Modèles probabilistes de croyances et omniscience logique

Mikaël Cozic

mikael.cozic@paris4.sorbonne.fr

(Philosophie, Paris IV-Sorbonne et IHPST (CNRS-Paris I-ENS Ulm))

introduction

- idéalisation fondamentale de la logique épistémique : l'omniscien logique
- différentes formes d'omniscience logique :
  - monotonie : clôture sous la relation de conséquence logique
  - intensionalité : substituabilité des formules logiquement équivalentes
- idéalisation très générale, qui s'étend (au moins partiellement) à toute formalisation des croyances en termes de mondes possibles (ou d'espace d'états) et qui se transmet aux formalisations plus vastes (ex : théorie de la décision) qui utilisent ces formalisations des croyances

introduction, *cont.*

- il existe de nombreuses tentatives de résolution de l'omniscience logique en logique épistémique : Hintikka, Stalnaker, Fagin, Halpern...
- Question : comment étendre les solutions putatives au problème l'omniscience logique à la représentation probabiliste des croyanc ?
- Plan de l'exposé
  - Section 1 : omniscience logique et logique épistémique
  - Section 2 : extension au cas probabiliste

sec. 1, langage épistémique propositionnel

Définition : L'ensemble des **formules** d'un langage épistémique propositionnel, $Form(\mathcal{L}B(At))$, est l'ensemble des suites de symboles d $\mathcal{L}B(At)$ tel que :

(i) si $p \in At$, alors $p \in Form(\mathcal{L}B(At))$,

(ii) si $\phi \in Form(\mathcal{L}B(At))$, alors $\neg\phi \in Form(\mathcal{L}B(At))$,

(iii) si $\phi, \psi \in Form(\mathcal{L}B(At))$, alors
$(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in Form(\mathcal{L}B(At))$, et

(iv) si $\varphi \in Form(\mathcal{L}B(At))$, alors $B\varphi \in Form(\mathcal{L}B(At))$.

(v) seules les suites de symboles générées par (i)-(iv) en un nombre fini d'étapes sont dans $Form(\mathcal{L}B(At))$.

sec. 1, structures de Kripke

Définition : soit $\mathcal{L}B(At)$ un langage épistémique propositionnel ; une **structure de Kripke** pour $\mathcal{L}B(At)$ est un triplet $\mathcal{M} = (S, \pi, R)$ où

(i) S est un espace d'états (ou mondes possibles),

(ii) $\pi : At \times S \to \{0, 1\}$ est une valuation

(iii) $R \subseteq S \times S$ est une relation d'accessibilité

sec. 1, structures de Kripke, *cont.*

Définition : la **relation de satisfaction**, notée $\bar{\pi}$, étend la valuation π à toute formule du langage conforément aux clauses suivantes :

(i) $\bar{\pi}(s, p) = \pi(s, p)$ si $p \in At$

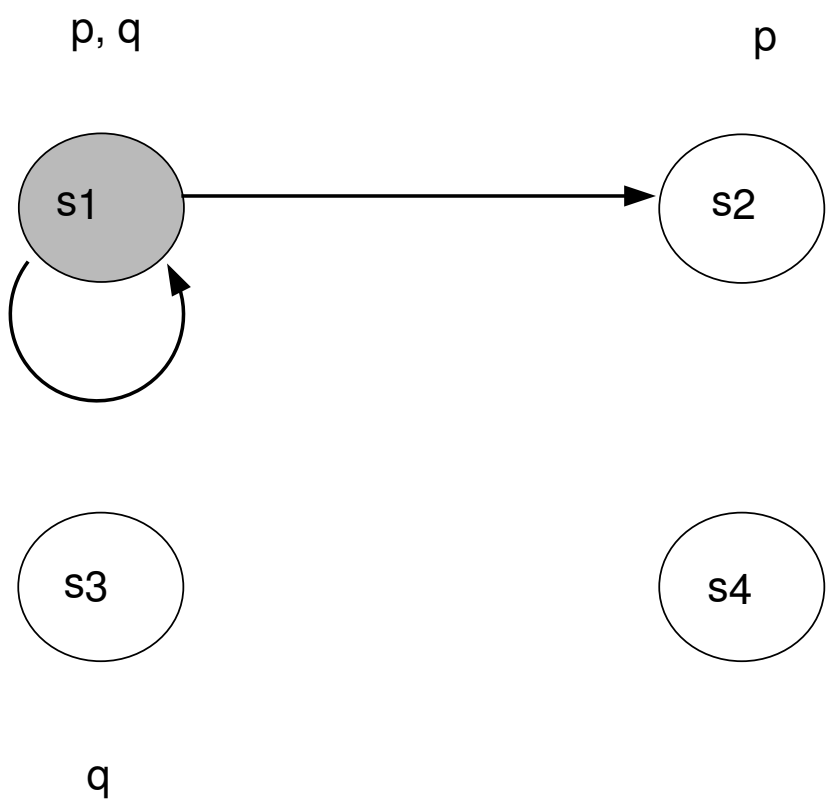
(ii) $\bar{\pi}(s, \phi \wedge \psi) = 1$ ssi $\bar{\pi}(s, \phi) = 1$ et $\bar{\pi}(s, \psi) = 1$

