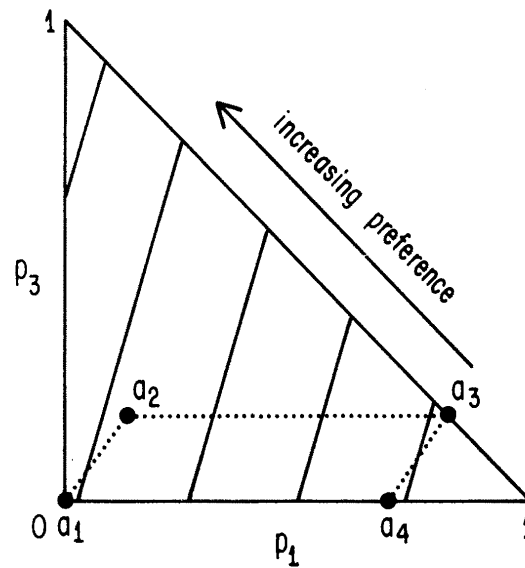


Fig. 4a. Expected utility indifference curves and the Allais Paradox

$(a_1, a_2)$  et  $(a_3, a_4)$  sont des droites parallèles. On peut en effet vérifier que

- la droite  $(a_1, a_2)$  est décrite par  $y = 10x$
- la droite  $(a_3, a_4)$  est décrite par  $y = 10x - 8.9$

Remarque 1 : soient deux loteries  $P$  et  $Q$  et soient les  $\alpha$ -mixages  $L_1 = \alpha P \oplus (1 - \alpha)R$  et  $\alpha Q \oplus (1 - \alpha)R$ . On peut montrer que, en toute généralité, les droites  $(P, Q)$  et  $L_2 = (\alpha P \oplus (1 - \alpha)R, \alpha Q \oplus (1 - \alpha)R)$  sont parallèles

- la droite  $(P, Q)$  a pour pente  $a = (x_P - x_Q) / ((y_P - y_Q))$

- la droite  $(L_1, L_2)$  a pour pente  $a' = (x_{L_1} - x_{L_2}) / ((y_{L_1} - y_{L_2}))$ . Compte tenu du fait que  $x_{L_1} = \alpha x_P + (1 - \alpha)x_R$  et *mutatis mutandis* pour les autres coordonnées, on peut facilement vérifier que  $a' = a$ .

Remarque 2 : par ailleurs, dans notre cas particulier, les deux segments ont la même longueur. Ce n'est pas le cas général.

Le point crucial est le suivant : si les préférences de l'agent obéissent aux axiomes du MEU, alors quelles qu'elles soient, si  $a_1$  est préféré à  $a_2$ , alors  $a_4$  doit être préféré à  $a_3$  (et réciproquement). Pourquoi ? Parce que, comme nous l'avons vu lors du dernier cours, dans le triangle MM les **courbes d'indifférence d'un agent se conformant au MEU sont (1) linéaires et (2) parallèles entre elles**. Les courbes d'indifférences "observées" correspondent plutôt à la figure suivante, où les courbes ne sont pas parallèles mais partent dans plusieurs directions (*fan out*).  $a_1$  est "au-dessus" de  $a_2$  tandis que  $a_4$  est "en-dessous" de  $a_3$ .

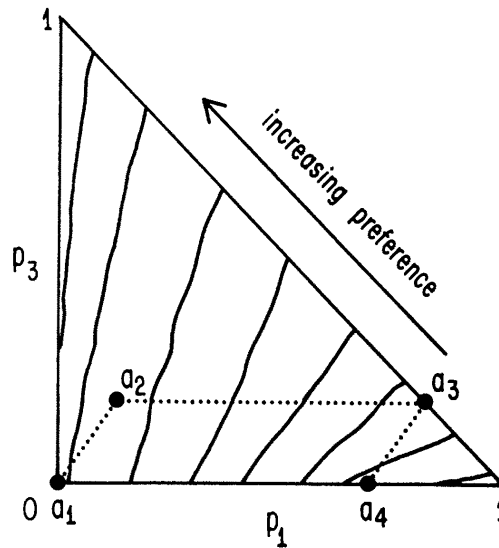


Fig. 4b. Indifference curves which 'fan out' and the Allais Paradox

## 7 Discussion normative du paradoxe d'Allais

- L'article d'Allais (1953) remet en question tant l'interprétation descriptive que l'interprétation normative du MEU. Voici une remarque méthodologique très intéressante de l'article qui le rapproche de ce que nous avons dit à propos de l'équilibre réfléchi :

- ▷ “Définition expérimentale de la rationalité. Si on ne veut pas, ou si on ne peut pas, recourir à une définition abstraite de la rationalité, on ne peut que recourir à l'expérience et observer *ce que font effectivement les hommes dont on a par ailleurs des raisons de penser qu'ils se comportent rationnellement.*”

• Savage (le grand théoricien de l'espérance d'utilité) a suivi le comportement modal ! Savage revient sur sa réponse dans Savage (1954, pp. 101-3), corrige sa première réponse et tente de justifier cette correction. Voici en substance le raisonnement que propose Savage

|       | 1  | 2-90 | 91-100 |
|-------|----|------|--------|
| $a_1$ | 1M | 1M   | 1M     |
| $a_2$ | 0  | 1M   | 5M     |
| $a_4$ | 1M | 0    | 1M     |
| $a_3$ | 0  | 0    | 5M     |

(a) Les tickets 2-90 ne peuvent départager les loteries dans les deux choix. Il faut donc seulement regarder ce qui se passe pour les tickets 1 et 91-100. (b) Si l'on se concentre uniquement sur ce qui se passe pour les tickets 1 et 91-100, les deux choix sont identiques. La question qui se pose est simplement celle de savoir si je suis prêt à échanger un ticket à 1M contre la transformation de 10 tickets à 1M en 10 tickets à 5M. (c) Savage préfère finalement  $a_1$  à  $a_2$  et  $a_4$  à  $a_3$ .

