Probabilités, 2

Théories de la rationaltié
séance 8

M. Cozic

2. probabilités: premières notions

2.1. espace d'états et événements

espace d'états et événements

- espace d'états S = ensemble des mondes possibles (notamment, issues possibles d'une certaine expérience)
  - exemple : lancer de dé
    $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- on peut être intéressé par (ou avoir des informations sur) non pas des états de S mais des événements ou propositions
  - exemple : événement "le dé est tombé sur une face paire"
    $E = \{2, 4, 6\}$
- les événements (ou propositions) sont donc des ensembles d'états

opérations sur les événements (ou propositions)

(i) négation:

- ▷ l'événément $\neg E$ = "le dé n'est pas tombé sur une face paire" = $\{1, 3, 5\}$

(ii) disjonction:

- ▷ E' le dé est tombé sur une face ≤ 3"
  l'événement $E \vee E'$ = "le dé est tombé sur une face paire ou ≤ 3" = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

(iii) conjonction:

- ▷ l'événement $E \wedge E'$ = "le dé est tombé sur une face paire et ≤ 3" = $\{2\}$

2.2. les axiomes des probabilités

probabilités

- la représentation probabiliste de l'incertitude = assigner un poids aux événements en respectant certains axiomes
- axiomes des probabilités:

(A1) $P(S) = 1$ où S est l'événement certain

S a le degré de probabilité maximal

probabilités

(A2) $0 \leq P(E) \leq 1$ pour tout événement E

(A3) $P(E \vee E') = P(E) + P(E')$ si E sont E' disjoints (i.e. $E \wedge E'$ n'est jamais le cas)

- exemple: E: "le dé tombe sur une face paire" E': "le dé tombe sur 5"

exemple

- exemple : la probabilité uniforme sur $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  $P(i) = 1/6$
  supposons que $E = \{1, 2, 3\} = 1 \vee 2 \vee 3$;
  $P(E) = P(1) + P(2) + P(3) = 1/2$
  soit $E' = \{5\}$
  alors par la règle d'addivitité,
  $P(E \vee E') = P(E) + P(E') = 1/2 + 1/6 = 2/3$

exemple

- attention: soit $E'' = \{3, 4\}$
- E et E' en sont pas disjoints, et

$$P(E \vee E'') = P(\{1, 2, 3, 4\} = 2/3$$

tandis que

$$P(E) + P(E'') = 1/2 + 1/3 = 5/6 \text{ !}$$

- proposition: pour tout événement E,

$$P(\neg E) = 1 - P(E)$$

Preuve:

- E et $\neg E$ sont disjoints donc par (A3) $P(E \vee \neg E) = P(E) + P(\neg E)$
- $E \vee \neg E = S$ donc par (A1) $P(E) + P(\neg E) = 1$
- donc $P(\neg E) = 1 - P(E)$

3. probabilité conditionnelle et théorème de Bayes

3.1. probabilité conditionnelle

la probabilité conditionnelle

- $P(A|B)$: probabilité que A soit réalisé sachant que B s'est réalisé
- exemple: probabilité que le dé soit tombé sur une face paire sachant qu'il est tombé sur une face ≤ 3
- comment évaluer cette nouvelle probabilité ?
- exemple
  - les états où B n'est pas le cas sont écartés et reçoivent une probabilité nulle
  - parmi les états où B est vrai (ou réalisé) $\{1, 2, 3\}$, un seul, l'état 2 est une état où A est vrai (ou réalisé)
  - le poids relatif de 2 parmi $\{1, 2, 3\}$ est 1/3. C'est la probabilité conditionnelle !

la probabilité conditionnelle

- soient deux événements A, B et supposons que $P(B) > 0$;
  $P(A|B) =_{df} P(A \wedge B)/P(B)$
  $P(A)$ = probabilité a priori de A
  $P(A|B)$ = probabilité a posteriori de A
- exemple: $P(A|B) = (1/6)/(1/2) = 1/3$

théorème des probabilités totales

- $A = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ donc par additivité

$P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B)$ donc (si $0 < P(B) < 1$)

$$\boxed{P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\neg B) \cdot P(\neg B)}$$

exemple

- la maladie M est présente chez 1/1000 individu
- test pour détecter la maladie M: quand l'individu est malade (M), le test est positif 9/10 ; quand l'individu est sain, le test est négatif 8/10
- quelle est la probabilité qu'un test se révèle positif ?
- $P(POS) = P(POS|M) \cdot P(M) + P(POS|\neg M) \cdot P(\neg M)$
  $P(POS) = 9/10 \cdot 1/1000 + 2/10 \cdot 999/1000 \approx 0,2$

