Vague et théorie de la décision

M. Cozic

IHPST/Paris 1, CNRS, DEC-ENS

Séminaire sur le Vague
IJN
25/II/2009

introduction

- le cadre classique de la théorie de la décision n'est pas adéquat pour représenter les préférences d'agents qui font face à des séries d'options où apparaissent des paires indiscriminables
- modifications proposées : semi-ordres de Luce (1956) et ses généralisations (ex., ordres intervalle de Fishburn (1970))
- modèles utilisé récemment en linguistique par R. van Rooij pour le traitement du vague

introduction, cont.

- Plan de l'exposé:

1. le cadre classique
2. les semi-ordres
3. discussion

1. le cadre classique

les préférences

- première notion fondamentale : préférences sur un ensemble d'options possibles X
- x est préféré strictement à y : xPy
- x est préféré largement à y : xRy
- l'agent est indifférent entre x et y : xIy
- préférences rationnelles:

(i) R est **transitive:** $\forall x, y, z$ si xRy et yRz alors xRz

(ii) R est **complète:** xRy ou yRx

- de manière équivalente, on peut partir de P en demandant (i) asymétrie et (ii) transitivité négative
- dans tous les cas, P est irréflexive, asymétrique et transitive
- I est réflexive, symétrique et transitive

l'utilité

- seconde notion fdtale : l'utilité $u : X \to \mathbb{R}$
- $u : X \to \mathbb{R}$ **représente** une relation de préférence R sur X ssi pour tout $x, y \in X$,

$$xRy \text{ ssi } u(x) \geq u(y)$$

- **Théorème** (X dénombrable)
  R est une relation de préférence rationnelle sur X ssi il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ qui représente R.

l'utilité

- l'utilité est une mesure ordinale - elle n'encode rien de plus que le classement:
- **Théorème.** Si $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ représente la relation de préférence R, alors pour toute fonction strictement croissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = f(u(x))$ représente R également
- rem (d'après Suppes & Zinnes 1963): différents types d'échelles $e : X \rightarrow \mathbb{R}$:
  - échelle ratio : unique à une transformation multiplicative croissante près (poids)
  - échelle d'intervalle : unique à une transformation affine croissante près (température, utilité cardinale)
  - échelle ordinale : unique à une transformation croissante près (échelle de Moh en minéralogie, échelle de Beaufort, utilité ordinale)

2. les semi-ordres

indiscriminabilité sensorielle et intransitivité de l'indifférence

- la série des tasses de café: X = 201 tasses de café avec dans chaque tasse $(5 + i/10)$ g où $0 \leq i \leq 200$

$$0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; i-1 \qquad i \qquad i+1 \cdots\cdots\cdots\; 200$$

$5g$ $\qquad$ $25g$

$1 morc.$ $\qquad$ $5 morc.$

indiscriminabilité sensorielle et intransitivité des préférences, cont.

- les préférences de Jean :
- Jean préfère strictement un morceau (5 g) à 5 morceaux (25 g): $0P5$
- Jean est indifférent entre i et $i+1$ comme entre i et $i-1$: $i-1IiIi+1$

$$0 \cdots\cdots i-1 \longleftrightarrow i \longleftrightarrow i+1 \cdots\cdots 200$$

- I ne peut pas être transitive !

Luce-représentabilité

- intuition de base : il existe une préférence stricte entre x et y ssi x et y diffèrent “assez”
- Scott & Suppes (1958) : “xPy might be interpreted as meaning that...
  ...the pitch of the sound x is *definitely higher* than the pitch of y, or that...
  ...the hue of color x is *definitely brighter* than the hue of color y, or that..
  ...the weight of the object x is *noticeably greater* than that of y”
- si l’on fixe conventionnelement à 1 cette écart suffisant,

$$xPy \text{ ssi } u(x) - u(y) > 1 \text{ (}\textbf{Luce-représentabilité}\text{)}$$

propriétés des préférences

- si P est L-représentable, alors...
- (L1) $\neg xPx$

- (L2) si $xPIPy$, alors xPy : si $u(x) - u(v) > 1$ et $u(v) - u(w) < 1$ et $u(w) - u(y) > 1$, alors $u(x) - u(y) > 1$

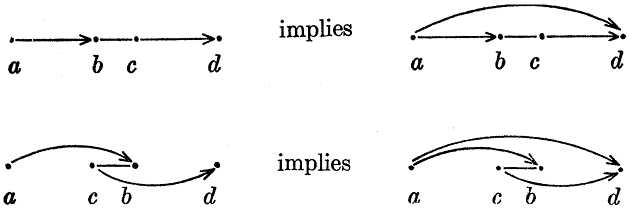

Figure: Luce (1958)

propriétés des préférences, cont.