(iii) $\bar{\pi}(s, \phi \vee \psi) = 1$ ssi $\bar{\pi}(s, \phi) = 1$ ou $\bar{\pi}(s, \psi) = 1$

(iv) $\bar{\pi}(s, \neg\phi) = 1$ ssi $\bar{\pi}(s, \phi) = 0$

(v) $\bar{\pi}(s, B\phi) = 1$ ssi $\forall s'$ t.q. sRs', $\bar{\pi}(s, \phi) = 1$ (***analyse en termes de mond possibles de la croyance***)

sec.1, structures de Kripke, exemple



sec. 1, omniscience logique

Définitions :

(i) la **proposition** exprimée par ϕ, ou **contenu informationnel** de ϕ est $[[\phi]]_{\mathcal{M}} = \{s : \bar{\pi}(\phi, s) = 1\}$

(ii) ϕ $\mathcal{M}$**-implique** ψ if $[[\phi]]_{\mathcal{M}} \subseteq [[\psi]]_{\mathcal{M}}$

(iii) ϕ et ψ sont $\mathcal{M}$**-equivalents** si $[[\phi]]_{\mathcal{M}} = [[\psi]]_{\mathcal{M}}$

Proposition: pour toute structure de Kripke $\mathcal{M}$, on a :

- **monotonie déductive** : si ϕ $\mathcal{M}$-implique ψ, alors $B\phi$ $\mathcal{M}$-implique $B\psi$

- **intensionnalité** : si ϕ et ψ sont $\mathcal{M}$-equivalents, alors $B\phi$ et $B\psi$ sont $\mathcal{M}$-equivalents

sec.1, structure de voisinage

Définition : une **structure de voisinage** (ou structure de Montague-Sco
est un triplet $\mathcal{M} = (S, \pi, V)$ où