Problème : cette réponse revient à justifier l'axiome d'indépendance...en l'invoquant. Savage n'a pas prétention à fonder l'axiome d'indépendance, donc il n'y pas de pétition de principe. Mais pour quelqu'un qui remet en cause l'axiome, la réponse n'est pas satisfaisante.

• La discussion normative sur l'axiome d'indépendance (et par conséquent sur le paradoxe d'Allais) a connu un profond renouvellement à la fin des années 1980 avec des tentatives de justification **dynamique** de l'axiome. Pour les comprendre, il faut saisir la distinction **choix statique vs. choix dynamique**. En gros,

- choix statique : les choix de l'agent sont faits avant que la Nature n'agisse. Une fois que l'agent a pris sa décision initiale, il n'y a plus d'endroit où il puisse intervenir. Attention : les loteries composées (dont on a vu qu'elles constituaient une interprétation fréquente de l' $\alpha$ -mixage) sont étendues temporellement mais sont statiques : l'agent choisit au début, et ensuite la Nature intervient en deux temps. Exemple : choix entre  $\alpha P \oplus (1 - \alpha)Q$  et  $\beta R \oplus (1 - \beta)S$ . L'agent choisit l'une des deux loteries composées. Ensuite la Nature conduit à une conséquence en deux temps.

En termes d'arbre de décision : un carré initial, puis un (loteries simples) ou plusieurs (loterie composées) ronds.

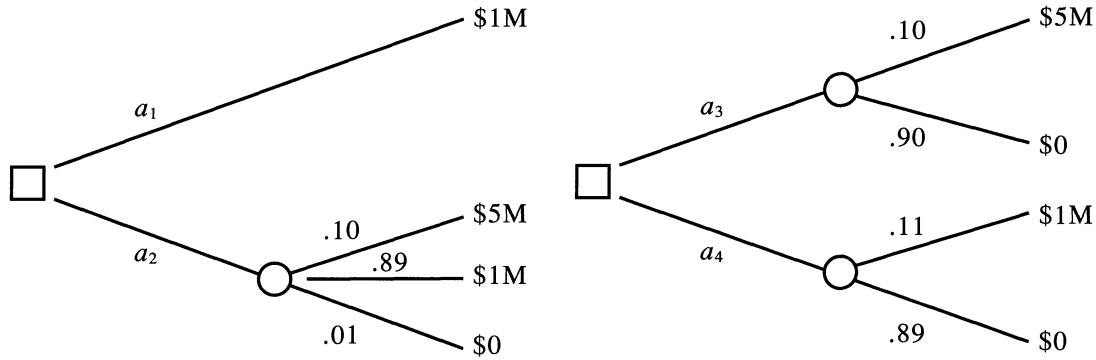


Figure 6. Decision Tree Representation of the Two Static Choices Problems of the Allais Paradox

- choix dynamique : certaines décisions sont prises après certaines résolutions de l'incertitude, i.e. après que la Nature ait joué certains de ses coups.

En termes d'arbre de décision : un carré après un rond.

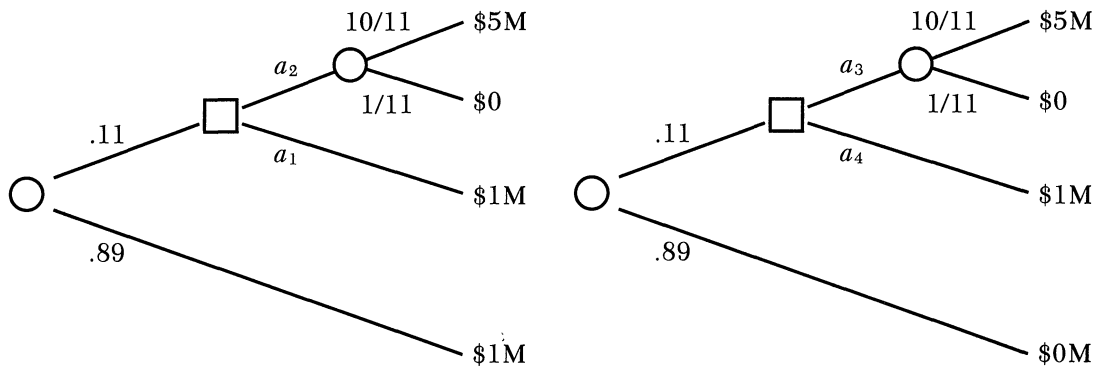


Figure 7. Dynamic Choice Problems that Generate the Same Opportunity Sets as the Allais Paradox Problems

Dans une situation de choix dynamique, on peut distinguer le choix planifié au départ à un noeud de décision du choix effectif de l'agent en ce noeud qui peut différer du premier. On parle de **cohérence dynamique** quand il n'y pas de différence entre le choix planifié pour un noeud de décision futur et le choix effectué en ce noeud et d'**incohérence dynamique** quand l'agent change d'option lorsqu'il arrive au noeud de décision.