- (L3) si $xPPIy$, alors xPy : si $u(x) - u(v) > 1$ et $u(v) - u(w) > 1$ et $u(w) - u(y) < 1$, alors $u(x) - u(y) > 1$

- il existe évidemment des propriétés plus simples qui sont conséquences de la L-représentabilité comme [si $xPIy$, alors xPy] ou [si $xIPy$, alors xPy]

- mais (L2)-(L3) (avec (L1)) constituent des conditions suffisantes à la L-représentabilité

semi-ordres de L-représentation

- **Définition.** P est un **semi-ordre** si ($\sim$ Luce 1958, Beja & Gilboa 1992, Gilboa 2009)
  (L1) P est irréflexif
  (L2) si $xPIPy$, alors xPy
  (L3) si $xPPIy$, alors xPy
- **Théorème de représentation** (X fini)
  P est un semi-ordre sur X ssi P est Luce-représentable

retour sur les propriétés des préférences

- (L2') si *xPy* et *vPw*, alors *xPw* ou *vPy* : si $u(x) - u(y) > 1$ et $u(v) - u(w) > 1$, alors $u(x) - u(w) > 1$ ou $u(v) - u(y) > 1$ [propriété (IO), ou de Ferrer]
- (L3') si *xPy* et *yPz*, alors *xPv* ou *vPz* : si $u(x) - u(y) > 1$ et $u(y) - u(z) > 1$, alors $u(x) - u(v) > 1$ ou $u(v) - u(z) > 1$ [semi-transitivité]

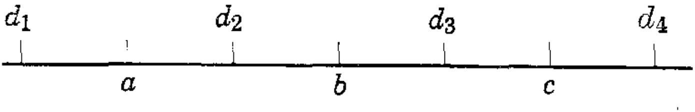

Figure: Suppes & Zinnes (1963)

définition alternative

- **Définition**. P est un **semi-ordre** si (Scott & Suppes 1958, v. Rooij 2008)
  (L1) P est irréflexif
  (L2') si xPy et vPw, alors xPw ou vPy
  (L3') si xPy et yPz, alors xPv ou vPz
- la preuve est instructive : elle passe par la reconstitution, à partir du semi-ordre (P, I), d'un ordre faible (ou "rationnel") (Q, E) qui peut s'interpréter comme l'ordre qu'aurait l'agent s'il n'avait pas les limites sensorielles qu'il a

- Soit P un semi-ordre et soit $Q = PI \cup IP$. Autrement dit, xQy si
  - xPy ou
  - xIy et $\exists z$ tq xIz et zPy ou
  - xIy et $\exists z'$ tq xPz' et $z'Iy$
- **Proposition** Si P est un semi-ordre, alors (Q, E) (où xEy ssi $\neg xQy$ et $\neg yQx$) est un ordre faible i.e. P est irréflexive et transitive et E est une relation d'équivalence.
- rem : définition alternative de E : xEy ssi $\forall z \in X$, xIz ssi zIy

- la preuve du Théorème de Représentation repose sur un algorithme pour assigner des utilités $u(x) \in \mathbb{R}$ à chaque option $x \in X$ tel que, étant donné les propriétés (L1)-(L3),

- xQy ssi $u(x) > u(y)$
- xEy ssi $u(x) = u(y)$
- xPy ssi $u(x) > u(y) + 1$
- xIy ssi $|u(x) - u(y)| \leq$

3. discussion

- trois points à discuter :

(P1) le “problème du semi-ordre” de Lehrer & Wagner (1985)

(P2) l’unicité

(P3) les généralisations

(P1) Lehrer & Wagner (1985)

- la Proposition montre comment, à partir d'une relation d'indifférence intransitive I faisant partie d'un semi-ordre, on peut construire une relation d'indifférence transitive E
- Lehrer & Wagner(1985) s'y intéressent comme à une méthode rationnelle *et générale* d'élimination de l'intransitivité:

exemple 1

- $X = \{x, y, z\}$, semi-ordre : xIy, yIz, xPy
- 5 transformations possibles en un ordre faible:

$\sharp 1$	$\sharp 2$	$\sharp 3$	$\sharp 4$	$\sharp 5$
x	x, y	x	y	x
y	z	y, z	x	z
z			z	y

exemple 1

- $X = \{x, y, z\}$, semi-ordre : xIy, yIz, xPy
- 5 transformations possibles en un ordre faible:

$\sharp 1$	$\sharp 2$	$\sharp 3$	$\sharp 4$	$\sharp 5$
x	x, y	x	y	x
y	z	y, z	x	z
z			z	y

- si l'on prend $Q = IP \cup PI$, on obtient $\sharp 1$...

exemple 1, cont.