(i) S est un espace d'états,

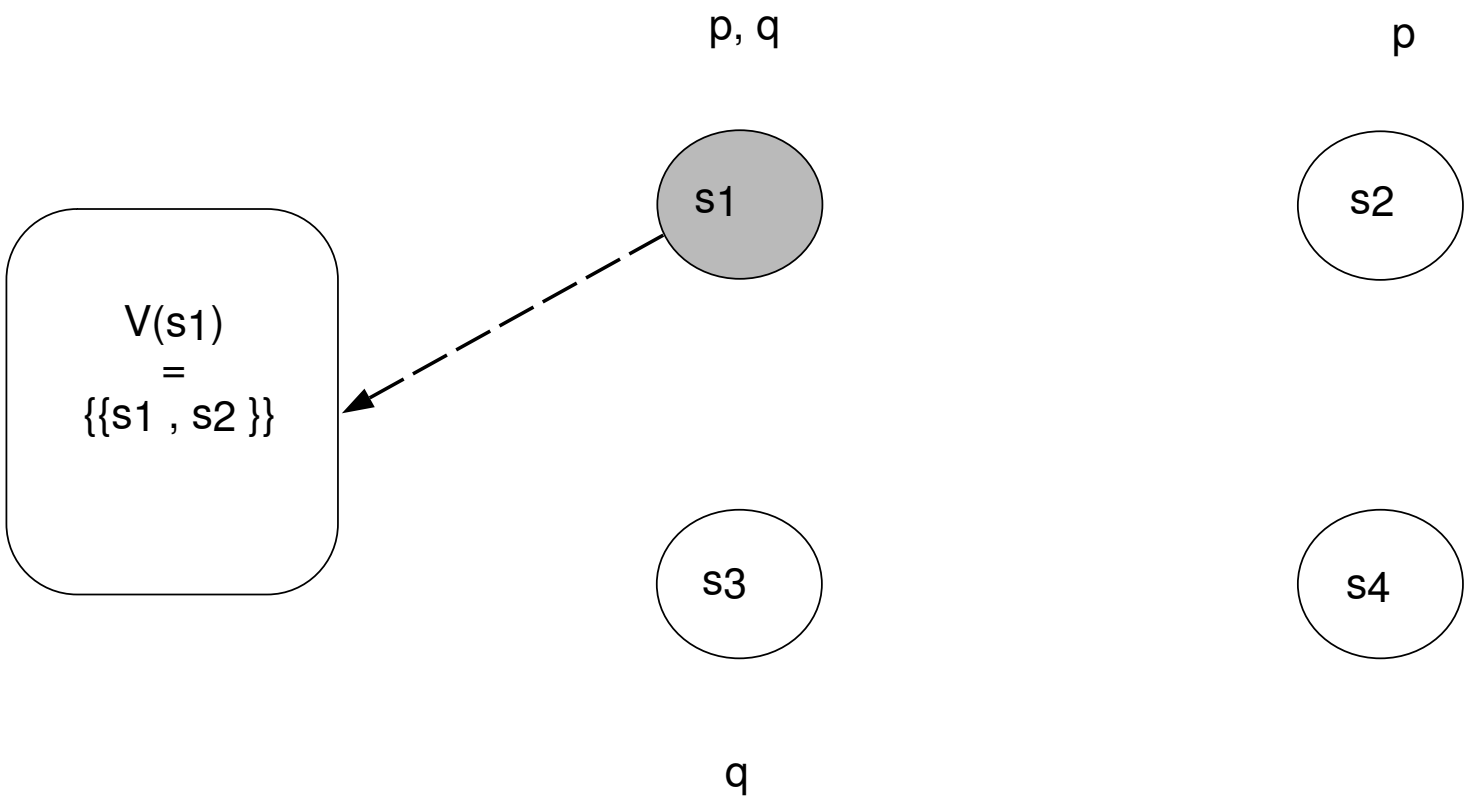
(ii) $\pi : At \times S \rightarrow \{0, 1\}$ est une valuation,

(iii) $V : S \rightarrow \wp(\wp(S))$, nommé le **système de voisinage** de l'agent, assoc
à chaque état un ensemble de propositions.

Condition de satisfaction pour l'opérateur doxastique :