- L'argument d'incohérence dynamique, version courte (Machina, 1989)

▷**étape (1)** : quelles sont vos préférences entre  $P$  et  $Q$  ?



▷**étape (2)** : Supposons que  $P \succ Q$ . Cela implique que dans l'un des deux arbres dynamiques de la figure précédente, vous allez revenir sur l'un de vos choix planifiés = incohérence dynamique. Pour l'individu typique, il s'agit de l'arbre de droite où il choisit  $a_3$  plutôt que  $a_4$  initialement en vertu de l'équivalence stratégique avec l'arbre de décision statique. En vertu de sa préférence pour  $P$ , quand l'individu arrive au noeud de décision (dans l'arbre dynamique de droite donc), il va revenir sur sa décision et opter pour  $a_4$ .

Attention : bien sûr il n'est pas toujours rationnel d'en rester à une décision planifiée. Mais dans le cas présent, il s'agit par hypothèse d'une décision prise *avec toute l'information disponible* : l'agent connaît au moment initial toute l'information qu'il saura au moment où il arrivera au noeud de décision.

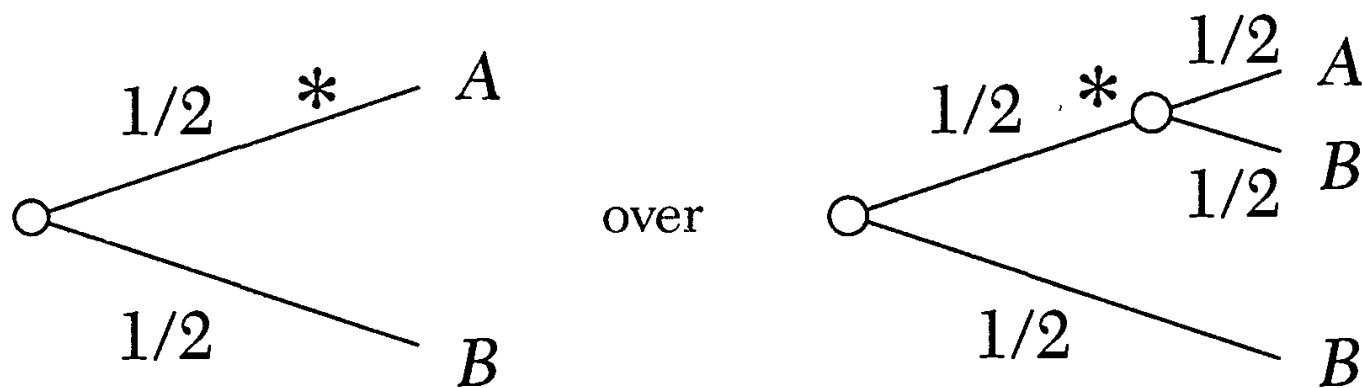
Pour Machina (1989) l'argument d'incohérence dynamique repose sur une prémisse implicite, le **conséquentialisme** ; et cette prémisse est inappropriée. L'hypothèse conséquentialiste intervient quand on suppose que si l'agent aboutit au noeud de décision où la fin de l'arbre se présente comme un choix entre  $P$  et  $Q$ , il doit faire le même choix que dans un problème de décision où il choisit simplement entre  $P$  et  $Q$ . Pour Machina, ce qui s'est passé avant dans l'arbre *peut* compter. L'hypothèse conséquentialiste n'est pas appropriée pour des agents dont les préférences ne sont pas séparables ( $\approx$  ne satisfont pas l'axiome d'indépendance)