- ...mais si l'on prend IP on obtient l'ordre $\sharp 2$, et si l'on prend PI, on obtient $\sharp 3$!

$\sharp 1$	$\sharp 2$	$\sharp 3$	$\sharp 4$	$\sharp 5$
x	x, y	x	y	x
y	z	y, z	x	z
z			z	y
$PI \cup IP$	IP	PI		

- pourquoi ne pas utilise une fonction d'utilité u qui L-représente les préférences et considérer l'ordre faible induit ?

- utilisons l'algorithme de la preuve :

(1) relation E : $\neg xEy, \neg yEz, \neg xEz$

(2) relation Q : $xQyQz$

(3) fonction d'utilité

$u(z) = 0$

$u(y) = 1/(1+1) = 1/2$

$u(x) = (1/2+1) \cdot 1/2 + (1/2+1) \cdot 0 + 1 = 7/6$

exemple 2

- $X = \{x, y, y', z\}$, semi-ordre : xIy, yIy', $y'Iz$, xPz
- 2 fonctions d'utilité qui L-représentent (P, I) :
  - $u(x) = 3/2$, $u(y) = u(y') = 1$, $u(z) = 0$
    $\Rightarrow x \succ y \sim y' \succ z$
  - $u(x) = 3/2$, $u(y) = 1$, $u(y') = 1/2$, $u(z) = 0$
    $\Rightarrow x \succ y \sim y' \succ z$

- problème supplémentaire : que vaut la L-représentabilité hors des contextes d'indiscriminabilité ?

- Lehrer & Wagner :

  “The task of devising rational methods for eliminating intransitivity would...appear to be an important problem of decision theory. While there are usually many ways to eliminate intransitivity, our contention is that, in general, no one of these methods is rationally superior to any other.”

(P2) unicité

- on a vu que les fonctions d'utilités de la représentation ("classique") d'une relation de préférence rationnelle étaient ordinales
- la situation est beaucoup moins simple ici : manifestement l'utilité encore "plus" puisqu'elle contient des informations sur qchose comme des j.n.dN
- pas de caractérisation connue des transformations correspondantes (?)

(P3) généralisation : les intervalles

- on peut voir la L-représentabilité en termes d'intervalles : $I(x) = [u(x), u(x) + 1]$. Alors
- xIy ssi $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$
- xPy ssi $I(x)$ est "à droite" de $I(y)$
- les semi-ordres correspondent alors au cas où les intervalles sont constants
- P est **I-représentable** si pour tout $x \in X$ il existe un intervalle $[b(x), e(x)]$ avec $b(x) \geq e(x)$ et

$$xPy \text{ ssi } b(x) > e(y)$$

exemple (Fishburn 1970)

- $X = \{x, y, z, w\}$, $zPyPx$, xIw, yIw, zIw

- $I(w) \cap I(x) \neq \emptyset$ $I(w) \cap I(y) \neq \emptyset$ et $I(w) \cap I(w) \neq \emptyset$

- $I(z)$ doit être “à droite” de $I(y)$ qui doit être aussi “à droite” de $I(x)$

$\therefore$ longueur de $(I(w)) \neq$ longueur de $I(y))$

- **Définition** P est un **ordre intervalle** si
  (L1) P est irréflexif
  (L2) si $xPIPy$, alors xPy
  ou
  (L2') si xPy et vPw, alors xPw ou vPy
- **Définition** P est un **ordre (strict) partiel** si
  (L1) P est irréflexif
  (TP) si xPy et yPz, alors xPz

semi-ordre
$\Uparrow$
ordre intervalle
$\Uparrow$
ordre strict partiel

- Beja & Gilboa (1992), “Numerical Representations of Imperfectly Ordered Preferences”, *Journal of Mathematical Psychology*, 36, 426-49
- Fishburn (1970), “Intransitive Indifference with Unequal Indifference Intervals”, *Journal of Mathematical Psychology*, 7, 144-9
- Luce (1956), “Semiorders and a Theory of Utility Discrimination”, *Econometrica*, 24(2), 178-191
- Scott & Suppes (1958), “Foundational Aspects of Theories of Measurement”, *JSL*, 23(2), 113-128
- Suppes & Zinnes (1963), “Basic Measurement Theory”, in *Handbook of Mathematical Psychology*, vol.I