$\bar{\pi}(B\phi, s) = 1$ ssi $[[\phi]]_{\mathcal{M}} \in V(s)$

sec.1, structure de voisinage, exemple



sec.1, structures d'awareness

Définition : une **structure d'awareness** est un quadruplet (S, π, R, A) o

(i) S est un espace d'états,

(ii) $\pi : At \times S \rightarrow \{0, 1\}$ est une valuation,

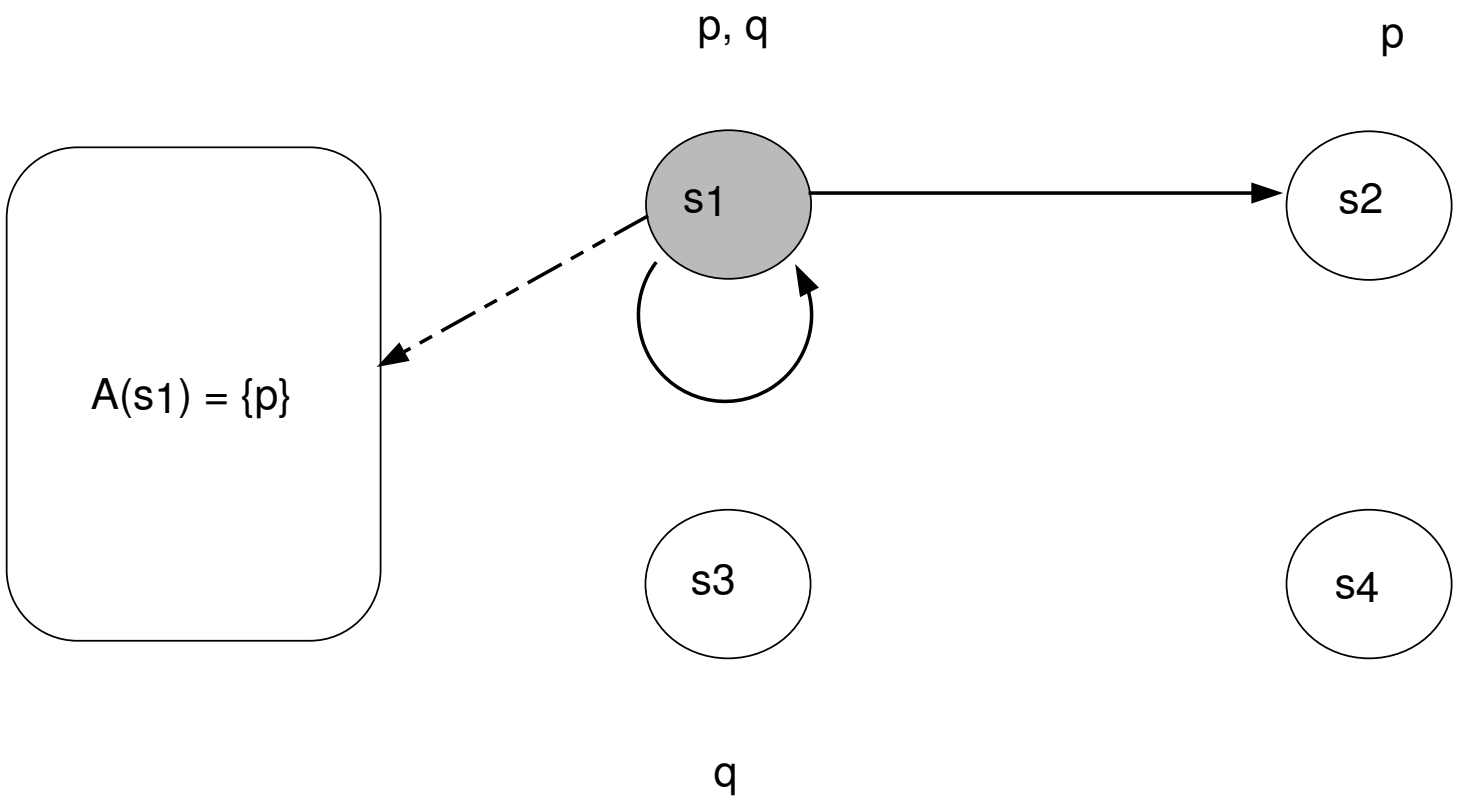
(iii) $R \subseteq S \times S$ est une relation d'accessibilité,

(iv) $A : S \rightarrow Form(\mathcal{L}B(At))$ est une fonction qui associe à chaque état u ensemble de formules (l'ensemble d'"awareness ").

Condition de satisfaction pour l'opérateur doxastique :

$\bar{\pi}(B\phi, s) = 1$ ssi $\forall s'$ t.q. $sRs', s' \in [[\phi]]_{\mathcal{M}}$ et $\phi \in A(s)$

sec.1, structures d'awareness, exemple



sec.1, structures non-standards

Définition : une **structure non-standard** est un quadruplet $\mathcal{M} = (S, S', \bar{\pi}, R)$ où