### Exemple 7 (Abigail, Benjamin et Maman.)

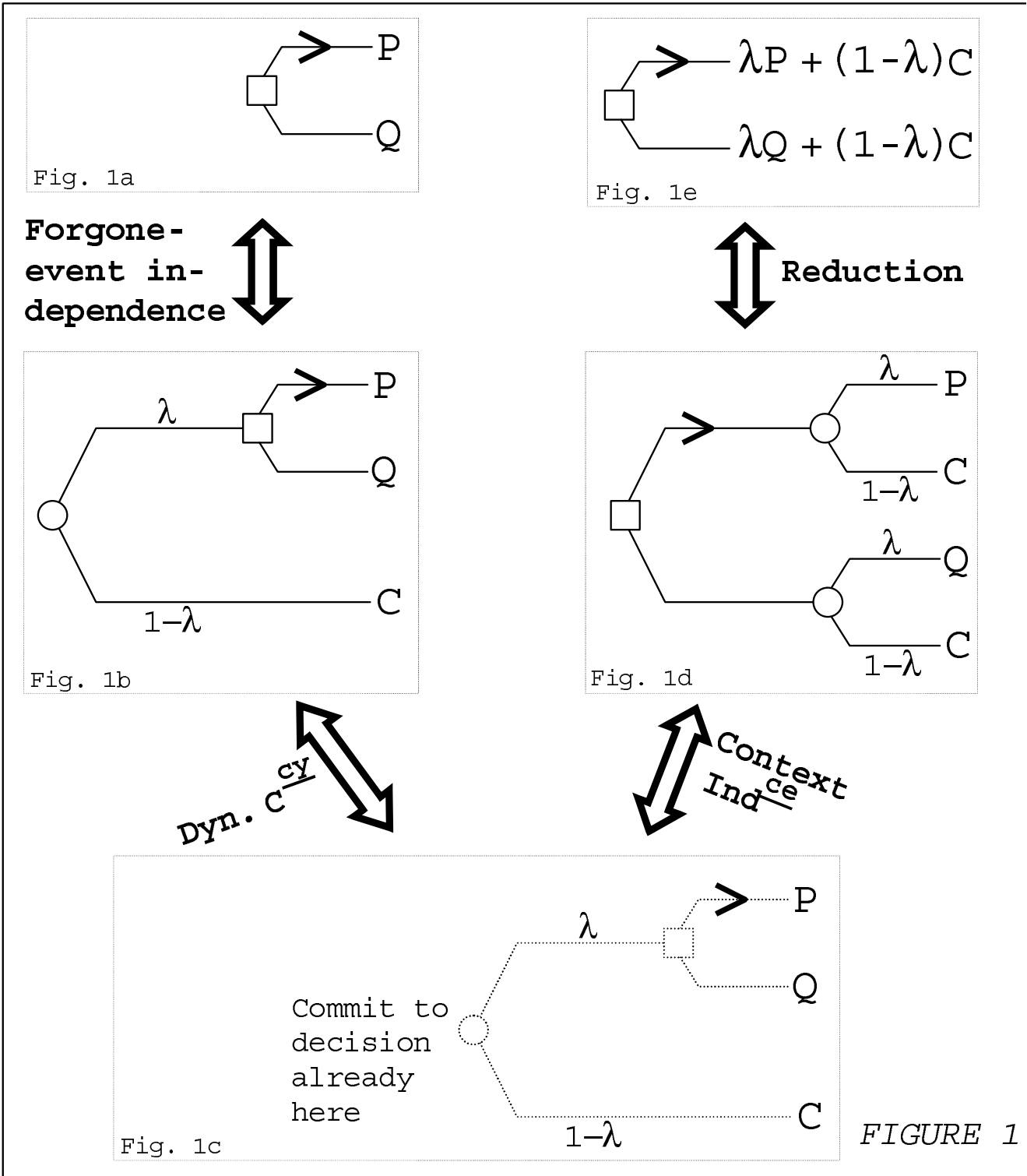
Maman a une gourmandise indivisible qu'elle peut donner à l'un de ses deux enfants mais qui ne peut être partagée. Maman préfère strictement que l'un des deux enfants l'obtienne plutôt qu'aucun ne l'obtienne ( $A \sim B \succ 0$ ). Mais elle préfère strictement un tirage au sort 50/50 au fait de le donner à l'un des deux :  $(1/2, A; 1/2) \succ A \sim B$  - ce qui est immédiatement incompatible avec le MEU.

Benjamin essaie d'exploiter l'"incohérence dynamique" de Maman : la pièce tombe sur la face favorable à sa soeur, mais juste avant que Maman ne donne à Abigail la gourmandise, il lui rappelle que  $(1/2, A; 1/2) \succ A$  et lui fait remarquer que par conséquent elle devrait relancer la pièce. Il procède de la même façon tant que la pièce ne lui est pas favorable.

Réplique de Maman : "Tu as eu ta chance !" Ce qui signifie que l'événement non réalisé (face favorable à Benjamin) importe pour les préférences actuelles : au départ,  $(1/2, A; 1/2) \succ A$ , mais après que la pièce ait été favorable à Abigail,  $(1/2, A; 1/2) \prec A$ . Mais cela, Maman peut le dire dès le départ : sans conséquentialisme, il n'y a pas d'incohérence dynamique.



• Wakker (1999) se propose de complètement expliciter les hypothèses auxiliaires qui interviennent dans les arguments de cohérence dynamique. Voici sa reconstruction :



*forgone-event independence* : si je choisis  $P$  plutôt que  $Q$ , alors je choisis  $P$  plutôt que  $Q$  également quand auparavant il aurait pu se faire selon la probabilité  $1 - \lambda$  que je n'ai pas le choix entre  $P$  et  $Q$  mais que j'obtienne nécessairement  $C$ . indépendance vis-à-vis des événements passés contrefactuels : "a choice at a decision node...is made independently of risks forgone in the past."

*dynamic consistency* : si je choisis  $P$  plutôt que  $Q$  après que la Nature ait résolu l'incertitude entre le choix entre  $P$  et  $Q$  d'une part et  $C$  d'autre part, alors je me décide pour  $P$  plutôt que  $Q$  au cas où j'en ai le choix dès avant que la Nature ait résolu l'incertitude. cohérence dynamique : ce qu'il est optimal de faire en  $t$  est indépendant du moment auquel il est décidé

*context-independence* : si je me décide pour  $P$  plutôt que  $Q$  au cas où j'en ai le choix dès avant que la Nature ait résolu l'incertitude, alors je me décide pour la loterie composée de  $P$  et de  $C$  plutôt que pour la loterie composée de  $Q$  et de  $C$

*réduction* : si je me décide pour la loterie composée de  $P$  et de  $C$  plutôt que pour la loterie composée de  $Q$  et de  $C$ , alors je me décide pour le mixage de  $P$  et de  $C$  plutôt que pour celui de  $Q$  et de  $C$

- Application au Paradoxe d'Allais :

**EXAMPLE (most critical case for independence): Test yourself.** Do you have the (nonBayesian) preferences as in Figs 2a and 2e (M = million)? Then you violate independence ( $\lambda = 0.11$ , C yielding \$0 for sure). Determine where between Figs 2a, ..., 2e your preference switches from lower to upper, i.e., which dynamic principle you violate.