3.2. le théorème de Bayes

théorème de Bayes

- un autre théorème fondamental pour le raisonnement probabiliste, le théorème de Bayes:

$$\boxed{P(A|B) = P(B|A) \cdot P(A)/P(B)}$$

- quel intérêt d'exprimer $P(A|B)$ en termes de $P(B|A)$
- il arrive souvent que l'on soit intéressé par $P(A|B)$ mais que l'on connaisse plutôt $P(B|A)$
- ▷ exemple: diagnostic
  $P(maladie|symptome) = P(symptome|maladie) \cdot P(maladie)/P(symptome)$
  pourquoi connaîtrait-on mieux $P(symptome|maladie)$?
  $P(symptome|maladie)$ peut être invariant d'une population à l'autre tandis que $P(maladie|symptome)$ dépend aussi de $P(maladie)$ donc (en gros) de la fréquence de la maladie dans la population du patient

théorème de Bayes

- le théorème de Bayes:

$$\boxed{P(A|B) = P(B|A) \cdot P(A)/P(B)}$$

peut se formuler de la façon suivante:

$$\boxed{P(A|B) = [P(B|A) \cdot P(A)]/[P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\neg A) \cdot P(\neg A)]}$$

exemple: vrais positifs

- exemple: M touche 1/1000 individu ; si un individu est malade, le test est positif 999/1000 ; s'il est sain, le test est négatif 999/1000
  quelle est la probabilité pour qu'un individu testé positif soit malade ?
  $P(M|POS) = P(POS|M) \cdot P(M)/P(POS)$
- comment déterminer $P(POS)$?
  $P(POS) = P(POS \wedge M) + P(POS \wedge \neg M)$
  $P(POS) = P(POS|M) \cdot P(M) + P(POS|\neg M) \cdot P(\neg M)$
  $P(POS) = 999/1000 \cdot 1/1000 + 1/1000 \cdot 999/1000$
  donc
  $P(M|POS) = (999/1000 \cdot 1/1000)/(999/1000 \cdot 1/1000 + 1/1000 \cdot 999/1000) = 1/2$

les taxis (Kahneman & Tversky)

- Un accident de la route a impliqué un taxi, qui a fui. Il y a deux compagnies de taxi en ville, les Verts et les Bleus. 85 % des taxis sont des Verts, 15 % des Bleus. Un témoin a identifié le taxi comme un Bleu. La fiabilité du témoin est testée dans des circonstances analogues: il identifie la bonne couleur 80 % du temps, et se trompe 20 % du temps.
- question: quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit un Bleu ?
  80 % ? Moins ? Plus ou moins que la probabilité qu'il soit un Vert ?

les taxis

- soit V = le taxi impliqué est vert, B = le taxi impliqué est bleu, T_B = le témoin dit que le taxi était bleu
  $P(V) = 0.85$, $P(B) = 0.15$, $P(T_B|B) = 0.8$

  $P(B|T_B) = P(T_B|B) \cdot P(B)/P(T_B)$
  $= [P(T_B|B) \cdot P(B)]/[P(B) \cdot P(T_B|B) + P(\neg B) \cdot P(T_B|\neg B)$
  $= [P(T_B|B) \cdot P(B)]/[P(B) \cdot P(T_B|B) + P(V) \cdot P(T_B|V)]$
  $= (0.8 \cdot 0.15)/[(0.8 \cdot 0.15) + (0.85 \cdot 0.2)] \approx .41$
  et donc $P(V|T_B) \approx 0.59 > P(B|T_B)$!

les taxis

- le résultat est étrange, parce que le témoin est, par hypothèse, tout à fait fiable
- l'exemple nous permet de distinguer entre deux sens de fiabilité:
  - $P(T_B|B)$: la probabilité pour que le témoin identifie le taxi comme bleu étant donné qu'il est bleu (cela dépend des capacités perceptives du témoin)
  - $P(B|T_B)$: la probabilité pour que le taxi soit bleu étant donné qu'il est identifié comme bleu par le témoin (cela dépend des capacités perceptivse du témoin ET de la proportion de taxis bleus dans la population)

indépendance

- deux événements A et B sont indépendants si $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$
- quand $P(B) > 0$, ceci est équivalent à dire $P(A|B) = P(A)$
- autrement dit: A et B sont indépendants quand, être informé de l'un des événements ne nous conduit pas à changer les probabilités de l'autre.
- on le note (parfois) $A \perp B$.