(i) S est un espace d'états standards,

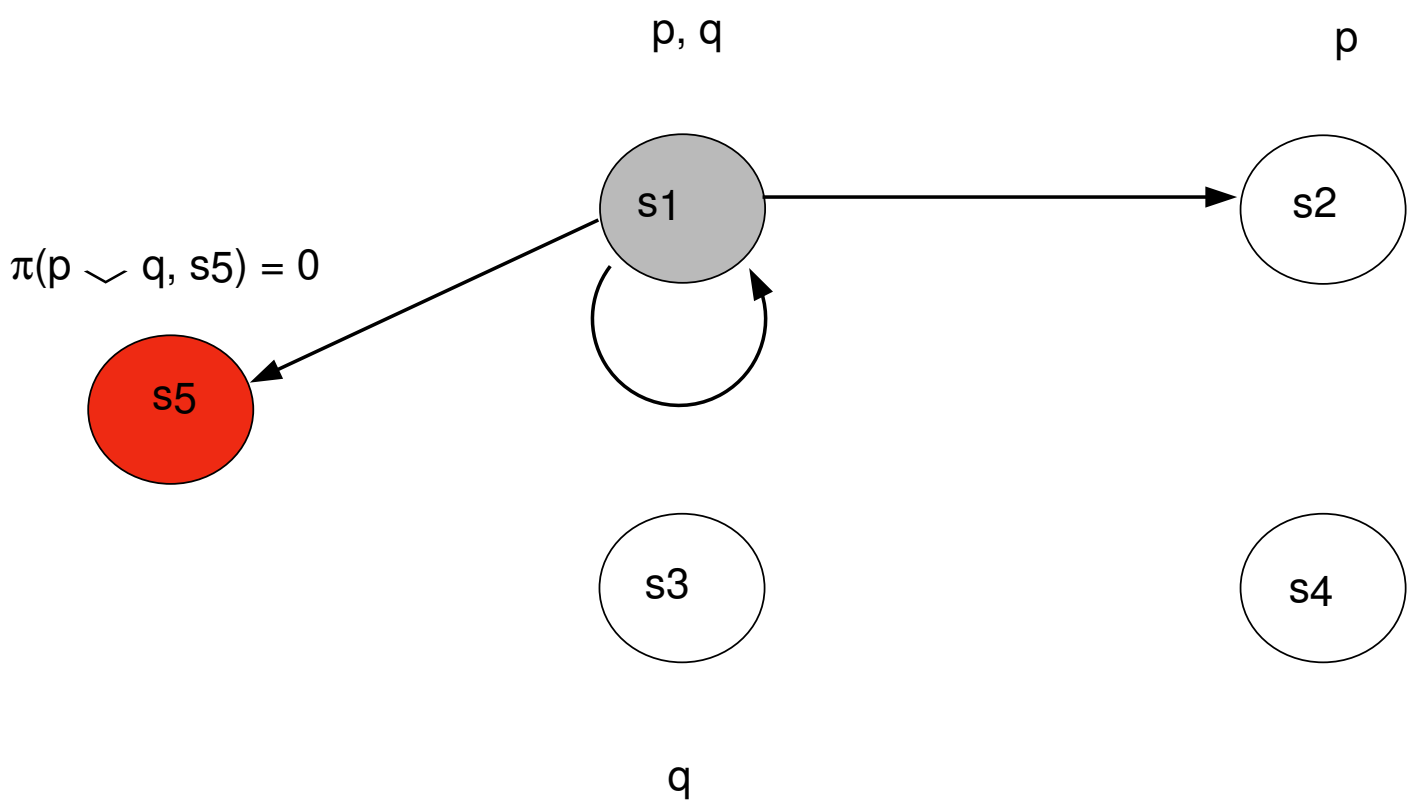
(ii) S' est un espace d'états non-standards,

(iii) $R \subseteq S \cup S' \times S \cup S'$ est une relation d'accessibilité non-standard,

