Logique, 3

Théories de la rationaltié séance 4

M. Cozic

remerciements à ...

- ...D. Bonnay

3. sémantique de LP

introduction

- sémantique = partie de la LP qui s'occupe de l'interprétation du langage
- on a déjà vu une partie de la sémantique en donnant la sémantique des connecteurs propositionnels
- maintenant on va voir comment assigner systématiquement une valeur de vérité à une formule en fonction des valeurs de vérité de ses constituants
- objectif: donner une caractérisation rigoureuse de l'idée informelle de la conséquence logique:

  "Supposé la vérité des prémisses, il faut nécessairement que la conséquence soit vraie."

  Arnaud & Nicole, *Logique de Port-Royal*, III,1

3.1. valuation atomique et valuation

Définition Une valuation atomique (v.a.) v est manière d'assigner une valeur de vérité à toute formule atomique (on dit en langage mathématique que c'est une fonction $v: At \rightarrow \{0, 1\}$)

Soit un langage avec trois atomes. $At = \{p, q, r\}$
La fonction $v: \{p, q, r\} \rightarrow \{0, 1\}$
définie par $v(p) = 1$, $v(q) = 0$, $v(r) = 1$
est une v.a.

Intuitivement, une v.a. correspond à une situation possible.

Si on a 2 atomes, on a 4 v.a. :

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Si on a 3 atomes,

p	q	r
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Si on a 3 atomes,

p	q	r
1	1	1
		0
1	0	
0	1	
0	0	

Si on a 3 atomes,

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	
0	1	
0	0	

Si on a 3 atomes, on a 8 v.a. :

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Si on a n atomes, on a   v.a.

Si on a n atomes, on a 2^n v.a.

Une fois qu'on a fixé la valeur de vérité des atomes, on a fixé la valeur de vérité de toutes les formules :

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee p)$
1	1	0			

Une fois qu'on a fixé la valeur de vérité des atomes, on a fixé la valeur de vérité de toutes les formules :

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee p)$
1	1	0			

Une fois qu'on a fixé la valeur de vérité des atomes, on a fixé la valeur de vérité de toutes les formules :

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee p)$
1	1	0	1		

Une fois qu'on a fixé la valeur de vérité des atomes, on a fixé la valeur de vérité de toutes les formules :

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee p)$
1	1	0	1	0	

Une fois qu'on a fixé la valeur de vérité des atomes, on a fixé la valeur de vérité de toutes les formules :

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee p)$
1	1	0	1	0	1

Définition Une valuation V est une manière d'assigner une valeur de vérité à toute formule du langage (en langage math., une fonction V : $Form \rightarrow \{0, 1\}$)

Définition Une valuation V est une manière d'assigner une valeur de vérité à toute formule du langage (en langage math., une fonction $V : Form \rightarrow \{0, 1\}$)
qui respecte les tables de vérité des connecteurs

Définition Une valuation V est une manière d'assigner une valeur de vérité à toute formule du langage (en langage math., une fonction $V: \ Form \rightarrow \{0,1\}$)

i.e. telle que :

- $V((\phi \wedge \psi)) = 1$ ssi $V(\phi) = V(\psi) = 1$,
- $V((\phi \vee \psi)) = 1$ ssi $V(\phi) = 1$ ou $V(\psi) = 1$
- $V((\phi \rightarrow \psi)) = 0$ si $V(\phi) = 1$ et $V(\psi) = 0$, et 1 sinon,
- $V((\phi \leftrightarrow \psi)) = 1$ si $V(\phi) = V(\psi)$, et 0 sinon,
- $V(\neg\phi) = 1 - V(\phi)$.

Théorème Soit v une valuation atomique; il existe une unique valuation V qui *étend* v i.e. telle que pour toute formule atomique p, $v(p) = V(p)$.

- signification: la valeur de vérité d'une formule du langage ne dépend que de la valeur de vérité des formules atomiques du langage

Prop. Soient V et V' deux valuations qui s'accordent sur les formules atomiques d'une formule ϕ (i.e. pour toute formule atomique p apparaissant dans ϕ, $V(p) = V'(p)$). Alors $V(\phi) = V'(\phi)$.