indépendance, exemple

- exemple: on lance indépendamment deux pièces non biaisées
  $S = \{PP, FF, PF, FP\}$
  B = la première pièce tombe sur face = $\{FF, FP\}$
  A = les deux pièces tombent du même côté = $\{FF, PP\}$
- A et B sont-ils indépendants ?
  $P(A|B) = P(A \wedge B)/P(B)$
  $P(A|B) = P((FF \vee PP) \wedge (FF \vee FP))/P(FF \wedge FP)$
  $P(A|B) = P(FF)/P(FF \vee FP) = 1/2 = P(A)$
  donc A et B sont indépendants

indépendance conditionnelle

- A et B sont conditionnellement indépendants étant donné C si

$$\boxed{P(A|B \wedge C) = P(A|C)}$$

- idée: une fois que je sais que C est réalisé, apprendre que B ne provoque pas de changement de la probabilité de A

exemple

- soit les événements suivants:
  B le baromètre chute
  P la pression atmosphérique chute
  O il y a de l'orage
- ces événements ne sont (intuitivement) pas indépendants:
  $P(B|P) \neq P(B)$, $P(O|P) \neq P(O)$, $P(B|O) \neq P(B)$
- mais B et O sont conditionnellement indépendants étant donné P: l'info. que la pression atmo. chute ne m'amène pas à estimer la probabilité que le baromètre chute de manière différente que ne l'aurait fait l'info. que la pression atmo. chute et qu'il y a de l'orage
  $P(B|P) = P(B|P \wedge O)$

causalité et indépendance conditionnelle

- dans l'ex. précédent, il y a corrélation (proba.) entre B et O mais pas de lien de causalité
- la corrélation s'explique par une cause commune P
- idée générale: utiliser l'indépendance conditionnelle pour discriminer les corrélations causales des corrélations non-causales (Reichenbach, "P screens off B from C"

4. interprétation des probabilités

- pour terminer cette initiation au raisonnement probabiliste, quelques mots sur l'interprétation des probabilités qui constitue l'une des questions centrales de la philosophie des probabilités
- depuis sa naissance (17è siècle), la théorie des probabilités est marquée par une dualité d'interprétation:

(i) interprétation "épistémique": les probabilités sont des degrés de croyance

(ii) interprétation "physique": les probabilités sont des propriétés du monde extérieur

exemple

- quand on dit, par exemple, que
- la probabilité pour que la pièce tombe sur face est 1/2
- pour l'interprétation épistémique, on parle du degré de croyance d'un sujet connaissant: celui-ci croit au degré 1/2 que la pièce tombe (ou est tombé, ou tombera) sur face
- pour l'interprétation physique, on parle d'une propriété de la pièce (et, en fait, du dispositif par lequel on le jette, etc.)

l'interprétation physique

- quelle propriété physique attribue-t-on quand on dit que la pièce a une chance sur deux de tomber sur face ?
- l'interprétation physique la plus célèbre est l'interprétation fréquentiste: la probabilité que la pièce tombe sur face est 1/2 parce que, si l'on jette la pièce un grand nombre de fois, elle tombera sur face la moitié du temps
- de manière générale, la probabilité d'un événement de type A est la fréquence relative des événements de type A dans une certaine suite.

l'interprétation fréquentiste

- il est aisé de voir que les axiomes des probabilités sont satisfaits par cette interprétation.
- exemple: je jette un dé à 6 faces 100 fois. Il tombe sur 3 20 fois et sur 4 15 fois. Tomber sur 3 et tomber sur 4 sont des événements disjoints.
  - la fréquence relative de 3 est 20/100
  - la fréquence relative de 4 est 15/100
  - la fréquence relative de $3 \vee 4$ est 35/100, conformément à l'axiome d'additivité
- de manière générale, si A et B sont des événements disjoints, si la fréquence relative de A est a, si celle de B est b, alors la fréquence relative de $A \vee B$ est $a + b$