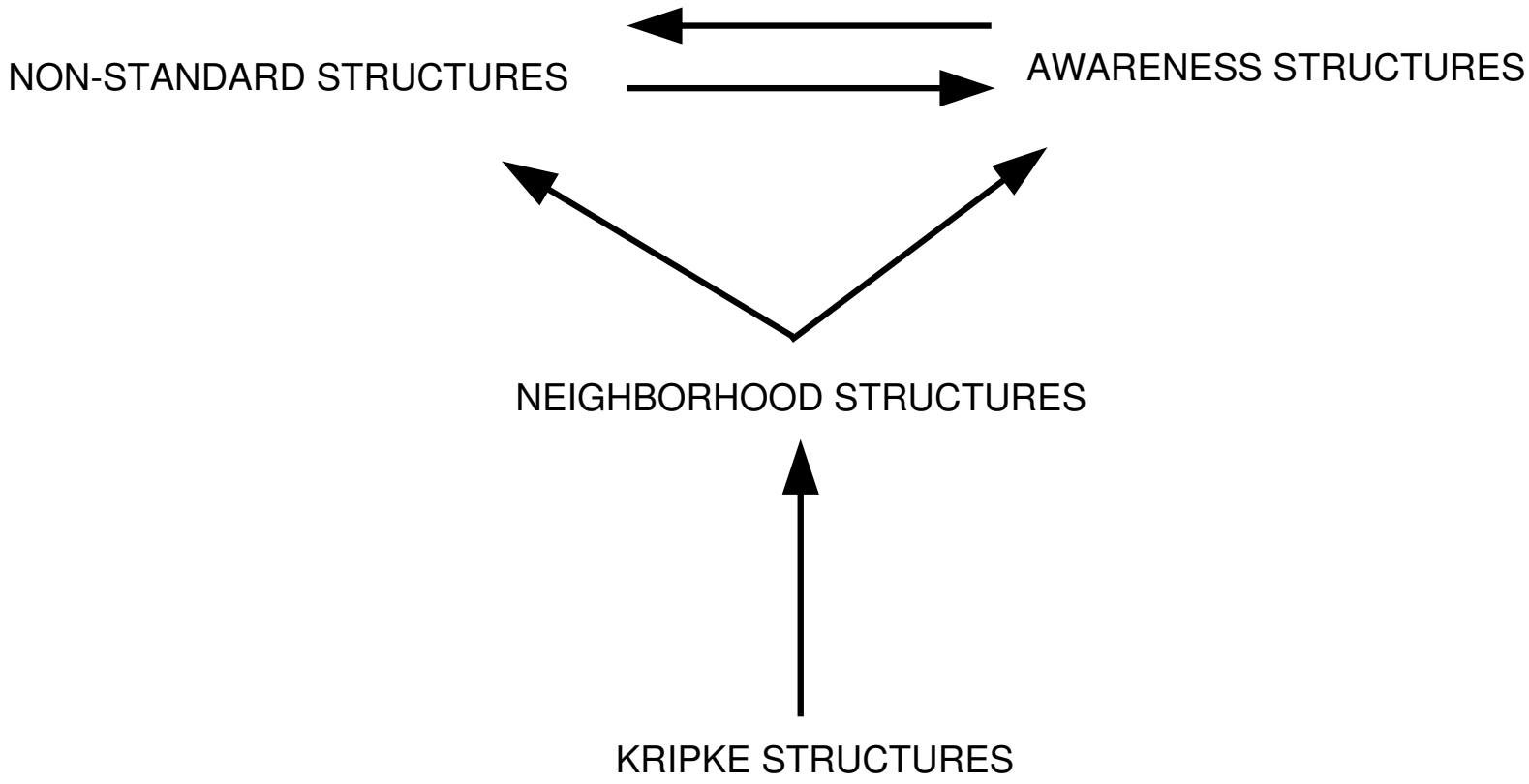
(iv) $\pi : Form(\mathcal{L}B(At)) \times S \to \{0, 1\}$ est une relation de satisfaction **standard sur** S

Contenu informationnel subjectif:
$[[\phi]]^*_{\mathcal{M}} = \{s \in S^* : \pi(\phi, s) = 1\}$

sec.1, structures non-standards, exemple



sec.1, puissances respectives des solutions



sec. 2, structures probabilistes

Définition : soit $\mathcal{L}(At)$ un langage propositionnel ; une **structure probabiliste** pour $\mathcal{L}(At)$ est un triplet $\mathcal{M} = (S, \pi, P)$ où

(i) S est un espace d'états,

(ii) π est une valuation,

(iii) P est une distribution de probabilité sur S.

Un agent croit au degré r une formule $\varphi \in Form(\mathcal{L}(At))$, noté $PB(\varphi) =$
si $P([[\varphi]]_{\mathcal{M}}) = r$

sec.2, omniscience logique

Proposition : pour toute structure probabiliste $\mathcal{M}$,

- **monotonie déductive** : si ϕ $\mathcal{M}$-implique ψ, alors $PB(\phi) \leq PB(\psi)$.

- **intensionnalité** : si ϕ et ψ sont $\mathcal{M}$-equivalents, alors $PB(\phi) = PB(\psi)$.

Cas r= 1 :

- si ϕ $\mathcal{M}$-implique ψ, s'il est certain que ϕ, il est certain que ψ

- si ϕ et ψ sont $\mathcal{M}$-equivalents, ϕ est certain ssi ψ est certain.

sec.2, comment affaiblir les structures probabilistes ?