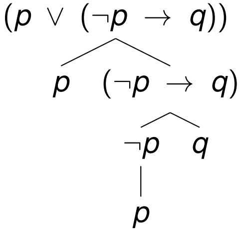
- signification: la valeur de vérité d'une formule du langage ne dépend que de la valeur de vérité des formules atomiques qui y apparaissent

valuation et évaluation

- la Prop. qui précède signifie que pour une formule ϕ qui contient n formules atomiques, il y a 2^n (classes de) valuations pertinente
- évaluer une formule ϕ contenant n formules atomiques, c'est donner sa valeur de vérité pour chacune des 2^n valuations pertinentes
- on présente l'évaluation d'une formule sous la forme d'une table de vérité où (a) les lignes correspondent aux différentes valuations pertinentes et (b) les colonnes correspondent aux différentes sous-formules jusqu'à arriver à la formule elle-même qui est placée dans la colonne la plus à droite

évaluation et table de vérité

- exemple : $(p \vee (\neg p \rightarrow q))$



- table de vérité:

p	q	$\neg p$	$(\neg p \rightarrow q)$	$(p \vee (\neg p \rightarrow q))$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

3.2. Notions logiques fondamentales

Définition Une formule ϕ est une tautologie (notation: $\models \phi$) ssi pour toute valuation V, $V(\phi) = 1$.

En termes de table de vérité: la colonne terminale ne contient que des 1.
Exemple: $\models (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Définition Une formule ϕ est une antilogie (ou : contradiction) ssi pour toute val. V, $V(\phi) = 0$.

En termes de table de vérité: la colonne terminale ne contient que des 0.

Exemple: $((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p))$

p	$\neg p$	$(p \rightarrow \neg p)$	$(\neg p \rightarrow p)$	$((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p))$
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0

Définition Une formule ϕ est une formule neutre ssi il existe deux val. V et V' telles que $V(\phi) = 0$ et $V'(\phi) = 1$.

En termes de table de vérité: la colonne terminale contient au moins un 1 et au moins un 0.
Exemple: $(p \to q)$

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition ϕ et ψ sont équivalentes ($\phi \equiv \psi$) ssi pour toute val. V, $V(\phi) = V(\psi)$

En termes de table de vérité: les colonnes terminales des deux formules sont identiques.

Exemple : $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

On va définir la relation de conséquence logique.

On va définir la relation de conséquence logique.

comme une relation entre un ensemble de formules et une formule

On va définir la relation de conséquence logique.

comme une relation entre un ensemble de formules Γ
et une formule ϕ
notation : $\Gamma \vDash \phi$

On va définir la relation de conséquence logique.

comme une relation entre un ensemble de formules Γ
et une formule ϕ
notation : $\Gamma \vDash \phi$

On veut que $\Gamma \vDash \phi$
ssi un argument dont les prémisses sont Γ et la conclusion ϕ
est correct.

On va définir la relation de conséquence logique.

comme une relation entre un ensemble de formules Γ
et une formule ϕ
notation : $\Gamma \vDash \phi$

On veut que $\Gamma \vDash \phi$
ssi un argument dont les prémisses sont Γ et la conclusion ϕ
est correct.

Idée : on va utiliser la notion de valuation.

Définition Γ a pour conséquence logique ϕ ($\Gamma \vDash \phi$) ssi pour toute val V, si pour toute formule ψ dans Γ on a $V(\psi) = 1$, alors $V(\phi) = 1$.

Exemple :

- $\{p, (p \to q)\} \vDash q$
- $\{q, (p \to q)\} \nvDash p$

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition Γ a pour conséquence logique ϕ ($\Gamma \vDash \phi$) ssi pour toute val V, si pour toute formule ψ dans Γ on a $V(\psi) = 1$, alors $V(\phi) = 1$.

Exemple :

- $\{p, (p \rightarrow q)\} \vDash q$
- $\{q, (p \rightarrow q)\} \nvDash p$

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition Γ **a pour conséquence logique** ϕ ($\Gamma \vDash \phi$) ssi pour toute val V, si pour toute formule ψ dans Γ on a $V(\psi) = 1$, alors $V(\phi) = 1$.