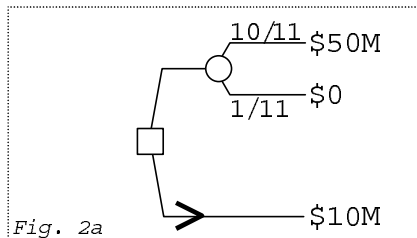


Fig. 2a

Dropped by: Ma-china; McClen-nen; Epstein & Le Breton; Jaffray

Forgone-event independence

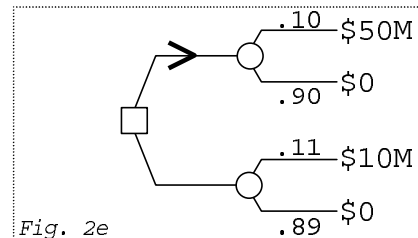


Fig. 2e

Dropped by: Segal; Chew & Epstein; Grant, Kajii, & Polak

Reduction

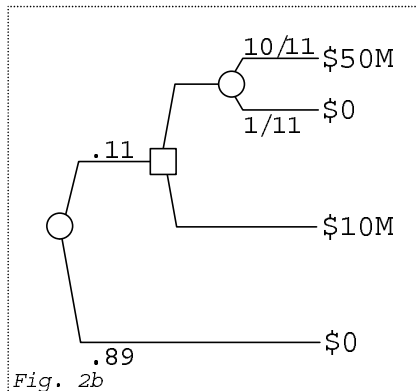


Fig. 2b

Dropped by: Dyn. c.p.

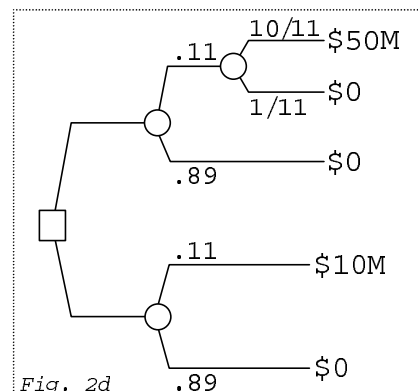


Fig. 2d

Maybe dropped by: Loomes & Sugden; Fishburn

Context Ind<sup>ce</sup>

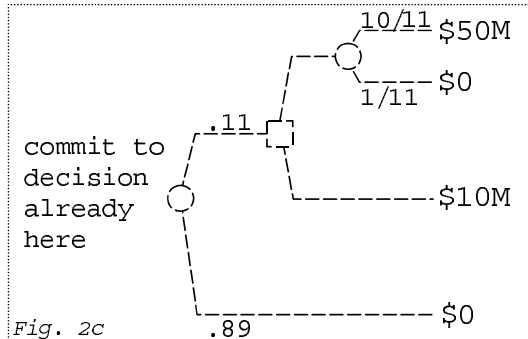


Fig. 2c

FIGURE 2

## 8 Autres anomalies empiriques et phénomènes robustes

### 8.1 common consequence effect

- L'exemple d'Allais est une instance du **common consequence effect** :

|         |                                               |                                           |
|---------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| choix 1 | $a_1 = \alpha\delta_c \oplus (1 - \alpha)L_3$ | $a_2 = \alpha L_1 \oplus (1 - \alpha)L_3$ |
| choix 2 | $a_4 = \alpha\delta_c \oplus (1 - \alpha)L_2$ | $a_3 = \alpha L_1 \oplus (1 - \alpha)L_2$ |

où

(i)  $\delta_c$  est la loterie (dégénérée) qui produit la conséquence  $c$  avec certitude [dans le PA, il s'agit de  $P$  soit 1M].

(ii)  $L_1$  est une loterie qui comprend au moins une issue meilleure que  $c$  et une issue moins bonne que  $c$  [dans le PA,  $Q$  dont les conséquences sont 0M et 5M]

(iii)  $L_3$  domine stochastiquement  $L_2$  [dans PA,  $\Phi_0$  dom.stoch.  $\phi_1$ ]

On parle de “conséquence commune” parce que  $a_1$  et  $a_2$  (resp.  $a_3$  et  $a_4$ ) ont pour conséquence commune  $L_3$  (resp.  $L_2$ ). Pour l'interprétation, voir Machina (1987), p. 10 : concevons ces loteries composées comme issues d'un tirage d'une pièce qui tombe sur le côté  $\alpha$  ou sur le côté  $(1 - \alpha)$ . Ce qui se passe, c'est que l'aversion au risque des décideurs sur ce qui peut se passer si  $\alpha$  change selon ce qui se passe si  $(1 - \alpha)$ . Meilleure est la loterie obtenue si  $(1 - \alpha)$ , plus le décideur est risquophile. Une façon de l'interpréter : déjà, si  $\alpha$ , je perds beaucoup, alors je ne veux pas prendre de risque.

#### Définition 7

Une loterie  $P = (p_1, \dots, p_n)$  **domine stochastiquement** une loterie  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  toutes deux définies sur un ensemble  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  tq  $x_1 \prec \dots \prec x_n$  ssi pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\sum_{j=1}^n p_j \geq \sum_{j=1}^n q_j$$

avec une inégalité stricte pour au moins un  $i$ .

Autrement dit  $P$  domine stochastiquement  $Q$  ssi pour tout  $i$ , la probabilité d'avoir au moins  $i$  est plus forte avec  $P$  qu'avec  $Q$ .