- structures de voisinage : affaiblissement insuffisant
- structures d'awareness :
  - les ensembles d'awareness s'appuient sur l'aspect qualitatif de l
  logique épistémique
  - même si on trouve une extension probabiliste, difficile de
  concevoir comment on pourrait l'utiliser dans un modèle de choi

sec.2, structures probabilistes non-standards

Définition : soit $\mathcal{L}(At)$ un langage propositionnel ; une **structure probabiliste non-standard** pour $\mathcal{L}(At)$ est un quadruplet $\mathcal{M} = (S, S', \pi, P)$ où

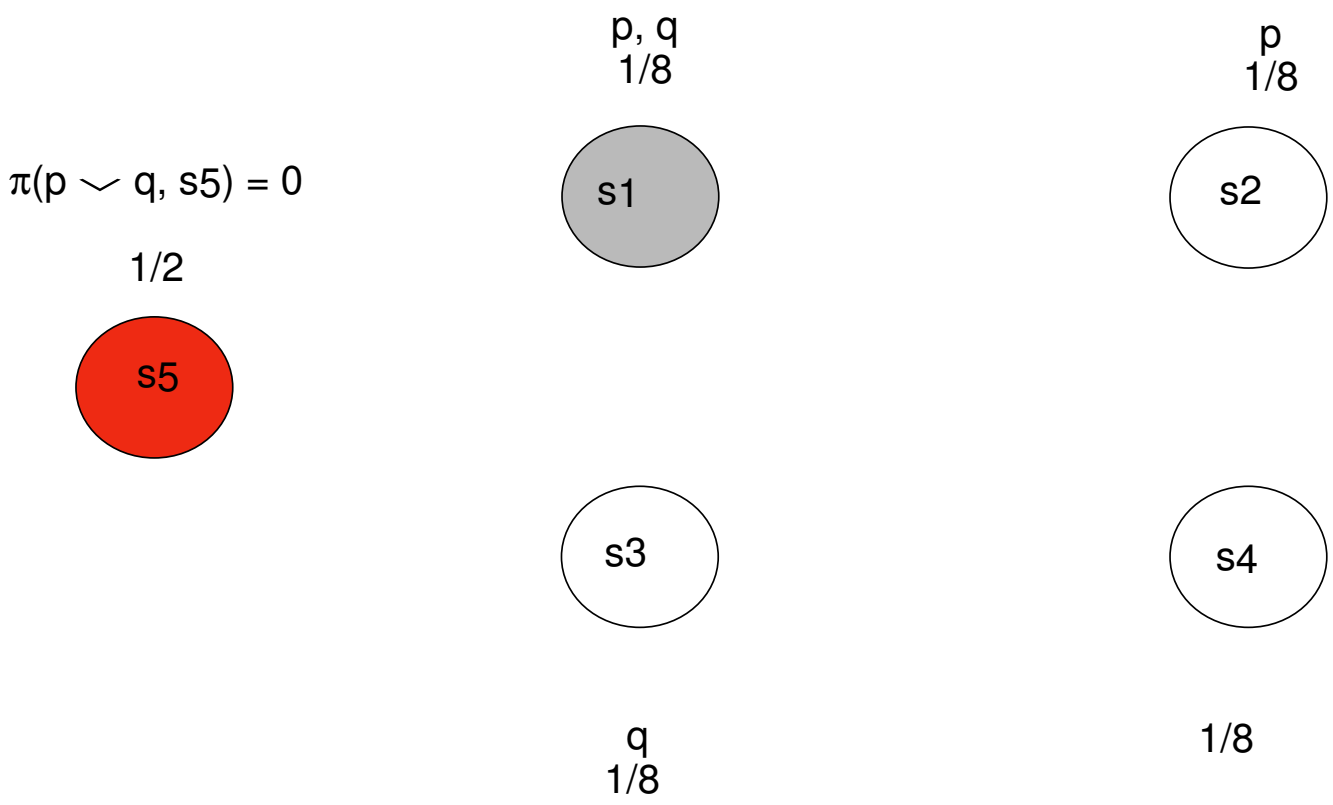
(i) S est un espace d'états standards,

(ii) S' est un espace d'états non-standards,

(iii) $\pi : Form(L(At)) \times S \cup S' \rightarrow \{0, 1\}$ est une relation de satisfaction standard sur S,

(iv) P est une distribution de probabilité sur $S^* = S \cup S'$.

sec.2, exemple



sec.2, remarque historique

- Hacking 1967 est l'une des seules contributions à s'intéresser à l'extension probabiliste de l'affaiblissement déductif
- Hacking propose de substituer une "possibilité personnelle" à la "possibilité logique"
- probabilités basées sur la "possibilité logique" :
  (i) si ϕ est une tautologie (si sa négation n'est pas logiquement possible), alors sa probabilité vaut 1, et