l'interprétation fréquentiste

- problème: qu'est-ce que la suite par rapport à laquelle on évalue la fréquence relative ?
- réponse ♯1: des suites actuelles
- problèmes:
  - si la pièce n'est jamais jetée, elle n'a aucune probabilité
  - si la pièce est jetée une seule fois, la probabilité pour qu'elle tombe sur face est soit de 0, soit de 1
  - si la pièce est parfaitement symétrique mais tombe sur face 2 fois sur 10, la probabilité de face sera 0.2
- réponse ♯2: des suites infinies

l'interprétation fréquentiste

- problème: supposons que je m'intéresse à la probabilité avec laquelle je vivrai jusqu'à 80 ans. Il s'agit d'un événement singulier. A quel type d'événement dois-je le rattacher ?
  - la probabilité qu'un citoyen français vive jusqu'à 80 ans
  - la probabilité qu'un citoyen français de sexe masculin vive jusqu'à 80 ans
  - la probabilité qu'un citoyen français conducteur de scooter vive jusqu'à 80 ans
- on appelle ce problème le problème de la classe de référence

l'interprétation propensionniste

- face à ces difficultés, Popper a proposé une autre interprétation physique dite propensionniste
- selon cette interprétation, quand je dis que

- la probabilité que la pièce tombe sur face est 1/2

  j'affirme que l'ensemble des conditions physiques constitué par la pièce, le dispositif par lequel elle est lançée et la configuration du support qui la reçoit a une propension à réaliser l'apparition de face qui est mesurée par 1/2

l'interprétation épistémique

- selon l'interprétation épistémique, les probabilités sont des degrés de croyance
- la plus célèbre des interprétations épistémiques est l'interprétation bayésienne

épistémologie bayésienne

- 3 thèses centrales à propos des croyances d'un individu idéalement rationnel :

(B1) le **gradualisme** : il faut compter avec les degrés de croyance dans une proposition et non pas seulement avec le fait de croire ou de ne pas croire qu'elle est vraie.

(B2) le **probabilisme** : les degrés de croyance sont numériques et, plus précisément, sont des probabilités attribuées aux propositions possibles.

(B3) la **conditionnalisation** : les degrés probabilistes de croyance varient avec l'information donnée sur les états du monde en suivant la règle de conditionnalisation.

le probabilisme

- probabilisme: les degrés de croyance d'un agent rationnel obéissent aux axiomes des probabilités:

(A1) pour tout H, $P(H) \geq 0$

(A2) $P(H) = 1$ si H est une vérité logique

(A3) $P(H_1 \vee H_2) = P(H_1) + P(H_2)$ si H_1 et H_2 sont logiquement incompatibles

- les degrés de croyance vont donc de 0 à 1:
  - croire que H au degré 0, c'est être certain que H est faux
  - croire que H au degré 1, c'est être certain que H est vrai

exemple

- Paul croit au degré 2/6 que le dé tombera sur 1 ou 2
- Paul croit au degré 2/6 que le dé tombera sur 3 ou 4
- Paul croit au degré 4/6 que le dé tombera sur 1, 2, 3 ou 4

justification du probabilisme

- pourquoi les degrés de croyance (d'un individu rationnel) devraient-il obéir aux probabilités ?
- argument du pari hollandais (*dutch book*): si un individu a des degrés de croyance qui violent les probabilités et s'il parie sur la base de ces degrés de croyance, alors il est vulnérable i.e. il est prêt à accepter un ensemble de paris dont il est certain de repartir perdant quoiqu'il arrive

exemple de Pari Hollandais

Supposons que
(i) Paul croit au degré 0.4 que H est vrai et au degré 0.7 que H n'est pas vrai (ce qui viole le calcul des probabilités); et
(ii) ses croyances sont reflétées dans ses coefficients de pari.
Cela signifie que Paul est prêt à payer 0.4 m euros pour un pari qui rapporte m euros si H est le cas, et 0 euro sinon.

Marie peut alors proposer deux paris à Paul qui lui vaudront une perte certaine : posons par exemple $m = 10$ euros et supposons que Marie propose
♯ le Pari 1 sur H (pour $0.4 \cdot 10$ euros), et
♯ le Pari 2 sur $\neg H$ (pour $0.7 \cdot 10$ euros).

Si H est le cas, alors Paul obtiendra $10 - (0.4 \cdot 10 + 0.7 \cdot 10) = -1$ euro. Si H n'est pas le cas, alors Paul perdra également un euro. Autrement dit, Pierre est perdant dans tous les cas !