#### Définition 8

Les préférences d'un agent sont **monotones** ssi elles se conforment à la dominance stochastique ssi si  $P$  domine stochastiquement  $Q$ , alors  $P$  est strictement préféré à  $Q$

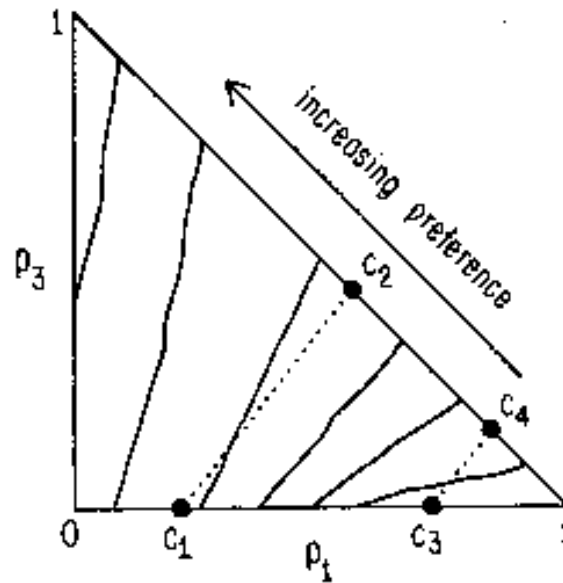
Il est aisé de vérifier que si les préférences d'un agent se laissent représenter par une fonction d'utilité vN-M, alors elles sont monotones.

## 8.2 common ratio effect

- Voici une autre anomalie qui met en jeu l'axiome d'indépendance :

|         |                            |                            |
|---------|----------------------------|----------------------------|
| choix 1 | $c_1 = (p, X; 1 - p, 0)$   | $c_2 = (q, Y; 1 - q, 0)$   |
| choix 2 | $c_3 = (rp, X; 1 - rp, 0)$ | $c_4 = (rq, Y; 1 - rq, 0)$ |

avec  $p > q$ ,  $0 < X < Y$  et  $r \in (0, 1)$ . Comme pour le common consequence effect, on peut voir avec le triangle de Marschack-Machina que le MEU implique  $c_1 \succ c_2$  ssi  $c_3 \succ c_4$  (suit de l'axiome d'indépendance).



Indifference curves which fan out and the common ratio effect

### Exemple 8 (common ratio effect, KT79)

|         |                     |                      |
|---------|---------------------|----------------------|
| choix 1 | $c_1 = (0.8, 4000)$ | $c_2 = (1, 3000)$    |
| choix 2 | $c_3 = (0.2, 4000)$ | $c_4 = (0.25, 3000)$ |

Comportement modal :  $c_1 \succ c_2$  (80 %) et  $c_3 \succ c_4$  (65 %)

Interprétation : "Apparently, reducing the probability of winning from 1.0 to 0.25 has a greater effect than the reduction from 0.8 to .2"

### 8.3 reflection effect et attitude par rapport au risque

- Voici le “reflection effect” :

|         |                       |                     |
|---------|-----------------------|---------------------|
| choix 1 | $c_1 = (0.8, 4000)$   | $c_2 = (1, 3000)$   |
| choix 2 | $c'_1 = (0.8, -4000)$ | $c'_2 = (1, -3000)$ |

Comportement modal :  $c_1 \succ c_2$  et  $c'_1 \succ c'_2$

Interprétation :  $c_1 \succ c_2$  manifeste **risquophobie pour les gains** ; mais  $c'_1 \succ c'_2$  manifeste **risquophilie** pour les pertes.

- ...mais risquophilie pour les petites probabilités de gain

|         |                  |                        |
|---------|------------------|------------------------|
| choix 1 | $d_1 = (1, 500)$ | $d_2 = (0.5, 1000)$    |
| choix 2 | $d'_1 = (1, 5)$  | $d'_2 = (0.001, 5000)$ |

Comportement modal :  $d_1 \succ d_2$  (84 %) et  $d'_1 \prec d'_2$  (72 %)

- ...et risquophobie pour les petites probabilités de pertes !

|         |                   |                         |
|---------|-------------------|-------------------------|
| choix 1 | $e_1 = (1, -500)$ | $e_2 = (0.5, -1000)$    |
| choix 2 | $e'_1 = (1, -5)$  | $e'_2 = (0.001, -5000)$ |

Comportement modal :  $e_2 \succ e_1$  (65 %) et  $e'_1 \succ e'_2$  (83 %)

- On obtient donc la **structure quaternaire** suivante d'attitudes par rapport au risque :

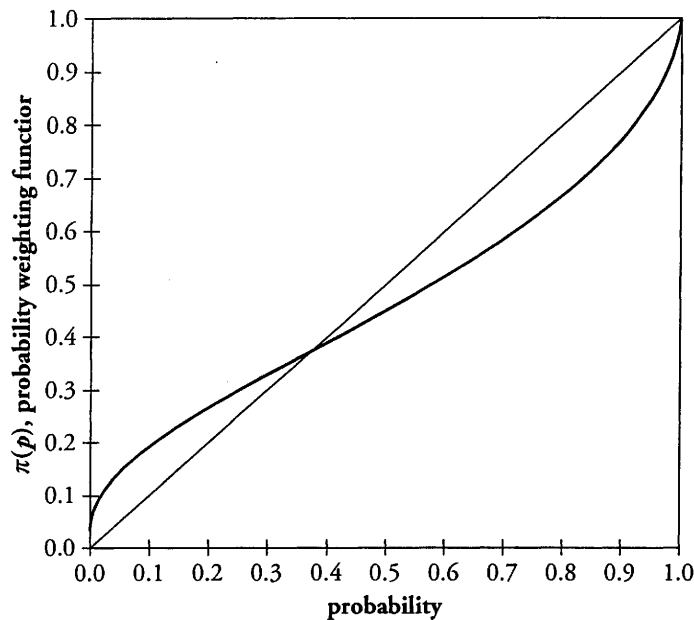
|       |                |                        |
|-------|----------------|------------------------|
|       | petites proba. | proba. moyenne à forte |
| gain  | risquophile    | risquophobe            |
| perte | risquophobe    | risquophile            |