  (ii) si ϕ et ψ sont logiquement incompatibles (si leur conjonction n'est pas logiquement possible), alors la probabilité de leur disjonction égale la somme de leurs probabilités.

sec.2, remarque historique, *cont*

- probabilité basées sur la "possibilité personnelle" :

  (i′) si la négation de ϕ n'est pas possible *pour l'agent*, alors la probabilité de ϕ vaut 1, et

  (ii′) si la conjonction de ϕ et de ψ n'est pas possible *pour l'agent*, al la probabilité qu'il accorde à leur disjonction égale la somme de leurs probabilités.

- les structures probabilistes non-standards formalisent la suggesti de Hacking

sec.2, application 1 : information déductive

- Que signifie apprendre que ϕ implique ψ ?
  Si l'on suit l'analyse de la croyance en termes de mondes possible
  exclure les états où ϕ est vrai mais ψ faux. Cela revient à apprend
  l'événement

$$I(\phi, \psi) = S^* - ([[\phi]]^*_{\mathcal{M}} - [[\psi]]^*_{\mathcal{M}})$$

- Compatibilité entre la conditionalisation sur I et la monotonie déductive :
  Proposition : si $I(\phi, \psi)$ est appris conformément à la règle de Bay
  alors la déductive monotonie est récupérée, *ie* $PB_I(\phi) \leq PB_I(\psi)$.

sec.2, additivité, rappels et terminologie

- additivité : Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, alors $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
- subadditivité : Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, alors $P(E_1 \cup E_2) \leq P(E_1) + P(E_2)$
- superadditivité : Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, alors $P(E_1 \cup E_2) \geq P(E_1) + P(E_2$
- inclusion-exclusion (modularité) :
  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- submodularité : $P(E_1 \cup E_2) \leq P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- supermodularité : $P(E_1 \cup E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- inclusion-exclusion généralisée :
  $P(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{I \subseteq 1,\ldots,n:|I|=i} (-1)^{i+1} P(\cap_{j \in I} E_j)$

sec.2, additivité et modèles non-probabilistes

- L'additivité est le coeur du modèle probabiliste des croyances partielles ; les modèles non-probabilistes se différencient souvent par variations autour de l'additivité
- Exemple : une fonction de croyance de Dempster-Shafer se défini par la supermodularité :

$$Bel(\emptyset) = 0$$

$$Bel(S) = 1$$

$$Bel(\cup_{i=1}^{n} E_i) \geq \sum_{i=}^{n} \sum_{I \subseteq 1,\ldots,n:|I|=i} (-1)^{i+1} Bel(\cap_{j \in I} E_j)$$

sec.2, application 2 : additivité

- Idée de départ : contrôler l'additivité grâce aux connecteurs logiques

Définitions :
(i) $\mathcal{M}$ est (logiquement) **additive** si, quand ϕ et ψ sont logiquement incompatibles, $PB(\phi) + PB(\psi) = PB(\phi \vee \psi)$.

(ii) $\mathcal{M}$ est $\vee$**-standard** si pour toutes formules ϕ, ψ,
$[[\phi \vee \psi]]^*_{\mathcal{M}} = [[\phi]]^*_{\mathcal{M}} \cup [[\psi]]^*_{\mathcal{M}}$.

Proposition Si $\mathcal{M}$ est $\vee$-standard, alors elle est (logiquement) subadditi

sec.2, additivité *cont.*

Définitions :

(i) $\mathcal{M}$ satisfait la règle (logique) d'inclusion-exclusion si
$PB(\phi \vee \psi) = PB(\phi) + PB(\psi) - PB(\phi \wedge \psi)$

(ii) $\mathcal{M}$ satisfait la **submodularité** (logique) (resp. supermodularité) si :
$PB(\phi \vee \psi) \leq PB(\phi) + PB(\psi) - PB(\phi \wedge \psi)$ (resp.
$PB(\phi \vee \psi) \geq PB(\phi) + PB(\psi) - PB(\phi \wedge \psi)$)

Proposition. Supposons que $\mathcal{M}$ est $\vee$-standard ;

- si $\mathcal{M}$ est negativement $\wedge$-standard, alors elle est submodulaire.

- si $\mathcal{M}$ est positivement $\wedge$-standard, alors elle est supermodulaire.