Exemple :

- $\{p, (p \rightarrow q)\} \vDash q$
- $\{q, (p \rightarrow q)\} \nvDash p$

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition Γ **a pour conséquence logique** ϕ ($\Gamma \vDash \phi$) ssi pour toute val V, si pour toute formule ψ dans Γ on a $V(\psi) = 1$, alors $V(\phi) = 1$.

Exemple :

- $\{p, (p \to q)\} \vDash q$
- $\{q, (p \to q)\} \nvDash p$

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition Γ **a pour conséquence logique** ϕ ($\Gamma \vDash \phi$) ssi pour toute val V, si pour toute formule ψ dans Γ on a $V(\psi) = 1$, alors $V(\phi) = 1$.

Exemple :

- $\{p, (p \to q)\} \vDash q$
- $\{q, (p \to q)\} \nvDash p$

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fait $\phi \equiv \psi$ ssi $\models \phi \leftrightarrow \psi$

Preuve: exercice

Fait ϕ est une tautologie ssi $\neg\phi$ est une antilogie.

Preuve
ϕ est une tautologie
ssi pour toute val V, $V(\phi) = 1$ (déf de taut.)
ssi pour toute val V, $V(\neg\phi) = 0$ (déf. de $\neg$)
ssi $\neg\phi$ est une antilogie (déf de antilogie)

Définition Γ est **contradictoire** ssi il n'existe pas de val V telle que pour tout ψ dans Γ, $V(\psi) = 1$.

Fait $\Gamma \models \phi$ ssi $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ est contradictoire

Preuve:

$\Gamma \models \phi$

ssi pour toute val V, si pour toute ψ dans Γ on a $V(\psi) = 1$, alors $V(\phi) = 1$. (déf $\models$)

ssi pour toute val V, si pour toute ψ dans Γ on a $V(\psi) = 1$, alors $V(\neg\phi) = 0$. (déf de $\neg$)

ssi il n'existe pas de val V telle que pour tout ψ dans $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$, $V(\psi) = 1$. logique

ssi $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ est contradictoire (déf contradictoire)

équivalence remarquable

Lois de de Morgan :

$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$
$\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$

Associativité de $\wedge$ et de $\vee$

$(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \vee \chi)$
$(\phi \wedge (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \wedge \chi)$

Commutativité de $\wedge$ et de $\vee$

$(\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi)$
$(\phi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \phi)$

équivalence remarquable

Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ et $\vee$ sur $\wedge$

$\phi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$

$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$

Idempotence

$\phi \equiv (\phi \vee \phi) \equiv (\phi \wedge \phi)$

Double négation

$\phi \equiv \neg\neg\phi$

Conditionnel

$\phi \to \psi \equiv (\neg\phi \vee \psi)$

4. symbolisation en LP et évaluation des arguments

revenons aux arguments

- nous avons commencé par examiner les arguments, formulés dans la langue naturelle
- nous avons introduit une définition (informelle) de ce qu'était un argument valide
- nous avons désormais, *pour certains types d'arguments* une définition précise, mathématique, accompagnée d'une méthode pour déterminer si un argument (formulé cette fois dans le langage de la LP) est valide ou non: la méthode des tables de vérité

revenons aux arguments

- pour utiliser les concepts et outils de la LP, il faut au préalable symboliser dans le langage de la LP les énoncés qui apparaissent dans l'argument
- exemple
  "Si Marie a faim, Jean ira lui acheter quelque chose"

  Dictionnaire:
  p: "Marie a faim"
  q: "Jean ira acheter quelque chose à Marie"

  Symbolisation: $(p \to q)$

évaluation d'un argument

- exemple: “Si Marie a faim, Jean ira lui acheter quelque chose. Marie a faim. Donc Jean ira lui acheter quelque chose.”

- symbolisation:

$$\frac{\begin{array}{l}(p \to q)\\ p\end{array}}{q}$$

évaluation d'un argument

- table de vérité pour l'argument:

p	q	$(p \rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

...l'argument est donc valide !