## 9 Modèles alternatifs

• Je ne vais pas faire un panorama de l'ensemble des modèles alternatifs. Je vais dire quelques mots de la Prospect Theory de Kahneman & Tversky (1979). Il y a 2 composantes centrales de la Prospect Theory :

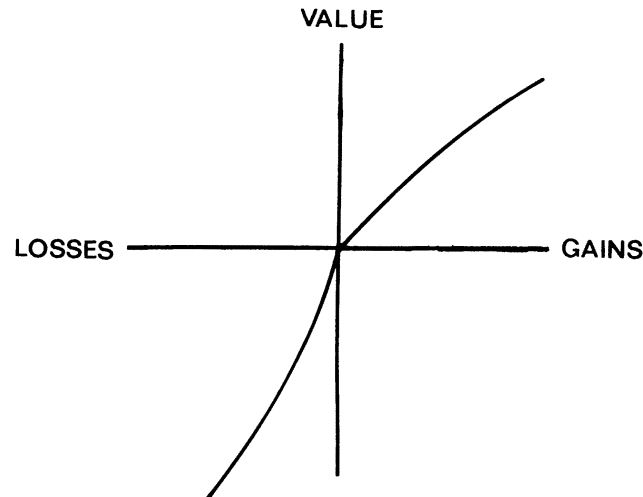
1. une **fonction de pondération**  $\pi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui déforme les probabilités ("probability weighting function") : "decision weights are inferred from choices between prospects much as subjective probabilities are inferred from preferences in the Ramsey-Savage approach. However, decision weights are not probabilities : they do not obey the probability axioms and they should not be interpreted as measures of degree of belief...Decision weights measure the impact of events on the desirability of prospects and not merely the perceived likelihood of these events."

$\pi(0) = 0$  et  $\pi(1) = 1$ . La fonction de pondération sur-pondère les petites probabilités et sous-pondère les probabilités moyennes à fortes.



**Figure 20.2** A characteristic probability weighting function

2. une **fonction de valeur**  $v(\cdot)$  analogue de la fonction d'utilité de Bernouilli dans le MEU.  $v(\cdot)$  est
  - (i) concave pour les gains
  - (ii) convexe pour les pertes
  - (iii) steeper pour les pertes que pour les gains (*loss aversion*)



“An essential feature of the present theory is that the carriers of value are changes in wealth or welfare rather than final states. This assumption is compatible with basic principles of perception and judgment. Our perceptual apparatus is attuned to the evaluation of changes or differences rather than to the evaluation of absolute magnitudes.”

A partir de la fonction de pondération et de la fonction de valeur, on obtient la fonction  $V(.)$  qui évalue les loteries :

$$(1)V(P) = \pi(p_1)v(c_1) + \pi(p_2)v(c_2) \quad (5)$$

Cela vaut pour  $c_1, c_2$  ni strictement positifs tous les deux, ni strictement négatifs. Si l'on est dans l'un ou l'autre de ces cas de figure, alors, supposons que  $c_2$  soit la composante la moins risquée (la plus proche de 0),

$$(2)V(P) = v(c_2) + \pi(p_1)[v(c_1) - v(c_2)] \quad (6)$$

L'équation (1) se réduit à l'équation (2) si  $\pi(p_1) + \pi(1 - p_1) = 1$  - ce qui n'est pas le cas général. Dans Kahneman & Tversky (1979), l'équation (2) est introduite pour rendre compte de l'anomalie de l'assurance probabiliste mais - sauf erreur de ma part - n'intervient pas dans l'explication des autres anomalies.

La fonction  $V(.)$  avec les caractéristiques décrites auparavant de  $v(.)$  et  $\pi(.)$  permet de rendre compte (1) des 4 attitudes typiques vis-à-vis du risque, (2) du *common consequence effect* et (3) du *common ratio effect*.

- (1) attitudes par rapport au risque

|         |                        |                                     |
|---------|------------------------|-------------------------------------|
| choix 1 | $f_1 = (0.25, 6000)$   | $f_2 = (0.25, 4000; 0.25, 2000)$    |
| choix 2 | $f'_1 = (0.25, -6000)$ | $f'_2 = (0.25, -4000; 0.25, -2000)$ |

Comportement modal :  $f_1 \succ f_2$  et  $f'_1 \succ f'_2$

On applique l'équation (1) :

$V(f_1) < V(f_2) \Leftrightarrow \pi(0.25).v(6000) < \pi(0.25).[v(4000) + v(2000)] \Leftrightarrow v(6000) < [v(4000) + v(2000)]$  - ce dont on peut rendre compte par  $v$  concave pour les gains.

$V(f'_1) > V(f'_2) \Leftrightarrow \pi(0.25).v(-6000) > \pi(0.25).[v(-4000) + v(-2000)] \Leftrightarrow v(-6000) < [v(-4000) + v(-2000)]$  - ce dont on peut rendre compte par  $v$  convexe pour les gains.

Attention : dans le MEU, l'attitude par rapport au risque dépend exclusivement de la fonction d'utilité. Dans la PT, ce n'est plus le cas : la fonction de pondération participe également à l'attitude par rapport au risque.

|         |                         |                  |
|---------|-------------------------|------------------|
| choix 1 | $g_1 = (0.001, 5000)$   | $g_2 = (1, 5)$   |
| choix 2 | $g'_1 = (0.001, -5000)$ | $g'_2 = (1, -5)$ |

Comportement modal :  $g_1 \succ g_2$  et  $g'_1 \prec g'_2$  (risquophilie pour gain et risquophobie pour perte).

$g'_1 \succ g'_2 \Leftrightarrow \pi(0.001).v(5000) > v(5)$  donc  $\pi(0.001) > v(5)/v(5000) > 0.001$  si  $v$  est concave.  $\pi$  grossit donc les petites probas.

- (2) *common consequence effect*

Choix 1 :



Choix 2 :



Comportement modal :  $a_1 \succ a_2$  et  $a_3 \succ a_4$ . On en infère  $v(1M) > \pi(0.89).v(1M) + \pi(0.10).v(5M)$  et  $\pi(0.10).v(5M) > \pi(0.11).v(1M)$ . Donc

$$\begin{aligned}
 v(1M) &> \pi(0.89).v(1M) + \pi(0.11).v(1M) \\
 v(1M) &> [\pi(0.89) + \pi(0.11)].v(1M) \\
 1 &> \pi(0.89) + \pi(0.11)
 \end{aligned}$$

De manière générale, la propriété de **subcertainty** est la suivante :  $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$ .  
 "...subcertainty captures an essential element of people's attitudes to uncertain events, namely that the sum of the weights associated with complementary events is typically less than the weight associated with the certain event."

- (3) du *common ratio effect*

|         |                     |                      |
|---------|---------------------|----------------------|
| choix 1 | $c_1 = (0.8, 4000)$ | $c_2 = (1, 3000)$    |
| choix 2 | $c_3 = (0.2, 4000)$ | $c_4 = (0.25, 3000)$ |

Comportement modal :  $c_1 \prec c_2$  (80 %) et  $c_3 \succ c_4$  (65 %)

$$\pi(1).v(3000) > \pi(0.8).v(4000) \text{ et } \pi(0.2).v(4000) > \pi(0.25).v(3000)$$

$$\pi(1)/\pi(0.8) > v(4000)/v(3000) \text{ et } v(4000)/v(3000) > \pi(0.25)/\pi(0.2)$$

$$\pi(1)/\pi(0.8) > \pi(0.25)/\pi(0.2)$$

De manière générale, pour  $p > q$  et  $r \in (0, 1)$ , la propriété de **subproportionality** est la suivante :  $\pi(p)/\pi(q) > \pi(rp)/\pi(rq)$ .

- La **subcertainty** ( $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$ ) implique l'une des propriétés les plus controversées de la PT : la violation de la dominance stochastique (plus précisément, de la monotonie). Supposons en effet que  $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$ . Alors il existe un  $\epsilon > 0$  tq  $(x, p; x + \epsilon, 1-p) \succ (x, 1)$ . Or,  $(x, 1)$  domine stochastiquement  $(x, p; x + \epsilon, 1-p)$ .

- violation de la monotonie, TK86

Problem 7 (N = 88) Consider the following two lotteries, described by the percentage of marbles of different colors in each box and the amount of money you win or lose depending on the color of a randomly drawn marble. Which lottery do you prefer ?<sup>1</sup>

Option A

|          |        |         |         |          |
|----------|--------|---------|---------|----------|
| 90 white | 6 red  | 1 green | 1 blue  | 2 yellow |
| 0        | win 45 | win 30  | lose 15 | lose 15  |

Option B

|          |        |         |         |          |
|----------|--------|---------|---------|----------|
| 90 white | 6 red  | 1 green | 1 blue  | 2 yellow |
| 0        | win 45 | win 45  | lose 10 | lose 15  |

Problem 8 (N = 124) Which lottery do you prefer ?

Option C

|          |        |         |          |
|----------|--------|---------|----------|
| 90 white | 6 red  | 1 green | 3 yellow |
| 0        | win 45 | win 30  | lose 15  |

Option D

|          |        |         |          |
|----------|--------|---------|----------|
| 90 white | 7 red  | 1 green | 2 yellow |
| 0        | win 45 | lose 10 | lose 15  |

Comportement modal :  $B \succ A$  (100 %) et  $C \succ D$  (58 %)

## 10 Références

- Kahneman & Tversky (1979), "Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk", *Econometrica*, vol.47, n°2, pp. 263-92
- Starmer (2000), "Developments in Non-Expected Utility Theory", *Journal of Economic Literature*, vol.XXXVIII, pp. 332-82
- Tversky & Kahneman (1986), "Rational Choice and the Framing of Decisions", *The Journal of Business*, 59 :4
- Tversky & Kahneman (1992), "Advances in Prospect Theory : Cumulative Representation of Uncertainty", *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, pp. 297-33
- Wu, Zhang & Gonzalez (2004), "Decision Under risk", dans N.Harvey & D. Koehler (eds), *Blackwell Handbool of Judgment and Decision Making*
- P. Wakker (1999), "Justifying Bayesianism by Dynamic Decisions Principles", Mimeo